INCLUYE CD-ROM

Geometría Analítica

Elena de Oteyza
Emma Lam
Carlos Hernández
Ángel Carrillo
Arturo Ramírez

Tercera edición

espacios

Bachillerato

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Geometría Analítica

Tercera edición

espacios

Bachillerato

Geometría Analítica

Tercera edición

Elena de Oteyza de Oteyza
Emma Lam Osnaya
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Carlos Hernández Garciadiego
Ángel Manuel Carrillo Hoyo
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Arturo Ramírez Flores
Centro de Investigación de Matemáticas

Revisión técnica
Citlali Yacapantli Servín Martínez
Instituto Politécnico Nacional

Omar Vigueras Herrera
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

ALWAYS LEARNING PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

De Oteyza, Elena, *et al.*

Geometría Analítica
Tercera edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2011
ISBN: 978-607-32-0689-1
Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 20 x 25.5 cm Páginas: 528

Dirección general:	Laura Koestinger
Dirección K-12:	Santiago Gutiérrez
Gerencia editorial:	Rodrigo Bengochea
Coordinación editorial:	Gloria Morales
Coordinación de arte y diseño:	Asbel Ramírez
Edición sponsor:	Enrique Quintanar e-mail: enrique.quintanar@pearson.com
Edición de desarrollo:	Trasgos Ediciones
Asistencia editorial	Carlos Javier Orozco
Supervisión de arte y diseño:	Yair Cañedo
Diseño de interiores:	Salvador Carmona / eltall3r, Silvia Plata
Diseño de portada:	Equipo Pearson de Arte y Diseño
Diagramación:	Silvia Plata y Overprint, S.A. de C.V.
Dirección K-12 Latinoamérica:	Eduardo Guzmán Barros
Gerencia editorial Latinoamérica:	Clara Andrade

TERCERA EDICIÓN, 2011

D.R. © 2011 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500, 5° piso,
Col. Industrial Atoto, C.P. 53519,
Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-0689-1
ISBN E-BOOK: 978-607-32-0690-7
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0691-4

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 14 13 12 11

PEARSON

www.pearsoneducacion.net

Contenido

Contenido

Conoce tu libro

Espacios es una serie que, además de exponer los temas propios de las asignaturas, ofrece múltiples actividades para desarrollar las habilidades de pensamiento crítico así como el razonamiento de los jóvenes.

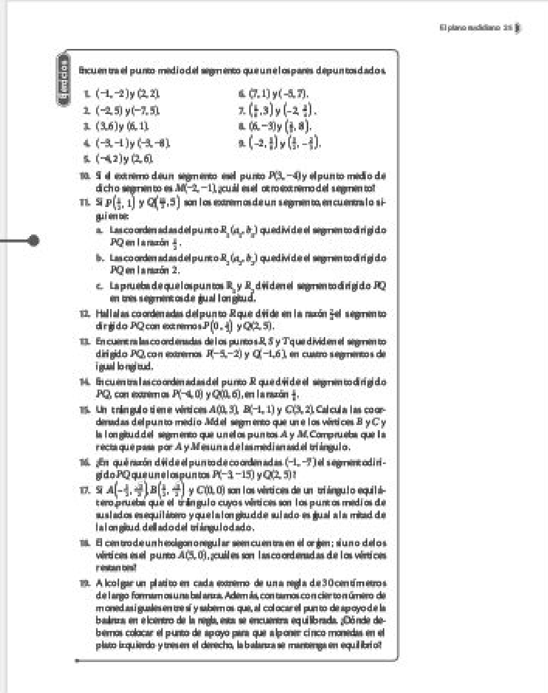
Estas características hacen que la serie tenga un enfoque metodológico actual y pertinente para los estudiantes de bachillerato.

A continuación se exponen esas secciones especiales de *Geometría Analítica*:

Texto introductorio a la unidad
Su finalidad es explicar la utilidad de los temas que componen la unidad y despertar el interés de los alumnos.

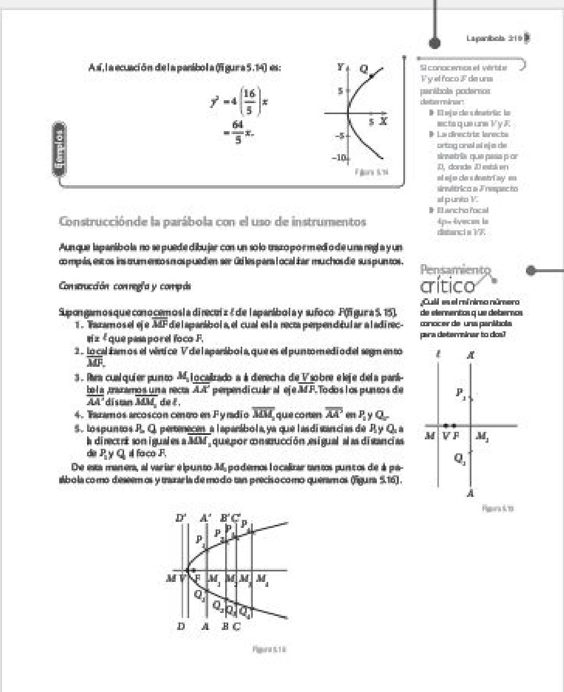
Organizador gráfico

Con el propósito de dar un panorama general, al inicio de cada unidad aparece un esquema que muestra los temas y subtemas que en ella se revisarán.



Ejercicios
Los diversos tipos de actividades que se presentan tienen como finalidad desarrollar habilidades de pensamiento enfocadas a la solución de problemas.

Tips
Proporcionan datos clave que ayudan a una mejor comprensión de los ejemplos.

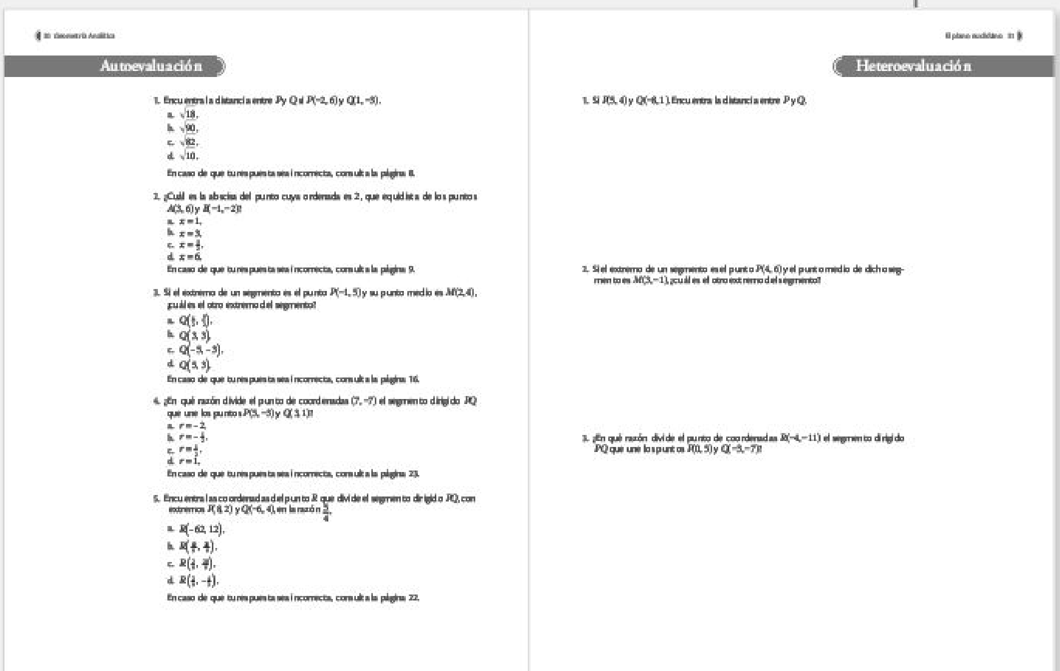


Pensamiento crítico
Su objetivo es que el estudiante reflexione y desarrolle su capacidad para:

- Juzgar la veracidad de determinadas afirmaciones
- Valorar la solidez lógica de una deducción
- Generar hipótesis alternativas

Mundo virtual
Invita al alumno a solucionar ejercicios de manera interactiva.

Autoevaluación/Heteroevaluación
Son dos páginas ubicadas al final de cada unidad: en la primera se incluyen reactivos de opción múltiple desarrollados a partir del contenido de la unidad; en la segunda página se presenta una heretoevaluación, cuyo propósito es que los estudiantes apliquen los contenidos que hayan revisado en la unidad.



Presentación

Esta obra conserva el espíritu de ediciones anteriores y responde, particularmente, a la necesidad de contar con un libro de texto que incluya los temas considerados como fundamentales en la Geometría Analítica. Por ello, su estructura y contenido han sido modificados respecto de la segunda edición.

En la obra se siguen presentando con detalle los objetos clásicos de la Geometría Analítica: la recta, el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. También continúa dándose gran relevancia al tema de los lugares geométricos, sobre los que se proporcionan varios ejemplos, distintos a los que comúnmente se mencionan.

En la presentación de todos los temas se establece una constante relación entre el Álgebra y la Geometría, lo que constituye la esencia misma de la Geometría Analítica. Además de hacer un análisis individual de las curvas mencionadas y sus ecuaciones, se presenta también, como es usual, un estudio global de ellas y de la ecuación general de segundo grado en dos variables.

Cada unidad, por su parte, está precedida de una introducción en la que se señalan sus contenidos más relevantes, o se indica alguna aplicación de lo que en ella se estudiará.

En el desarrollo de los contenidos sigue predominando el empleo de figuras, con tanto detalle como se ha considerado necesario, para acompañar casi todas las explicaciones.

Como en ediciones anteriores, las secciones son cortas y contienen numerosas aplicaciones, especialmente en el caso de las cónicas. Sin embargo, en esta nueva edición se indican más situaciones de nuestro entorno en las que aparecen las cónicas; por ejemplo, su uso en la arquitectura y en la medicina.

Las ecuaciones paramétricas de la recta y de las cónicas ya no se tratan en una unidad independiente, sino que se revisan en las unidades correspondientes a la recta y a las cónicas. Por su parte, los temas de ecuaciones polares de las cónicas y familias de curvas, y la unidad dedicada al triángulo fueron eliminados; sin embargo, algunos ejercicios de esta última unidad se conservaron en otras secciones.

Tampoco se incluyen en esta edición las tres secciones optativas en las que, mediante el cálculo diferencial, se obtenían las ecuaciones de las rectas tangentes a las cónicas. Lo que se mantiene es la caracterización geométrica de esas tangentes y se complementa con el procedimiento algebraico para encontrar sus ecuaciones.

Con excepción de la Unidad 3. Cónicas, en las demás se ha incluido un resumen con los resultados más importantes. En cambio, en todas las unidades se ha aumentado el número de ejercicios y ejemplos en los que se plantean problemas.

Al final de cada unidad hay ahora una autoevaluación y una heteroevaluación. La primera es un instrumento de valoración que incluye reactivos de opción múltiple, en los que se indica al lector la sección del libro donde se encuentra la información pertinente para solucionarlos. En la heteroevaluación se incluyen solamente los reactivos de problemas tipo para que el lector los solucione paso a paso, advirtiéndole en cuáles aspectos debe tener especial cuidado para cometer el menor número de errores posible.

También se ha incorporado en los ladillos de todo el libro información de otras áreas de la cultura, datos curiosos, resultados y conceptos relevantes que complementan de manera ligera lo expuesto en el texto, así como una sección llamada "Pensamiento crítico", en la que se plantean preguntas relacionadas con los temas tratados, o se señalan resultados que pueden llevar al lector a plantearse preguntas elaboradas por él mismo y obtener resultados generales a partir de situaciones particulares.

En la parte final del libro aparecen las respuestas de todos los ejercicios impares, de las autoevaluaciones, de las heteroevaluaciones y de las secciones "Pensamiento crítico".

Como una herramienta más para el uso óptimo del libro, al final de cada unidad se incluyen ejercicios opcionales, bajo el título "Mundo virtual", que pueden solucionarse con la versión *ad hoc* de un programa interactivo llamado Geolab, que constituye un laboratorio de geometría, incluido en el CD que acompaña el libro. Con Geolab se pueden hacer construcciones que ayudan a comprender mejor muchas de las situaciones señaladas en el libro y otras que pueden llevar al usuario a intuir resultados que le son desconocidos.

René Descartes.

Unidad 1 El plano euclidiano

Al introducir un sistema rectangular de coordenadas en el plano euclidiano, se obtiene el plano cartesiano, así llamado en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), considerado el inventor de la geometría analítica.

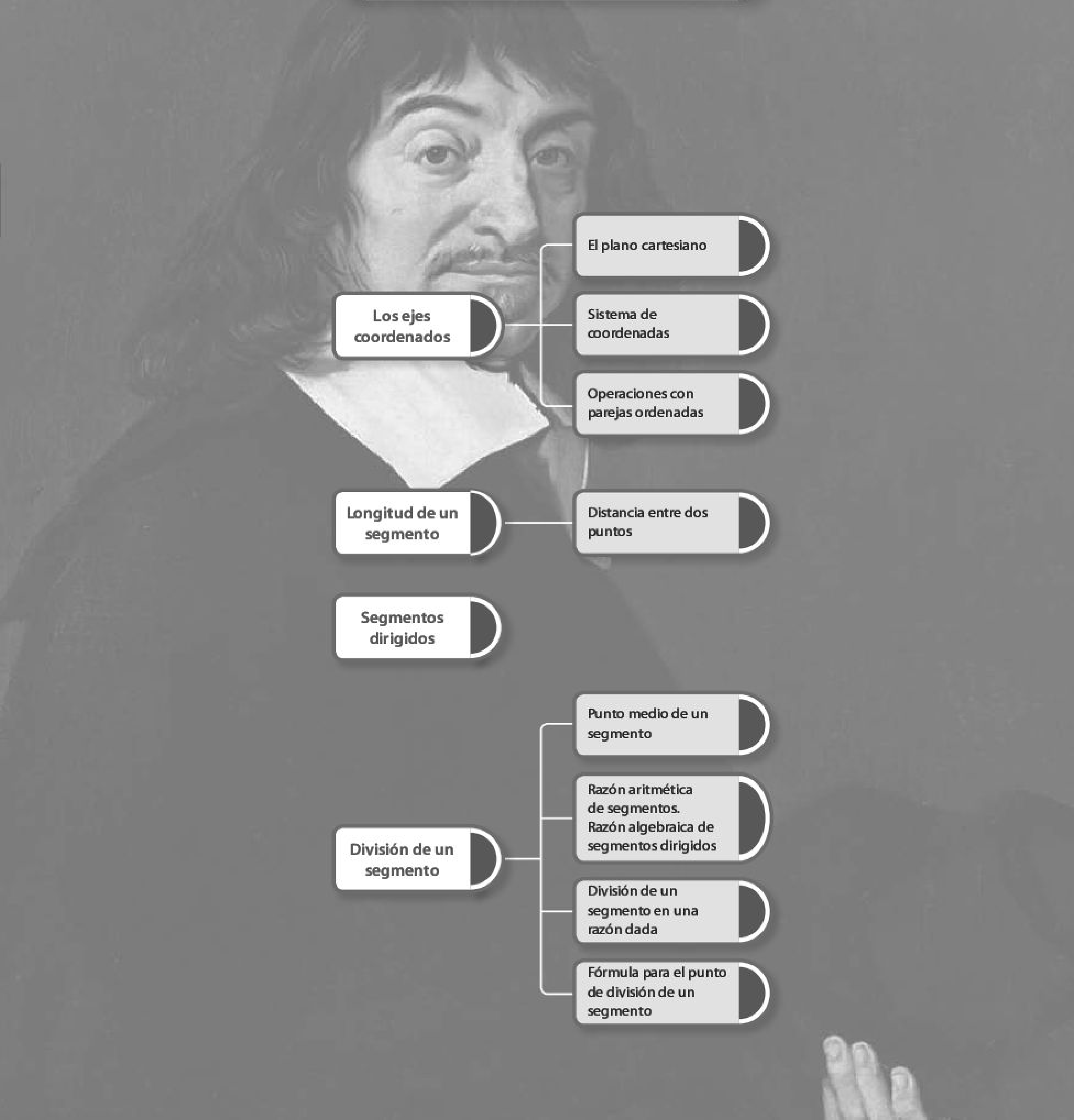
En este modelo de plano, debido a que un punto es identificado con una pareja (ordenada) de números que indican su posición con respecto a dos rectas llamadas *ejes del sistema*, se tiende un puente que permite interrelacionar la geometría euclidiana con el álgebra.

En esta parte inicial, la idea de longitud de un segmento nos lleva al concepto de distancia entre dos puntos, cuya fórmula obtenemos por medio del teorema de Pitágoras. Por otra parte, la razón de números y la noción de dirección nos permiten definir la razón (algebraica) de dos segmentos dirigidos. Posteriormente, se encuentran las fórmulas que permiten localizar el punto que divide un segmento del plano en una razón dada. Y, al final de la unidad, se usa dicha fórmula para resolver un problema de palancas.

Todo lo anterior es un preámbulo de lo que se logrará en el resto del libro, en el cual estudiaremos —con la ayuda de los números y las ecuaciones— las propiedades de las rectas y de algunas curvas, y encontraremos aplicaciones de esas propiedades.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

El plano euclidiano



- Los ejes coordenados
  - El plano cartesiano
  - Sistema de coordenadas
  - Operaciones con parejas ordenadas
- Longitud de un segmento
  - Distancia entre dos puntos
- Segmentos dirigidos
- División de un segmento
  - Punto medio de un segmento
  - Razón aritmética de segmentos. Razón algebraica de segmentos dirigidos
  - División de un segmento en una razón dada
  - Fórmula para el punto de división de un segmento

Los ejes coordenados


Juego de submarinos.

El plano cartesiano

El juego de submarinos consiste en adivinar la posición de los navíos del contrincante, que están colocados en un plano coordenado. Las posiciones de los submarinos se describen con dos coordenadas, la primera señalada con una letra y la segunda con un número.

Si trazamos en un plano dos rectas perpendiculares entre sí, este queda dividido en cuatro regiones llamadas *cuadrantes* que, por convención, se numeran I, II, III y IV, como se muestra en la figura 1.1. A dichas rectas se les conoce como *ejes coordenados*, y a su punto de intersección como *origen*, el cual se indica usualmente con el símbolo O.

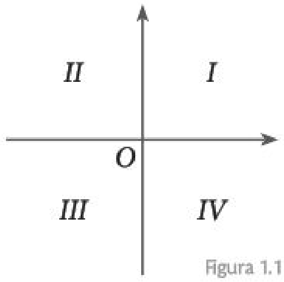


Figura 1.1

René Descartes (Renatus Cartesius en latín) es autor de la célebre frase "pienso, luego existo", la cual aparece en su libro *Discurso del método* (1637).

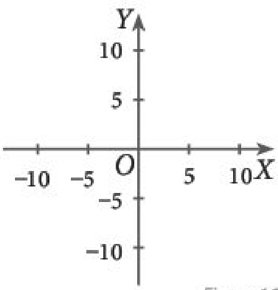


Figura 1.2

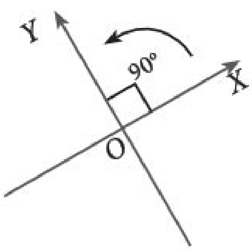


Figura 1.3

En general, uno de estos ejes se traza de modo horizontal y el otro verticalmente; sin embargo, a veces es conveniente colocarlos en otra posición para poder analizar más fácilmente ciertas curvas o ecuaciones. Esto lo haremos, por ejemplo, en la unidad que está dedicada a la ecuación general de segundo grado.

El eje que por lo general se traza horizontalmente se conoce como *eje* X, y el perpendicular como *eje* Y (figura 1.2). El plano, junto con sus ejes coordenados, se llama *plano cartesiano* en honor a René Descartes (1596-1650), el inventor de la geometría analítica.

A ambos ejes los concebimos como rectas reales —con el cero colocado en el origen— y, generalmente, con la misma escala —la distancia del 0 al 1 es la misma en los dos ejes—. Cuando lo consideremos oportuno, nos permitiremos referirnos a los puntos de los ejes mediante los números que tienen asignados; así, diremos "el punto 5 del eje X" en lugar de "el punto del eje X asociado a 5".

En su posición usual, el eje X es horizontal y su dirección positiva es hacia la derecha, es decir, los números positivos quedan ubicados a la derecha del origen y los números negativos a la izquierda; mientras que el eje Y es vertical y su dirección positiva es hacia arriba: en este eje, los números positivos están arriba del origen y los negativos abajo de él (figura 1.2).

Las semirrectas o rayos de los ejes X y Y que comienzan en el origen y contienen los números positivos se llaman *semiejes positivos* X y Y, respectivamente.

Cuando necesitemos situar los ejes en una posición distinta a la usual, una vez que hayamos fijado la dirección positiva del eje X, el semieje positivo Y se obtiene al girar 90° el semieje positivo X en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 1.3).

Salvo que se indique lo contrario, siempre colocaremos los ejes coordenados en su posición usual.

Sistema de coordenadas

Si P es un punto del plano, la perpendicular al eje X, trazada desde P, corta el eje X en un punto A que se llama *proyección ortogonal* o, simplemente, *proyección* de P sobre el eje X. De manera similar, el punto B, en donde el eje Y es cortado por la recta perpendicular a ella y que pasa por P, se llama *proyección* (*ortogonal*) de P sobre el eje Y (figura 1.4).

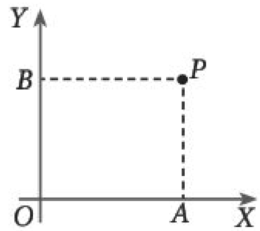


Figura 1.4

Si a es el número que corresponde al punto A en el eje X, y b el número que corresponde al punto B en el eje Y, entonces la pareja ordenada (a, b) se identifica con el punto P. Los números reales a y b se conocen como las *coordenadas* de P. A la primera coordenada se le llama *abscisa* de P y a la segunda *ordenada* de P.

Del mismo modo, a cada pareja ordenada de números reales (a, b) la identificamos con un punto del plano de la siguiente manera: en el eje X localizamos el punto a y por él trazamos una recta vertical; después, en el eje Y localizamos el punto b y trazamos una recta horizontal que pase por él; por último, identificamos la pareja (a, b) con el punto P en el que esas dos rectas se cortan (figura 1.5).

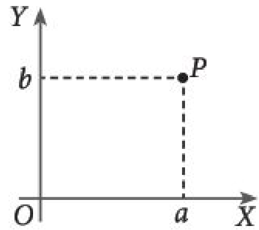


Figura 1.5

Para referirnos al punto P con coordenadas (a, b), escribimos $P(a, b)$. En vista de la identificación de los puntos y las parejas, con frecuencia se dice "el punto (a, b)" en lugar de "el punto $P(a, b)$". En ocasiones, nos tomaremos esta libertad.

Ten presente que estamos usando la noción de pareja ordenada de números. Las parejas ordenadas (a, b) y (c, d) son iguales sólo en caso de que $a = c$ y $b = d$. Por tanto, si $a \neq b$, entonces las parejas (a, b) y (b, a) difieren entre sí y determinan dos distintos puntos del plano.

Si $a \neq b$ entonces $(a, b) \neq (b, a)$.

Ejemplo

1. Localizar en el plano el punto $P(-4, 7)$.

Solución:
Localizamos el número -4 en el eje X, es decir, el punto en ese eje que está 4 unidades a la izquierda del origen, y trazamos una recta vertical que pase por ese punto. Después localizamos el número 7 en el eje Y, es decir, el punto en ese eje que está 7 unidades arriba del origen, y trazamos una recta horizontal que pase por él. El punto donde se cortan las dos rectas que trazamos corresponde al punto P (figura 1.6).

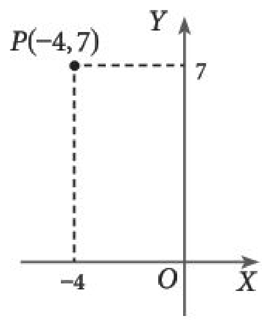


Figura 1.6

Observaciones:

- Cualquier pareja de la forma $(0, b)$ se ubica sobre el eje Y.
- Cualquier pareja de la forma $(a, 0)$ se ubica sobre el eje X.
- Todos los puntos que están en la recta vertical que pasa por (a, b) tienen abscisa a.
- Todos los puntos que están en la recta horizontal que pasa por (a, b) tienen ordenada b.

Ejemplos

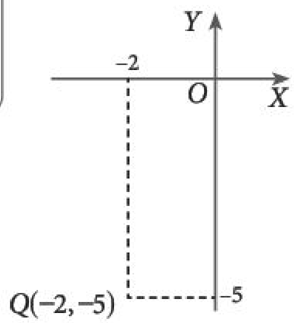


Figura 1.7

1. Localizar en el plano al punto $Q(-2,-5)$.

Solución:

Localizamos el número −2 en el eje X, es decir, el punto en dicho eje que se ubica 2 unidades a la izquierda del origen, y por él trazamos una recta vertical. Después localizamos el número −5 en el eje Y, es decir, ubicamos el punto sobre el eje vertical que se sitúa 5 unidades abajo del origen, y por él trazamos una recta horizontal. El punto de intersección de las dos rectas que trazamos corresponde al punto Q (figura 1.7).

2. Localizar en el plano los puntos de coordenadas $P(3,-1)$ y $Q(-1,3)$.

Solución:

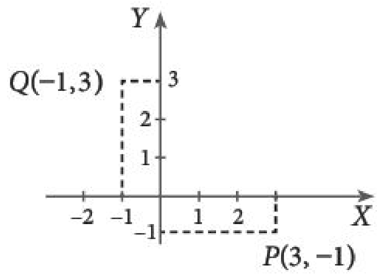


Figura 1.8

Observa en la figura 1.8 que $P(3,-1) \neq Q(-1, 3)$.

Operaciones con parejas ordenadas

En las parejas ordenadas podemos definir operaciones que nos serán útiles. Consideremos dos parejas ordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2) y un número real r. Definimos:

- La suma:

$$\left(x_1, y_1\right)+\left(x_2, y_2\right)=\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right).$$

- La resta:

$$\left(x_1, y_1\right)-\left(x_2, y_2\right)=\left(x_1-x_2, y_1-y_2\right).$$

- La multiplicación por r:

$$r\left(x_1, y_1\right)=\left(rx_1, ry_1\right).$$

Observa que efectuamos las operaciones coordenada a coordenada.

Ejemplo

1. Encontrar la suma, las diferencias y los productos por 5 de las parejas ordenadas $(3, -1)$ y $(4, 7)$.

Solución:

- La suma:

$$(3,-1)+(4,7)=(3+4, -1+7)=(7,6).$$

- Las diferencias:

$$(3,-1)-(4,7)=(3-4,-1-7)=(-1,-8).$$
$$(4,7)-(3,-1)=(4-3,7-(-1))=(1,8).$$

- Los productos:

$$5(3,-1)=(5\cdot 3,5\cdot(-1))=(15,-5).$$
$$5(4,7)=(5\cdot 4,5\cdot 7)=(20,35).$$

Longitud de un segmento

Distancia entre dos puntos

En una carta de navegación, el origen se sitúa en un puerto. Un barco se encuentra en el punto $(-5, 6)$ y otro en el $(2, 3)$. ¿Qué distancia hay entre ellos si las unidades de la carta corresponden a millas náuticas?

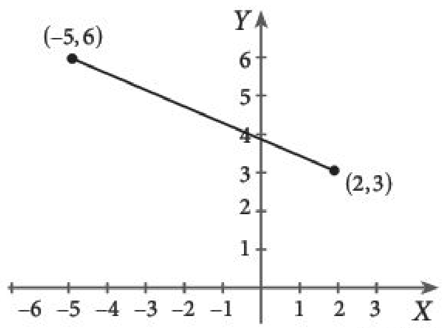


Figura 1.9

Solución:

Localizamos los puntos $(-5, 6)$ y $(2, 3)$ en el plano cartesiano y los unimos con una recta (figura 1.9). Luego construimos el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el segmento que une los puntos $(-5, 6)$ y $(2, 3)$, como se muestra en la figura 1.10.

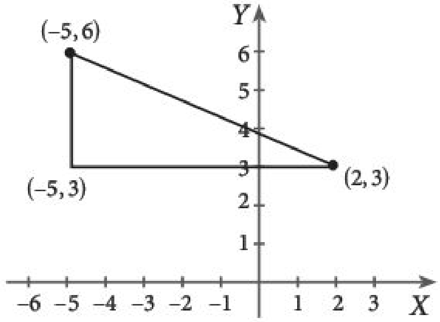


Figura 1.10

La milla náutica es una unidad de longitud que se utiliza en la navegación marítima y aérea. En 1929 se estableció que una milla náutica equivalía a 1.852 kilómetros. Originalmente, su magnitud estaba relacionada con las dimensiones de la Tierra, en particular con la longitud de un arco de un minuto de un meridiano terrestre. La velocidad de los barcos se mide en nudos. Un nudo es una milla náutica por hora.

Las longitudes de los catetos son:

$$|2-(-5)|=7 \text{ y } |3-6|=3.$$

Recordemos que el teorema de Pitágoras establece: "en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". Por tanto:

$$\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}\approx 7.6.$$

Los dos barcos se encuentran a una distancia aproximada de 7.6 millas náuticas.

Para conocer la distancia en kilómetros multiplicamos por 1.852:

$$7.6\,(1.852)=14.0752$$

Al segmento que une los puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ lo denotamos con PQ; y también usamos esta notación para su *longitud*; el contexto nos indicará su uso. Para calcular la longitud del segmento PQ, procedemos como el ejemplo anterior sugiere y llegamos a la siguiente fórmula:

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

La distancia entre dos puntos P y Q es siempre mayor o igual que cero, es decir, $d\,(P,Q)\geq 0$.

Observa que si los puntos están alineados vertical u horizontalmente, uno de los dos sumandos de la fórmula anterior será igual a cero, lo cual no la invalida. A la longitud del segmento PQ se le conoce como *distancia* de P a Q, que se denota también con $d(P,Q)$, por lo que:

$$\boxed{d(P,Q)=PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.} \tag{1.1}$$

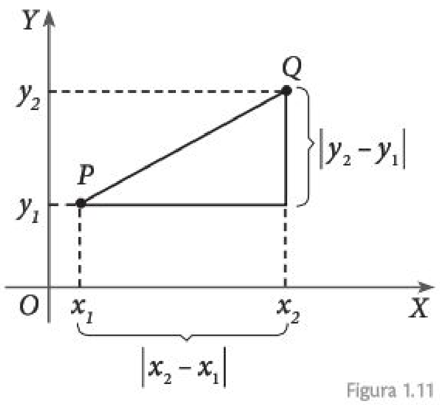


Figura 1.11

Justificamos esta fórmula del modo que nos sugiere el ejemplo que introduce este apartado: supongamos que los puntos P y Q no están en una misma recta vertical u horizontal y construyamos un triángulo rectángulo que tenga al segmento PQ por hipotenusa, como muestra la figura 1.11; las longitudes de sus catetos son $|x_2-x_1|$ y $|y_2-y_1|$.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras, tenemos que la distancia entre los puntos es:

$$PQ^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2.$$

Por las propiedades del valor absoluto sabemos que:

$$|a|^2=a^2 \text{ para cualquier número real } a,$$

por lo que tenemos:

$$PQ^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

y

$$PQ = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Ejemplos

1. Encontrar la distancia entre $P(3,5)$ y $Q(-1,6)$.

Solución:
Sustituimos las coordenadas de P y Q en la fórmula (1.1) y obtenemos:

$$d\left(P,Q\right) = \sqrt{\left(\left(-1\right)-3\right)^2 + \left(6-5\right)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

Observamos que no importa el orden en que tomemos los puntos.

$$d\left(P,Q\right) = \sqrt{\left(3-\left(-1\right)\right)^2 + \left(5-6\right)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

2. Encontrar la longitud del segmento que une los puntos $P(-3,-4)$ y $Q(-3,2)$.

Solución:

$$PQ = \sqrt{\left(\left(-3\right)-\left(-3\right)\right)^2 + \left(2-\left(-4\right)\right)^2} = \sqrt{0+36} = 6.$$

3. Hallar las coordenadas del punto $C(x,y)$ ubicado en el eje X que equidista de $A(0,6)$ y de $B(5,1)$.

Que un punto C equidiste de A y B significa que $d(C,A) = d(C,B)$.

Solución:
Como C está sobre el eje X, su coordenada y u ordenada es igual a 0. Sin embargo, nos falta determinar el valor de su abscisa, es decir, x. Como la distancia de $C(x, 0)$ a A debe ser igual a la distancia de C a B, entonces:

$$d\left(C,A\right) = d\left(C,B\right).$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos:

$$\sqrt{\left(x-0\right)^2 + \left(0-6\right)^2} = \sqrt{\left(x-5\right)^2 + \left(0-1\right)^2}.$$

Al efectuar las operaciones que se encuentran en los radicales, obtenemos:

$$\sqrt{x^2+36} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 1}.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación y encontramos el valor de x:

$$\begin{aligned} x^2+36 &= x^2-10x+25+1 \\ 10x &= -10 \\ x &= -1, \end{aligned}$$

entonces, el punto del eje X que equidista de A y de B es $C(-1,0)$ (figura 1.12).

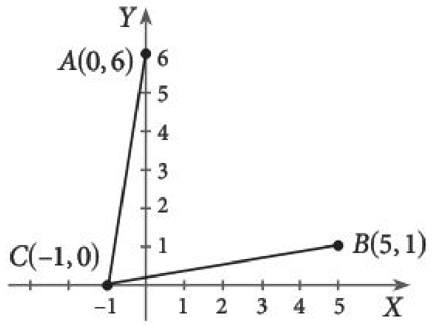


Figura 1.12

Para verificar que el punto C equidista de A y de B, calculamos la distancia de C a cada uno de estos puntos:

$$d(C,A)=\sqrt{(0-(-1))^2+(6-0)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}.$$
$$d(C,B)=\sqrt{(5-(-1))^2+(1-0)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}.$$

4. Encontrar el punto $P(x,y)$ que equidista de $A(0,1)$, $B(-6,9)$ y $C(2,5)$.

Solución:
El punto P debe satisfacer:

$$d(A,P)=d(B,P)=d(C,P),$$

es decir,

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+6)^2+(y-9)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Primero resolvemos:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+6)^2+(y-9)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2y+1 &= x^2+12x+36+y^2-18y+81 \\ -12x+16y &= 116, \end{aligned}$$

dividiendo entre 4:

$$\boxed{-3x+4y=29.} \qquad (1.2)$$

Ahora resolvemos:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando:

$$x^2+y^2-2y+1=x^2-4x+4+y^2-10y+25$$
$$4x+8y=28,$$

dividiendo entre 4:

$$\boxed{x+2y=7.} \qquad (1.3)$$

Por último, resolvemos simultáneamente el sistema formado por las ecuaciones (1.2) y (1.3):

$$-3x+4y=29$$
$$x+2y=7.$$

Multiplicamos por 3 la segunda ecuación y obtenemos:

$$-3x+4y=29$$
$$3x+6y=21.$$

Sumando ambas ecuaciones y simplificando, tenemos:

$$10y=50$$
$$y=5.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1.3), obtenemos que:

$$x=-3.$$

Así, el punto P que equidista de A, B y C tiene las coordenadas $(-3,5)$ (figura 1.13).

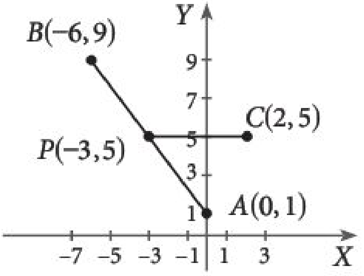


Figura 1.13

Comprobación:
Los puntos son $A(0,1)$, $B(-6,9)$, $C(2,5)$ y $P(-3,5)$:

$$d(A,P)=\sqrt{(-3-0)^2+(5-1)^2}=5.$$
$$d(B,P)=\sqrt{(-3-(-6))^2+(5-9)^2}=5.$$
$$d(C,P)=\sqrt{(-3-2)^2+(5-5)^2}=5.$$

Ejemplos

Ejercicios

Localiza los siguientes puntos en el plano coordenado.

1. $P(1,4)$.
2. $P(1,-2)$.
3. $P(-4,3)$.
4. $P(2,5)$.
5. $P(0,-6)$.
6. $P(-3,-2)$.
7. $P(5,0)$.
8. $P(-7,0)$.
9. $P(0,3)$.
10. $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
11. $P\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$.
12. $P\left(-\frac{4}{5},\frac{4}{5}\right)$.

Encuentra la distancia entre los dos puntos dados.

13. $P(7,1)$ y $Q(2,3)$.
14. $P(4,8)$ y $Q(7,3)$.
15. $P(1,1)$ y $Q(-8,-5)$.
16. $P(0,4)$ y $Q(3,0)$.
17. $P(-2,-2)$ y $Q(7,1)$.
18. $P(5,3)$ y $Q(3,5)$.
19. $P(6,2)$ y $Q(8,5)$.
20. $P(-4,3)$ y $Q(0,0)$.
21. $P\left(2\sqrt{2},\sqrt{7}\right)$ y $Q\left(\sqrt{2},0\right)$.
22. $P(3,9)$ y $Q(7,-1)$.
23. $P(-6,0)$ y $Q(0,6)$.
24. $P\left(\sqrt{3},5\right)$ y $Q\left(5\sqrt{3},\sqrt{5}\right)$.

25. ¿Qué coordenadas tiene el punto del eje Y que equidista de $A(5,5)$ y de $B(4,2)$? ¿Qué tipo de triángulo forman estos tres puntos?
26. ¿Qué coordenadas tiene el punto del eje X que equidista de $A(-3,-2)$ y de $B(4,5)$? ¿Qué tipo de triángulo forman estos tres puntos?
27. ¿Cuál es la ordenada del punto de abscisa -1 que equidista de los puntos $A(6,8)$ y $B(-3,4)$?
28. ¿Cuál es la abscisa del punto cuya ordenada es $\frac{1}{2}$ y que equidista de los puntos $A(-1,0)$ y $B\left(\frac{5}{2},-3\right)$?

En los ejercicios 29 a 32 localiza los puntos dados. Dibuja el triángulo formado con esos puntos como vértices y calcula las longitudes de sus lados.

29. $A(-3,6)$, $B(-4,3)$ y $C(4,7)$.
30. $A(-1,2)$, $B(6,2)$ y $C(-2,-3)$.
31. $A(-2,-1)$, $B(5,-2)$ y $C(3,1)$.
32. $A(0,0)$, $B(2,4)$ y $C(8,5)$.

33. Prueba que el triángulo con vértices $A(2,5)$, $B(4,-1)$ y $C(6,5)$ es isósceles.
34. Prueba que el cuadrilátero cuyos vértices son $A(1,-4)$, $B(4,5)$, $C(1,6)$ y $D(-2,-3)$ es un rectángulo. Recuerda que en un rectángulo las diagonales son iguales.

En los ejercicios 35 a 38 encuentra el punto $P(x,y)$ que equidista de los puntos dados.

35. $A(0,-2)$, $B(4,0)$ y $C(4,4)$.
36. $A(3,0)$, $B(-7,0)$ y $C(3,-6)$.
37. $A(-4,-5)$, $B(2,4)$ y $C(6,-3)$.
38. $A(-8,1)$, $B(5,-4)$ y $C(1,2)$.

Segmentos dirigidos

Si P y Q son dos puntos distintos en el plano, el segmento PQ puede concebirse como el resultado de un movimiento rectilíneo de P hacia Q, o bien de Q hacia P. Desde este punto de vista podemos hacer una distinción entre sus extremos: uno es el *extremo inicial*; el otro, el *extremo final* (figuras 1.14 y 1.15).

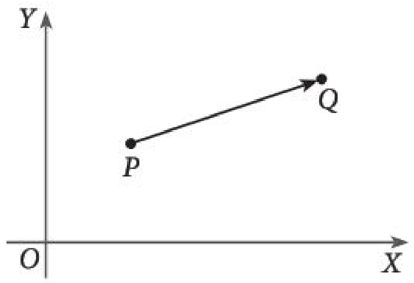


Figura 1.14

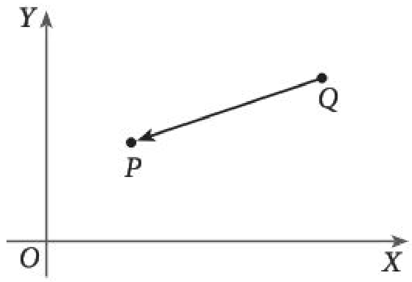


Figura 1.15

Cuando en un segmento se hace tal distinción entre sus extremos, entonces se dice que el segmento "está *dirigido* u *orientado*", y escribimos $\overrightarrow{PQ}$ si P es el extremo inicial y Q el final.

Por tanto, un segmento PQ da lugar a los dos segmentos dirigidos:

$$\overrightarrow{PQ} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{QP},$$

el primero con extremo inicial P y el segundo con extremo inicial Q.

Por supuesto, la longitud de un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es la misma que la del segmento PQ sin dirigir y, por tanto, la denotamos igual que antes por PQ. Es decir, la longitud de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ es PQ.

De acuerdo con lo que vimos en el apartado anterior, si $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ son dos puntos en el plano, entonces:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Observación:

En el caso en que $P = Q$, los segmentos PQ, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ constan de un solo punto, tienen longitud cero y se denominan *segmentos nulos*.

Dos segmentos dirigidos no nulos pertenecientes a la misma recta pueden tener la *misma dirección* o *dirección opuesta* (figura 1.16).

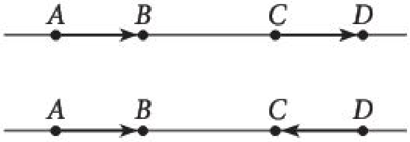


Figura 1.16

La longitud de un segmento es la distancia entre sus extremos.

Un segmento $\overline{PQ}$ es no nulo si $P \neq Q$.

Ejemplos

1. Dados $P(1,2)$, $Q(3,6)$ y $R(2,4)$, determinar lo siguiente:

a. Si $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ tienen la misma dirección o dirección opuesta.

b. La longitud de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$.

Solución:

a. Si trazamos los segmentos dirigidos, vemos que apuntan en direcciones opuestas, por tanto, tienen dirección opuesta (figura 1.17).

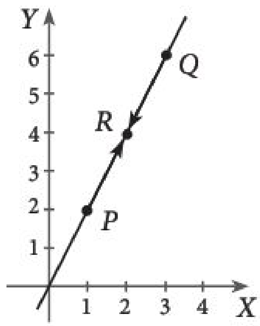


Figura 1.17

b. La longitud del segmento dirigido $\overrightarrow{PR}$ es:

$$PR = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

La longitud del segmento dirigido $\overrightarrow{QR}$ es:

$$QR = \sqrt{(2-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

2. Si se toma un punto R en la recta que contiene al segmento dirigido no nulo $\overrightarrow{PQ}$, ¿cómo debe estar ubicado R para que se cumplan las siguientes condiciones?

a. Que $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tengan la misma dirección.

b. Que $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tengan direcciones contrarias.

c. Que $\overrightarrow{PR}$ o $\overrightarrow{RQ}$ sean nulos.

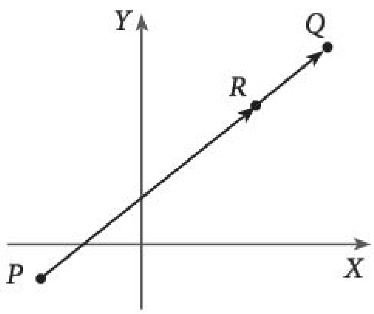


Figura 1.18

Solución:
Con base en la figura 1.18, podemos determinar lo siguiente:

a. $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tienen la misma dirección cuando R se ubica entre los extremos del segmento $\overrightarrow{PQ}$, es decir, cuando R está entre P y Q (figura 1.18).

b. $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{RQ}$ tienen direcciones contrarias cuando R está fuera del segmento PQ (figuras 1.19 y 1.20).

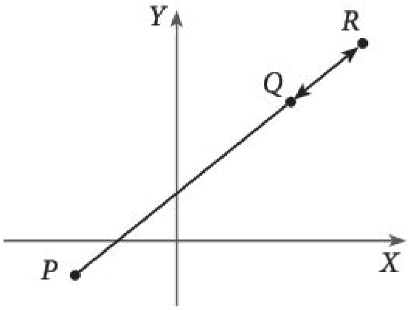


Figura 1.19

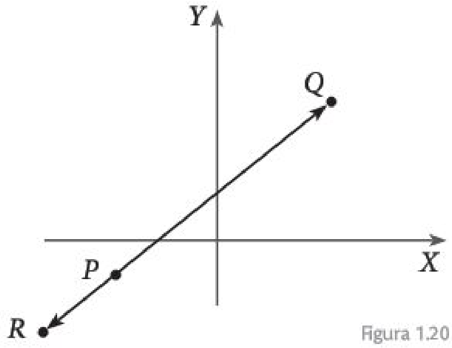


Figura 1.20

c. $\overrightarrow{PR}$ o $\overrightarrow{RQ}$ son nulos cuando R coincide con P o Q, respectivamente (figuras 1.21 y 1.22).

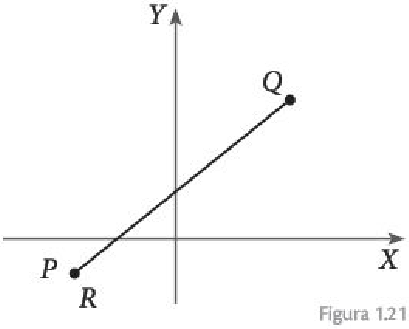


Figura 1.21

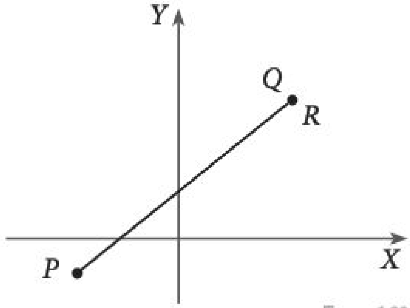


Figura 1.22

Ejemplos

División de un segmento

Punto medio de un segmento

Si dos vértices opuestos de un cuadrado tienen coordenadas $(-2,-1)$ y $(2,-1)$, ¿cuáles son las coordenadas de su centro?

Solución:

El segmento que une los puntos $(-2,-1)$ y $(2,-1)$ es una diagonal del cuadrado, de manera que el punto medio de dicho segmento coincide con el centro del cuadrado (figura 1.23).

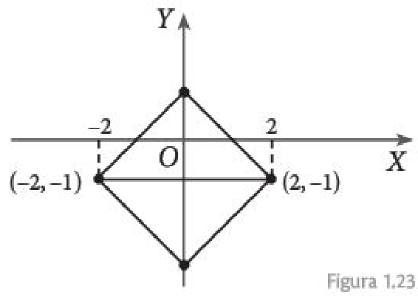


Figura 1.23

Dado que los dos puntos tienen la misma ordenada, podemos deducir que la diagonal del cuadrado es un segmento horizontal. Por lo tanto, la ordenada del punto medio será igual a -1 y la abscisa igual al promedio de las abscisas de los vértices que determinan la diagonal:

$$\frac{-2+2}{2}=0,$$

es decir, el centro del cuadrado tiene coordenadas $(0,-1)$.

Para generalizar, consideremos dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. Deseamos encontrar las fórmulas para determinar las coordenadas (a, b) del *punto medio M del segmento PQ.*

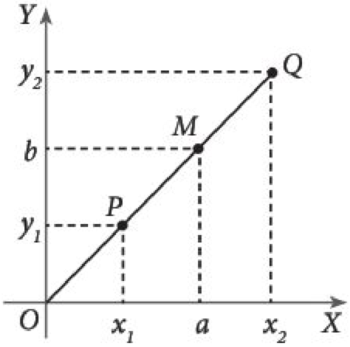


Figura 1.24

En la figura 1.24, observamos que las proyecciones de los puntos P, M y Q sobre el eje X tienen asociados los números x_1, a y x_2, respectivamente. La proyección de M es el punto medio del segmento que determinan las proyecciones de P y Q. Así, a es el promedio de x_1 y x_2:

$$a=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

De manera análoga, b es el promedio de y_1 y y_2:

$$b=\frac{y_1+y_2}{2},$$

por lo que:

$$\boxed{M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)} \tag{1.4}$$

es el punto medio del segmento que une $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$.

Ejemplos

1. Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une $P(3,1)$ y $Q(9,1)$.

Solución:
Sustituimos los valores de las coordenadas de P y Q en la fórmula (1.4). El punto medio del segmento PQ es:

$$M\left(\frac{3+9}{2},\frac{1+1}{2}\right)=M(6,1).$$

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ es el punto medio del segmento cuyos extremos son $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$.

2. Si el extremo de un segmento es el punto $P\left(-6,\frac{1}{3}\right)$ y el punto medio de dicho segmento es $M(1,2)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?

Solución:
Las coordenadas del punto medio son:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Si sustituimos los valores del extremo conocido y del punto medio tenemos:

$$1=\frac{-6+x_2}{2} \quad \text{y} \quad 2=\frac{\frac{1}{3}+y_2}{2}.$$

Al resolver las ecuaciones para encontrar los valores de x_2 y y_2, obtenemos:

$$x_2=8 \quad \text{y} \quad y_2=\frac{11}{3}.$$

El extremo buscado es $Q\left(8,\frac{11}{3}\right)$.

Razón aritmética de segmentos. Razón algebraica de segmentos dirigidos

En una carrera entre Aquiles y una tortuga, después de un minuto, Aquiles ha recorrido 500 metros, mientras que la tortuga sólo ha recorrido 5 metros. ¿Cuál es la razón entre la longitud recorrida por Aquiles y la longitud recorrida por la tortuga (figura 1.25)?

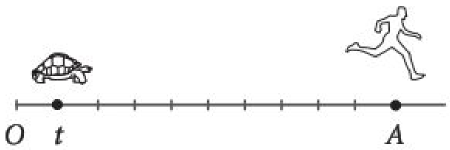


Figura 1.25

Solución:
La razón es:

$$\frac{500}{5} = 100.$$

Esto significa que el segmento recorrido por Aquiles es 100 veces mayor que el segmento recorrido por la tortuga.

Cuando los segmentos PQ y RS están en una misma recta, con $R \neq S$, la *razón aritmética* PQ a RS se define como el cociente de las longitudes respectivas, es decir, como:

$$\frac{PQ}{RS}.$$

Este cociente sólo toma en consideración el tamaño de los segmentos. A esta razón se le llama *aritmética* para distinguirla de la *razón entre segmentos dirigidos*, la cual presentaremos a continuación, y es llamada también *razón algebraica de segmentos.*

Para dos segmentos dirigidos cualesquiera $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$, contenidos en una misma recta, con $R \neq S$, la *razón algebraica* o *razón entre segmentos dirigidos* se define como

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}} = \pm \frac{PQ}{RS},} \tag{1.5}$$

donde se elige el signo $+$ si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma dirección y el signo $-$ si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen direcciones contrarias. Cuando $\overrightarrow{PQ}$ es un segmento nulo es indistinto el signo que usemos, pues el resultado es 0 con cualquier elección.

Cuando resulta claro que se trabaja con razones entre segmentos dirigidos, se acostumbra simplificar la escritura suprimiendo las flechas; en ese caso, la dirección del segmento queda determinada por el orden en que se escriben sus extremos. Así, por ejemplo, escribiremos $\frac{PQ}{RS}$, en lugar de $\frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{RS}}$. Con esta convención, la definición (1.5) de razón algebraica o entre segmentos dirigidos se escribe como:

$$\frac{PQ}{RS} = \pm \text{ razón aritmética } \frac{PQ}{RS},$$

donde la elección del signo $+$ o $-$ se realiza como indicamos anteriormente. *En el siguiente apartado expresaremos de este modo la razón entre segmentos dirigidos.*

Ejemplos

1. Encontrar las razones algebraicas:

$$\frac{PQ}{RS},\ \frac{PQ}{SR},\ \frac{QP}{RS}\ \text{y}\ \frac{QP}{SR},$$

si P, Q, R y S son los puntos del eje X que corresponden a los números 2, 5, -1 y 7, respectivamente (figura 1.26).

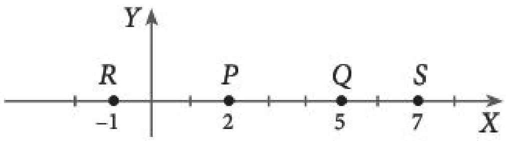


Figura 1.26

Solución:
Tenemos la siguiente razón aritmética:

$$\frac{PQ}{RS}=\frac{|5-2|}{|7-(-1)|}=\frac{3}{8}.$$

Los segmentos dirigidos PQ y RS tienen la misma dirección, y lo mismo sucede con QP y SR. En tanto que PQ y SR tienen direcciones contrarias, al igual que QP y RS. Por tanto, las razones algebraicas buscadas son:

$$\frac{PQ}{RS}=\frac{QP}{SR}=\frac{3}{8}\ \text{y}\ \frac{PQ}{SR}=\frac{QP}{RS}=-\frac{3}{8}.$$

2. Explicar por qué se tiene la siguiente igualdad entre razones algebraicas:

$$\frac{PQ}{RS}=-\frac{QP}{RS},$$

si se considera que PQ y RS son dos segmentos dirigidos en una recta, con $R\neq S$.

Solución:
Tenemos que:

$$\frac{PQ}{RS}=\pm\,\text{razón aritmética}\,\frac{PQ}{RS}\quad \text{y}\quad \frac{QP}{RS}=\pm\,\text{razón aritmética}\,\frac{PQ}{RS}.$$

Si PQ es el segmento nulo, también lo es QP, y entonces las razones algebraicas cumplen:

$$\frac{PQ}{RS}=0=-\frac{QP}{RS}.$$

Ejemplos

Cuando PQ no es un segmento nulo, entonces los segmentos dirigidos PQ y QP tienen direcciones contrarias; por tanto, sólo la dirección de uno de ellos puede coincidir con la de RS, entonces el signo a escoger para $\frac{QP}{RS}$ es el contrario al elegido para $\frac{PQ}{RS}$ (figura 1.27).

Figura 1.27

Si los puntos P, Q, R y S están ubicados en la recta real y p, q, r y s son los números asociados a ellos, respectivamente, entonces podemos calcular la razón algebraica $\frac{PQ}{RS}$ de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{PQ}{RS}=\frac{q-p}{s-r},} \tag{1.6}$$

es decir, tanto en el numerador como en el denominador se resta el valor del extremo final menos el valor del extremo inicial, independientemente de cuál sea mayor.

Ejemplo

1. Resolver nuevamente el ejemplo 1 de la página 18: encontrar las razones algebraicas:

$$\frac{PQ}{RS},\ \frac{PQ}{SR},\ \frac{QP}{RS}\ \text{y}\ \frac{QP}{SR},$$

si P, Q, R y S son los puntos del eje X que corresponden a los números 2, 5, −1 y 7, respectivamente (figura 1.28).

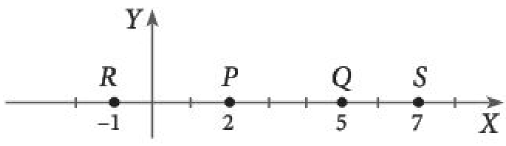


Figura 1.28

Solución:

$$\frac{PQ}{RS}=\frac{5-2}{7-(-1)}=\frac{3}{8};\ \frac{QP}{SR}=\frac{2-5}{-1-7}=\frac{3}{8};\ \frac{PQ}{SR}=\frac{5-2}{-1-7}=-\frac{3}{8};\ \frac{QP}{RS}=\frac{2-5}{7-(-1)}=-\frac{3}{8},$$

que son los mismos resultados que habíamos obtenido anteriormente.

División de un segmento en una razón dada

Pensemos que tenemos una pista recta de 100 metros de largo. Llamemos P al punto inicial, Q al punto final y R al punto donde se encuentra un corredor. Supongamos que el corredor ha recorrido 30 metros. ¿En qué razón divide R la pista?

Solución:
Consideremos la razón buscada como el cociente del segmento dirigido PR ya recorrido y el segmento dirigido RQ que falta por recorrer:

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}.$$

Decimos que R divide la pista en la razón $r = \frac{3}{7}$.

Observaciones:
- Cuando el corredor no ha iniciado su carrera, R divide la pista en la razón 0.
- Cuando el corredor va a la mitad de la pista, R la divide en la razón 1.
- Conforme el corredor se acerca a la meta, R divide la pista en una razón cada vez más grande, pues RQ es cada vez más pequeño (figura 1.29).

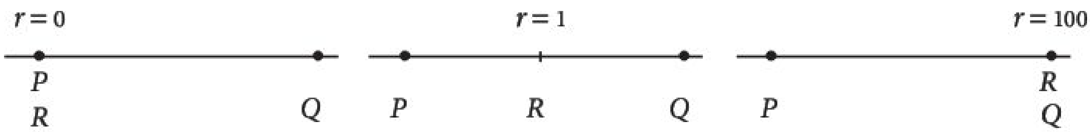


Figura 1.29

Tomemos un punto $R \neq Q$ en la recta que contiene el segmento dirigido no nulo PQ. *La razón en que R divide PQ* se define como la siguiente razón algebraica o de segmentos dirigidos:

$$\boxed{r = \frac{PR}{RQ}.} \tag{1.7}$$

Entonces decimos que R *divide el segmento PQ en la razón algebraica r.*

Más adelante veremos que si $r \neq -1$, entonces hay un único punto que divide un segmento dado en la razón r.

De acuerdo con lo anterior, el punto medio M de un segmento $\overrightarrow{PQ}$ lo divide en la razón 1, ya que:

$$PM = MQ;$$

y además, PM y MQ tienen la misma dirección, así que:

$$\frac{PM}{MQ} = 1.$$

Cabe mencionar que otros autores usan un cociente distinto al que aparece en (1.7) para definir la razón en que un punto divide un segmento (ver el ejercicio 10 de los ejercicios de repaso en la página 28).

Observaciones:
El signo de la razón algebraica $\frac{PR}{RQ}$ depende de cómo se comparan las direcciones de PR y RQ. Por esto, y de acuerdo con el ejemplo 2 de la página 14, tenemos:

- $\frac{PR}{RQ} \geq 0$ sólo cuando R está en el segmento PQ.
- $\frac{PR}{RQ} = 0$ sólo cuando R coincide con P.
- $\frac{PR}{RQ} < 0$ sólo cuando R no pertenece al segmento PQ.
- R no puede dividir PQ en la razón $r = -1$, ya que entonces debería de satisfacerse que:

$$PR = RQ$$

y R ubicarse fuera del segmento PQ, y estas dos condiciones son incompatibles, pues si R está fuera de PQ (figuras 1.30 y 1.31) entonces:

$$PR = PQ + RQ > |RQ|$$

si R está más cerca de Q que de P y, en caso contrario,

$$RQ = PQ + RP > |PR|.$$

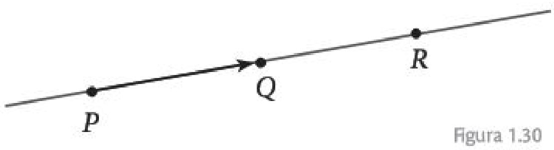


Figura 1.30

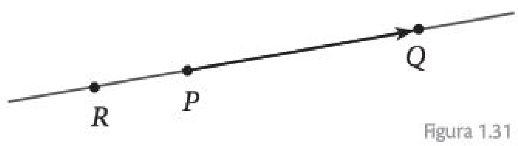


Figura 1.31

Para evitar la exclusión de la razón $r = -1$, algunos autores establecen la convención de que el punto al infinito divide el segmento en razón -1, sin embargo, nosotros no la adoptaremos.

Fórmula para el punto de división de un segmento

Tomemos dos puntos $P(5,0)$ y $Q(9,0)$ en el eje X y la razón $r = -2$. Busquemos el punto R que divide el segmento PQ en la razón r.

Solución:
Buscamos el punto R que satisfaga:

$$-2 = \frac{PR}{RQ}.$$

El punto $R\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)$, cuando $r \neq -1$, es el único punto que divide en la razón r el segmento que une $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

Llamemos z a la abscisa de R. De la ecuación (1.6) tenemos que:

$$-2 = \frac{PR}{RQ} = \frac{z-5}{9-z},$$

por tanto, debemos resolver:

$$-2 = \frac{z-5}{9-z},$$

por lo que despejando z:

$$z = 13.$$

El punto medio de un segmento lo divide en la razón $r = 1$.

Es decir, $R(13, 0)$ divide el segmento PQ en la razón -2, como podemos comprobar:

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{13-5}{9-13} = \frac{8}{-4} = -2.$$

Consideremos $r \neq -1$. El punto:

$$\boxed{R\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)} \tag{1.8}$$

es el único punto que divide en la razón r el segmento PQ, cuyos extremos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, es decir, ese punto R es el único que satisface la igualdad

$$\frac{PR}{RQ} = r.$$

Ejemplos

1. Encontrar las coordenadas del punto R que divide el segmento PQ, con extremos $P(-4, 1)$ y $Q(8, 5)$, en la razón 3 a 5. Es decir, $\frac{PR}{RQ} = \frac{3}{5}$.

   Solución:
   Al sustituir los datos en la fórmula (1.8) obtenemos:

   $$\frac{x_1+rx_2}{1+r} = \frac{-4+\frac{3}{5}\cdot 8}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{y_1+ry_2}{1+r} = \frac{1+\frac{3}{5}\cdot 5}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}.$$

   Por lo que el punto buscado es $R\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

2. Encontrar las coordenadas del punto R que divide el segmento dirigido PQ, con extremos $P(6, -2)$ y $Q(7, 5)$, en la razón $\frac{5}{7}$.

Solución:
Al sustituir los datos en la fórmula (1.8) obtenemos:

$$\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{6+\frac{5}{7}\cdot 7}{1+\frac{5}{7}}=\frac{77}{12} \quad \text{y} \quad \frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{-2+\frac{5}{7}\cdot 5}{1+\frac{5}{7}}=\frac{11}{12}.$$

Por lo que el punto buscado es $R\left(\frac{77}{12},\frac{11}{12}\right)$.

3. ¿En qué razón divide el punto R de coordenadas $(-4,-7)$ el segmento dirigido PQ que une los puntos $P(-2,-3)$ y $Q(1,3)$?

Solución:
Como R está fuera del segmento dirigido PQ y del lado de P, entonces $PR<0$ y $RQ>0$ (figura 1.32). De donde:

$$\frac{PR}{RQ}=\frac{-\sqrt{(-2+4)^2+(-3+7)^2}}{\sqrt{(-4-1)^2+(-7-3)^2}}=\frac{-\sqrt{20}}{\sqrt{125}}=\frac{-2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}.$$

La razón es $-\frac{2}{5}$.

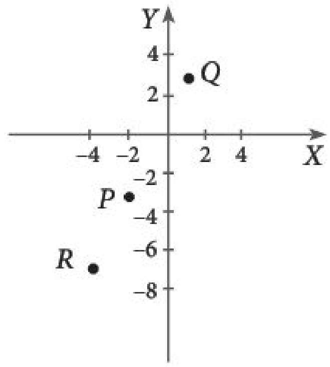


Figura 1.32

4. Hallar las coordenadas del punto R en el segmento que une $P(3,3)$ y $Q(-1,-5)$, que divide PQ en la razón áurea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución:
Al sustituir los datos en la fórmula (1.8) obtenemos:

$$\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{3+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot(-1)}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$

y

$$\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot 5}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1-5\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.$$

Como

$$\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{20-8\sqrt{5}}{4}=5-2\sqrt{5}$$

y

$$\frac{1-5\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{\left(1-5\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{28-16\sqrt{5}}{4}=7-4\sqrt{5},$$

tenemos que el punto buscado es $R\left(5-2\sqrt{5},7-4\sqrt{5}\right)$.

5. ¿En qué punto se debe situar un soporte para que al colocar un peso de 6 kilogramos en el lado izquierdo y otro de 15 kilogramos en el lado derecho de una tabla de 5 metros de largo esta permanezca equilibrada (figura 1.33)?

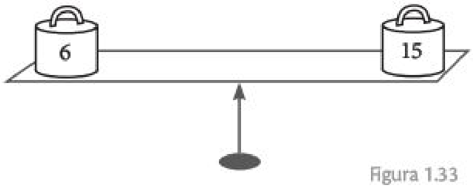


Figura 1.33

Solución:
Por comodidad, supongamos que el extremo izquierdo de la tabla se encuentra en el origen; entonces el extremo derecho se encuentra en el punto de coordenadas $(5,0)$. Para conservar la notación, llamamos a estos puntos $P(0,0)$ y $Q(5,0)$ (figura 1.34).

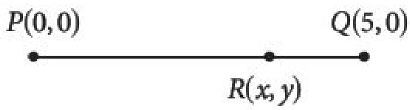


Figura 1.34

Si $R(x,y)$ es el punto en el que debemos colocar el soporte, entonces, por la ley de las palancas, debe cumplirse que:

$$6\,PR = 15\,RQ,$$

es decir,

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.$$

Así,

$$R\left(\frac{\frac{5}{2}\cdot 5}{1+\frac{5}{2}},0\right) = R\left(\frac{25}{7},0\right).$$

Por tanto, el soporte debe colocarse a $\frac{25}{7}$ m ≈ 3.57 m del extremo izquierdo de la tabla.

Ejemplos

Pensamiento crítico

Si un punto divide un segmento en la razón $\frac{1}{2}$, entonces ¿el punto está colocado a la mitad del segmento?

Ejercicios

Encuentra el punto medio del segmento que une los pares de puntos dados.

1. $(-1,-2)$ y $(2,2)$.
2. $(-2,5)$ y $(-7,5)$.
3. $(3,6)$ y $(6,1)$.
4. $(-3,-1)$ y $(-3,-8)$.
5. $(-4,2)$ y $(2,6)$.
6. $(7,1)$ y $(-5,7)$.
7. $\left(\frac{1}{6},3\right)$ y $\left(-2,\frac{3}{4}\right)$.
8. $(6,-3)$ y $\left(\frac{2}{5},8\right)$.
9. $\left(-2,\frac{5}{8}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)$.
10. Si el extremo de un segmento es el punto $P(3,-4)$ y el punto medio de dicho segmento es $M(-2,-1)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?
11. Si $P\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $Q\left(\frac{11}{2},5\right)$ son los extremos de un segmento, encuentra lo siguiente:
    a. Las coordenadas del punto $R_1(a_1,b_1)$ que divide el segmento dirigido PQ en la razón $\frac{1}{2}$.
    b. Las coordenadas del punto $R_2(a_2,b_2)$ que divide el segmento dirigido PQ en la razón 2.
    c. La prueba de que los puntos R_1 y R_2 dividen el segmento dirigido PQ en tres segmentos de igual longitud.
12. Halla las coordenadas del punto R que divide en la razón $\frac{7}{4}$ el segmento dirigido PQ con extremos $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $Q(2,5)$.
13. Encuentra las coordenadas de los puntos R, S y T que dividen el segmento dirigido PQ, con extremos $P(-5,-2)$ y $Q(-1,6)$, en cuatro segmentos de igual longitud.
14. Encuentra las coordenadas del punto R que divide el segmento dirigido PQ, con extremos $P(-4,0)$ y $Q(0,6)$, en la razón $\frac{1}{6}$.
15. Un triángulo tiene vértices $A(0,3)$, $B(-1,1)$ y $C(3,2)$. Calcula las coordenadas del punto medio M del segmento que une los vértices B y C y la longitud del segmento que une los puntos A y M. Comprueba que la recta que pasa por A y M es una de las medianas del triángulo.
16. ¿En qué razón divide el punto de coordenadas $(-1,-7)$ el segmento dirigido PQ que une los puntos $P(-3,-15)$ y $Q(2,5)$?
17. Si $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $C(0,0)$ son los vértices de un triángulo equilátero, prueba que el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de sus lados es equilátero y que la longitud de su lado es igual a la mitad de la longitud del lado del triángulo dado.
18. El centro de un hexágono regular se encuentra en el origen; si uno de los vértices es el punto $A(5,0)$, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices restantes?
19. Al colgar un platito en cada extremo de una regla de 30 centímetros de largo formamos una balanza. Además, contamos con cierto número de monedas iguales entre sí y sabemos que, al colocar el punto de apoyo de la balanza en el centro de la regla, esta se encuentra equilibrada. ¿Dónde debemos colocar el punto de apoyo para que al poner cinco monedas en el plato izquierdo y tres en el derecho, la balanza se mantenga en equilibrio?

Mundo virtual

Geolab

Instala el programa que se incluye en el CD que acompaña este libro. Si el instalador no se ejecuta automáticamente, busca con el explorador de Windows el programa **setup.exe** y haz doble clic en él. Te sugerimos aceptar todas las opciones predeterminadas durante la instalación y realizar la práctica **Triángulo** para que te familiarices con este nuevo ambiente.

1. **Longitud de un segmento.** Construye dos puntos directos $A(-5,6)$ y $B(2,3)$. Abre el constructor de escalares. Del menú, elige *Escalares;* del submenú, *Distancia entre puntos*. Llama d a este escalar y da doble clic en A y en B para definirlo como la distancia entre A y B. En la pantalla de datos analíticos coloca el cursor en el renglón del escalar d y oprime el botón derecho del ratón; selecciona el ícono *Objetos para observar* —que se encuentra a la derecha, en la parte superior de la pantalla— y elige *Tabla de objetos*. Ve a la pantalla gráfica y notarás que d y su valor aparecen en la esquina izquierda. Arrastra cualquiera de los puntos y observa cómo cambia el valor de d en la ventana. Si quieres quitar de la pantalla gráfica los datos para observar, da clic en el ícono *Observación de datos*, en el menú emergente elige *Tabla de objetos* y en el submenú *Ocultar objetos seleccionados*.
2. **Punto medio de un segmento.** Construye los *Puntos directos* $A(-3,-5)$ $B(9,3)$. En el constructor de puntos, elige *Punto medio*. Llama P a dicho punto. Da doble clic en A y en B. En la pantalla de datos analíticos podrás ver inmediatamente el valor de sus coordenadas. Si oprimes la pestaña de *Datos cartesianos*, podrás ver las coordenadas de todos los puntos construidos.
3. **Razón en que un punto divide un segmento.** Si tres puntos están en una recta, Geolab puede encontrar la razón en que uno de ellos divide los otros dos. Comprueba el siguiente resultado:

   Si en un triángulo ABC una recta corta los lados AB y AC en dos puntos distintos, P y Q, y la recta es paralela al tercer lado BC, entonces:

   $$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}.$$

   Construcción:

   - Construye un triángulo con vértices A, B, C y llama a, b, c a los lados opuestos, respectivamente.
   - Ve a la pantalla de datos analíticos, haz clic sobre el renglón del segmento a, en la parte superior de la pantalla aparecerán nuevas opciones. Haz clic en Nombre. Ve a la pantalla gráfica y observa que el segmento ya tiene etiqueta. Haz lo mismo con los segmentos b y c.
   - Utilizando el constructor de puntos, construye un punto P en el segmento AB, para ello elige del menú *Punto* la opción *Punto en segmento*.

- Usando el constructor de rectas, elige *Recta paralela*, llámala ℓ, y defínela de forma que sea paralela al lado a que pase por P.
- Con el constructor de escalares, elige *Escalares* y después *División de un segmento*. Construye la razón r en la que el punto P divide el segmento AB, es decir, $r=AP/PB$.
- Usando el constructor de puntos elige *Intersección de...* y después *Intersección de rectas*; llama Q al punto de intersección de las rectas ℓ y b.
- Repite el procedimiento para calcular la razón s en la que el punto Q divide el segmento AC, es decir, $s=AQ/QC$.
- Compara los valores de r y s.

4. **División de un segmento.** ¿En qué punto debe colocarse el soporte en una tabla de 5 metros de largo para que —colocando sobre ella un peso de 6 kilogramos en el lado izquierdo y otro de 15 kilogramos en el derecho— permanezca equilibrada?
    - Construye los puntos $P(0,0)$ y $Q(5,0)$.
    - Construye también los escalares $p=6$ y $q=15$ que representan los pesos en los puntos P y Q respectivamente. Construye el escalar calculado $r=q/p$.
    - Usando el constructor de puntos, elige *División de un segmento* y construye el punto R que divide el segmento PQ en la razón r. Modifica los valores de p y q, y observa cómo cambia la posición de R.

Geolab

Resumen de la unidad

- La distancia entre dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- El punto medio del segmento que une $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

- Fórmula para el punto de división de un segmento dirigido. El punto:

$R\left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)$, cuando $r \neq -1$ es el punto que divide en la razón r el segmento dirigido PQ, cuyos extremos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

Ejercicios de repaso

1. Encuentra un punto cuya abscisa es 5 y cuya distancia al punto $P(0, 8)$ es 13.
2. Encuentra un punto cuya ordenada es 3 y cuya distancia al punto $P(-5, 2)$ es 8.
3. Encuentra el punto que equidista de los puntos $A(-3, -4)$, $B(3, 14)$ y $C(9, 12)$.
4. Los vértices de un triángulo rectángulo son $A(-2, 1)$, $B(5, 8)$ y $C(-6, 5)$. Encuentra el punto medio de la hipotenusa y prueba que equidista de los tres vértices.
5. Si dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos $(-3, 2)$ y $(1, 2)$, encuentra el tercer vértice (hay dos soluciones).
6. Los vértices de un triángulo son $A(2, -1)$, $B(0, 3)$ y $C(6, 7)$. Encuentra el punto medio E de AB y el punto medio D de AC. Encuentra la longitud de ED y determina la relación entre esta longitud y la longitud del lado BC.
7. Si $P(-5, -6)$ y $Q(4, 1)$ son los extremos de un segmento, encuentra la razón r en la cual el punto $R\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ divide el segmento dirigido PQ.
8. Encuentra las coordenadas del punto R tal que la razón algebraica $\frac{PR}{PQ}$ es $\frac{5}{2}$, si $P\left(-6, -\frac{1}{7}\right)$ y $Q(-2, 4)$.
9. Encuentra las coordenadas del punto R que divide el segmento dirigido PQ, con extremos $P\left(-8, \frac{3}{5}\right)$ y $Q\left(-1, \frac{6}{7}\right)$, en la razón $\frac{1}{11}$.
10. Tomemos un punto R en la recta ℓ que contiene el segmento dirigido PQ. En algunos libros se dice que R divide PQ en la razón (algebraica) r, si:

$$\frac{PR}{PQ} = r.$$

Conforme a esta definición, si $r \geq 0$, entonces tenemos para la razón aritmética:

$$\frac{PR}{PQ} = r,$$

y R está en el rayo $\overrightarrow{PQ}$.

En tanto que si $r < 0$, entonces tenemos para la razón aritmética:

$$\frac{PR}{PQ} = -r,$$

y R está fuera del rayo $\overrightarrow{PQ}$.

Por tanto, según esta definición, el punto que divide el segmento dirigido PQ en la razón r es:

$$R\left(x_1 + r\left(x_2 - x_1\right), y_1 + r\left(y_2 - y_1\right)\right),$$

si los extremos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

a. Encuentra, usando esta definición, el punto que divide el segmento dirigido con extremo inicial $P(1,2)$ y extremo final $Q(5,-1)$ en la razón $\frac{1}{3}$.

b. Con esta definición, ¿en qué razón divide un segmento el punto medio de este? Compara tu respuesta con la obtenida en este apartado al usar la definición que ahí adoptamos (página 20).

Autoevaluación

1. Encuentra la distancia entre P y Q si $P(-2,6)$ y $Q(1,-3)$.
   a. $\sqrt{18}$.
   b. $\sqrt{90}$.
   c. $\sqrt{82}$.
   d. $\sqrt{10}$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 8.

2. ¿Cuál es la abscisa del punto cuya ordenada es 2, que equidista de los puntos $A(3,6)$ y $B(-1,-2)$?
   a. $x=1$.
   b. $x=3$.
   c. $x=\frac{3}{2}$.
   d. $x=6$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 9.

3. Si el extremo de un segmento es el punto $P(-1,5)$ y su punto medio es $M(2,4)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?
   a. $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.
   b. $Q\left(3, 3\right)$.
   c. $Q\left(-5, -3\right)$.
   d. $Q\left(5, 3\right)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 16.

4. ¿En qué razón divide el punto de coordenadas $(7,-7)$ el segmento dirigido PQ que une los puntos $P(5,-3)$ y $Q(3,1)$?
   a. $r=-2$.
   b. $r=-\frac{1}{2}$.
   c. $r=\frac{1}{2}$.
   d. $r=1$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 23.

5. Encuentra las coordenadas del punto R que divide el segmento dirigido PQ, con extremos $P(8,2)$ y $Q(-6,4)$, en la razón $\frac{5}{4}$.
   a. $R\left(-62, 12\right)$.
   b. $R\left(\frac{62}{9}, \frac{28}{9}\right)$.
   c. $R\left(\frac{2}{9}, \frac{28}{9}\right)$.
   d. $R\left(\frac{2}{9}, -\frac{4}{3}\right)$.

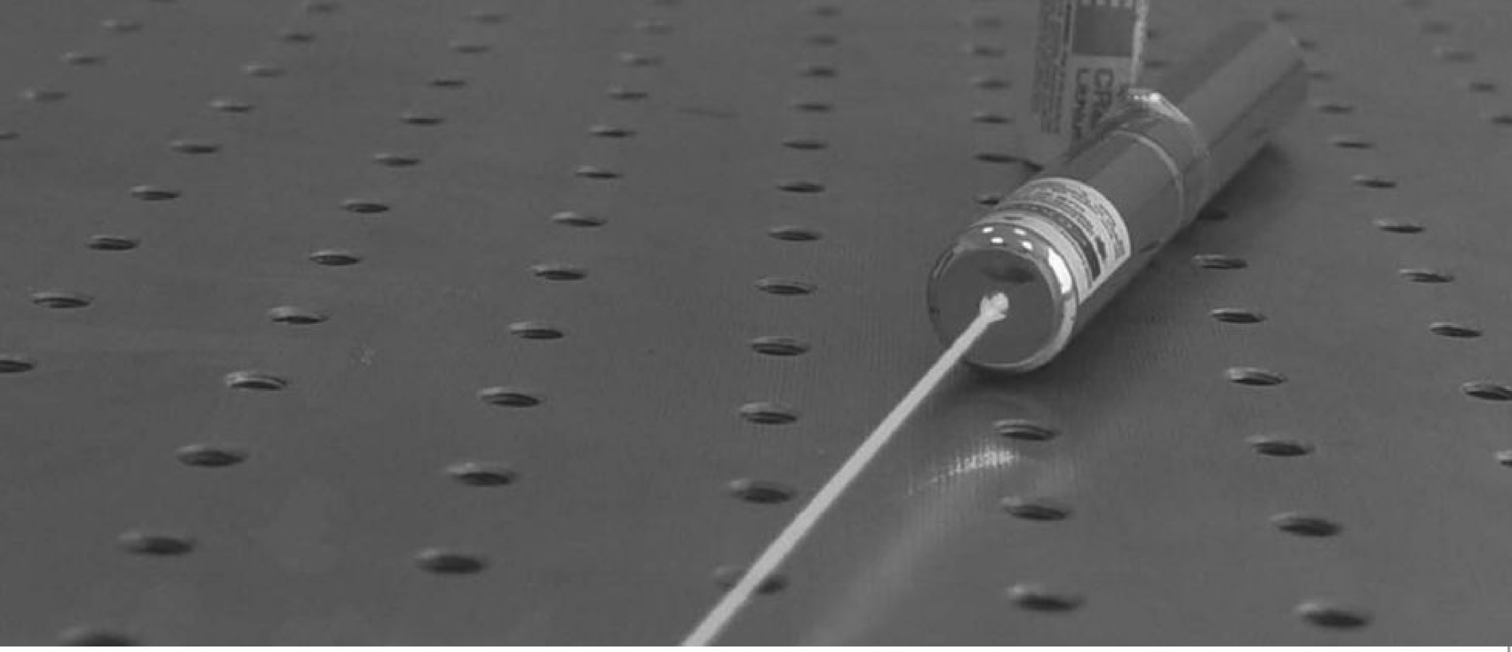
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 22.

Heteroevaluación

1. Si $P(5,4)$ y $Q(-8,1)$. Encuentra la distancia entre P y Q.

2. Si el extremo de un segmento es el punto $P(4,6)$ y el punto medio de dicho segmento es $M(3,-1)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?

3. ¿En qué razón divide el punto de coordenadas $R(-4,-11)$ el segmento dirigido PQ que une los puntos $P(0,5)$ y $Q(-3,-7)$?



Primer puntero láser azul modelo AT 473NM

Unidad 2 La línea recta

Las propiedades fundamentales de la recta, de acuerdo con los axiomas de Euclides, son:

- Por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta.
- Dos rectas distintas se cortan en un solo punto, o bien son paralelas.

Con esta unidad comenzamos el estudio sistemático de curvas en el plano. Para presentar la recta nos basamos en la idea intuitiva que tenemos de ella y la describimos algebraicamente por medio de su ecuación, la cual involucra, al igual que el resto de las que veremos más adelante, dos variables, generalmente denotadas por x y y.

La ecuación de una recta puede adoptar varias formas, algunas de las cuales reciben nombres especiales. Debe tenerse presente que no son varias las ecuaciones de una recta, sino una sola que es presentada en formas diversas, y que podemos pasar de una a otra mediante el manejo algebraico de las ecuaciones: despeje, multiplicación por constantes no nulas, etcétera.

Hay características que determinan una recta en particular; por ejemplo, hay una sola recta que cumple alguna de las siguientes condiciones:

- Tener una pendiente dada y pasar por un determinado punto.
- Tener una pendiente dada y cortar el eje Y en un cierto punto.
- Cortar los ejes coordenados en dos puntos dados, distintos entre sí.
- Pasar por dos puntos distintos.

La ecuación de una recta puede obtenerse si conocemos los elementos que intervienen en alguno de los enunciados anteriores.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

La línea recta

- Ángulo de inclinación de una recta con respecto al eje X. La pendiente de una recta
  - Cálculo de la pendiente cuando se conocen dos puntos de la recta
  - Uso de la calculadora para obtener una aproximación de α.
  - Cómo graficar la recta conociendo uno de sus puntos y su pendiente
- Ecuación de la recta conociendo uno de sus puntos y su pendiente
  - Forma punto-pendiente
  - Forma pendiente-ordenada al origen
- Ecuación de la recta conociendo dos de sus puntos
  - Rectas verticales
- Forma general de la ecuación de la recta
- Forma simétrica de la ecuación de la recta
- Intersección de rectas
  - Ángulo dos rectas
- Paralelismo y perpendicularidad
  - Relación entre las pendientes de rectas paralelas o perpendiculares
- Desigualdades y regiones del plano
  - Regiones del plano determinadas por rectas no verticales
  - Regiones del plano determinadas por rectas verticales
  - Punto de equilibrio
- Distancia de un punto a una recta
  - Distancia entre dos rectas paralelas
- Lados opuestos (semiplanos) respecto a una recta
  - Dos orientaciones de los lados de una recta
- Distancia dirigida de un punto a una recta
  - Coordenadas de un punto respecto a dos rectas ortogonales
- Bisectriz de un ángulo
- Ecuaciones paramétricas de una recta
- Resolución de problemas
  - Lugares geométricos

Ángulo de inclinación de una recta con respecto al eje X. La pendiente de una recta

Rampa para silla de ruedas.

Para subir una silla de ruedas de un nivel a otro, la manera más sencilla es utilizando una rampa. El ascenso es más sencillo si la rampa está menos inclinada.

Cuando Jorge estaba jugando con su avión de control remoto, se le atoró en la punta de un pino que se encontraba a 6 metros de distancia. Él quiere bajar el avión pateando una pelota. Si el pino mide 3 metros de altura, ¿cuál es el ángulo, con respecto al piso, con el que debe salir la pelota para golpear el avión y que este caiga al suelo?

Solución:

Para resolver este problema, supongamos que la pelota que Jorge va a patear se encuentra en el origen; entonces, la base del árbol se encuentra en el punto $P(6, 0)$, el avión en $Q(6, 3)$ y α es el ángulo buscado. Así, podemos considerar el siguiente esquema (figura 2.1):

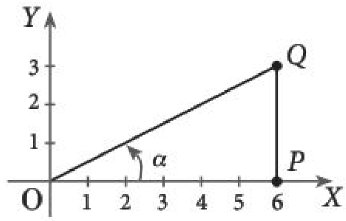


Figura 2.1

Los ángulos se miden en grados o radianes. Las fórmulas de transformación son:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ radianes.}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados.}$$

El triángulo ΔOPQ es rectángulo; entonces:

$$\tan \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Usando una calculadora o recurriendo a unas tablas trigonométricas, tenemos que:

$$\alpha \approx 27°.$$

El ángulo con el que debe salir la pelota es de aproximadamente 27°. (En realidad, la bola no seguiría una línea recta, describiría un arco de parábola; la situación que se presenta es una simplificación o modelo del caso real).

Dada una recta no horizontal, el ángulo α que se obtiene al hacer girar el eje X alrededor del punto P en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj hasta que coincida con la recta se llama *ángulo de inclinación* de la recta (figuras 2.2 y 2.3).

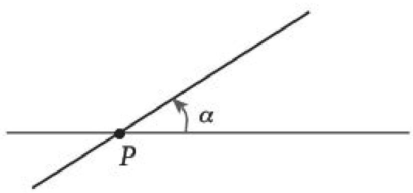


Figura 2.2

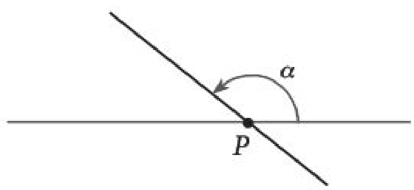


Figura 2.3

Si la recta es horizontal, su ángulo de inclinación es cero. El ángulo de inclinación de una recta puede variar de $0°$ a $180°$.

Llamamos *sentido positivo* de giro al que es contrario al movimiento de las manecillas del reloj y *sentido negativo* al que coincide con el movimiento de ellas (figuras 2.4 y 2.5).

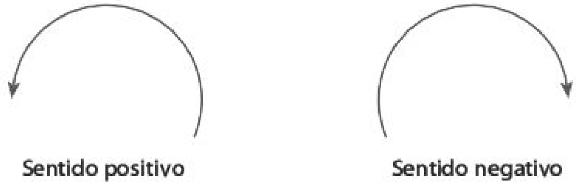


Figura 2.4 Figura 2.5

La pendiente es la tangente del ángulo de inclinación de la recta.

La *pendiente* de una recta es el valor de la tangente de su ángulo de inclinación α. La pendiente se denota de manera usual por m. O sea,

$$m = \tan \alpha .$$

Como el ángulo de $\tan 90°$ no está definido, entonces toda *recta vertical* —aquella cuyo ángulo de inclinación es $90°$— no tiene pendiente.

Si conocemos el valor m de la pendiente, entonces el ángulo de inclinación α vale:

$$\alpha = \tan^{-1} m$$

y se puede conocer un valor aproximado mediante unas tablas o una calculadora.

Cálculo de la pendiente cuando se conocen dos puntos de la recta

Encontrar la pendiente m de la recta que pasa por los puntos $P(-2,2)$ y $Q(3,5)$.

Solución:

Trazamos la recta que une los puntos P y Q. Esta corta el eje X en el punto A. Por P trazamos una recta paralela al eje X y desde Q trazamos una recta paralela al eje Y. Las dos rectas se cortan en B. Observamos que el triángulo ΔQPB es un triángulo rectángulo. El ángulo $\beta = \angle QPB$ es igual al ángulo α por ser ángulos correspondientes (figura 2.6).

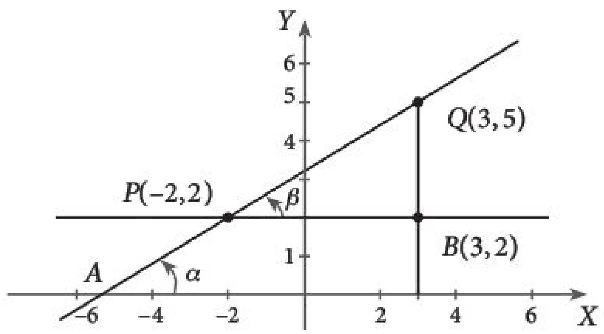


Figura 2.6

Entonces,

$$\tan\alpha = \tan\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{BQ}{PB}$$
$$= \frac{5-2}{3-(-2)} = \frac{3}{5}.$$

Así que $m = \frac{3}{5}$.

Para encontrar la pendiente de una recta no vertical, conociendo dos puntos de ella, $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, calculamos el cociente:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.} \tag{2.1}$$

Obsérvese que $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ y que en ambas fracciones los minuendos del numerador y denominador son las coordenadas de uno de los puntos y los sustraendos son las del otro.

Si tomamos otro par de puntos P' y Q' en la misma recta, como se muestra en la figura 2.7, se obtienen dos triángulos semejantes, y por tanto la razón de sus catetos es la misma. Es decir, la pendiente de una recta puede determinarse usando dos puntos cualesquiera de ella.

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, entonces la pendiente de la recta que pasa por P y Q es $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Siempre que $x_2 \neq x_1$, es decir, que la recta no sea vertical.

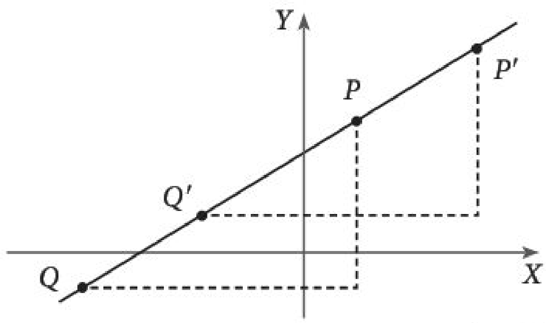


Figura 2.7

Si la recta es vertical, todos los puntos de la recta tienen la misma primera coordenada, de modo que el denominador de la expresión anterior vale cero y, por tanto, no puede evaluarse. Esto concuerda con lo dicho anteriormente en el sentido que las rectas verticales no tienen pendiente.

Observaciones:
La pendiente de una recta no vertical es un número que mide qué tan inclinada está la recta y hacia dónde está inclinada:

- La pendiente es positiva cuando la recta está inclinada hacia la derecha.
- La pendiente es cero cuando la recta es horizontal.
- La pendiente es negativa cuando la recta está inclinada hacia la izquierda.
- Cuando el valor absoluto de la pendiente es muy grande, la recta es casi vertical.
- Cuando su valor absoluto es muy pequeño, la recta es casi horizontal.
- Una recta vertical no tiene pendiente.

Ejemplos

1. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2,7)$ y $Q(-2,3)$.

Solución:
Usamos la fórmula (2.1) para obtener la pendiente de la recta (figura 2.8):

$$m=\frac{3-7}{-2-2}=\frac{-4}{-4}=1.$$

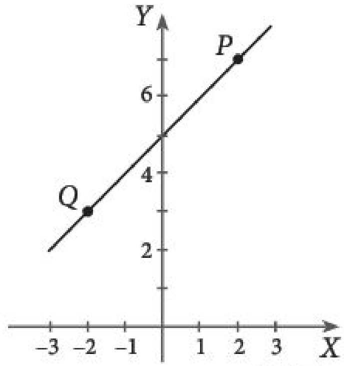


Figura 2.8

2. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(3,-4)$ y $Q\left(\frac{1}{2},2\right)$.

Solución:
La pendiente de la recta es (figura 2.9):

$$m=\frac{2-(-4)}{\frac{1}{2}-3}=\frac{6}{\frac{1-6}{2}}=-\frac{12}{5}.$$

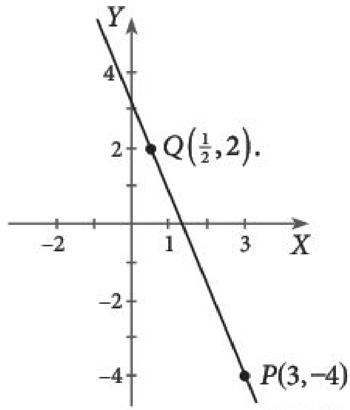


Figura 2.9

3. Encontrar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(-5,-3)$ y $Q(-1,-3)$.

Solución:
La pendiente de la recta es (figura 2.10):

$$m=\frac{-3-(-3)}{-1-(-5)}=\frac{0}{4}=0.$$

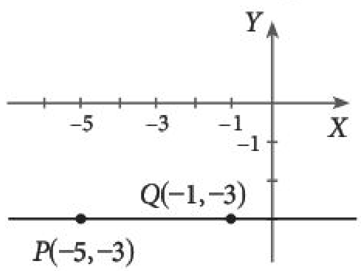


Figura 2.10

Una recta vertical no tiene pendiente.

4. Si $P(-2,5)$ y $m=-\frac{4}{3}$, encontrar las coordenadas de otro punto de la recta que pasa por P y tiene pendiente m.

Solución:
Para encontrar otro punto, a partir de P, avanzamos horizontalmente 3 unidades hacia la derecha (el denominador de la pendiente) llegando al punto de coordenadas $(1,5)$. A partir de este punto, bajamos verticalmente 4 unidades (el numerador de la pendiente), llegando así al punto $Q(1,1)$. Podemos comprobar que la recta que pasa por los puntos P y Q tiene pendiente m:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-5}{1-(-2)}=\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}.$$

El punto Q se encuentra sobre la recta que pasa por P y tiene pendiente $m=-\frac{4}{3}$ (figura 2.11).

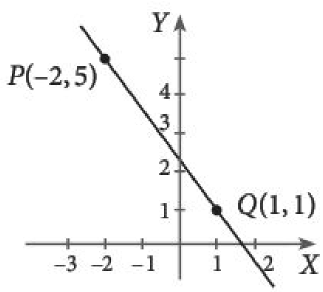


Figura 2.11

Ejemplos

5. Si $P(0,7)$ y $m=\sqrt{2}$, encontrar las coordenadas de otro punto de la recta que pasa por P y tiene pendiente m.

Solución:

Para encontrar otro punto, a partir de P, avanzamos horizontalmente 1 unidad hacia la derecha llegando al punto de coordenadas $(1, 7)$. A partir de este punto, subimos verticalmente $\sqrt{2}$ unidades, llegando así al punto $Q\left(1,7+\sqrt{2}\right)$. Podemos comprobar que la recta que pasa por los puntos P y Q tiene pendiente m:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7+\sqrt{2}-7}{1-0}=\sqrt{2}.$$

El punto Q se encuentra sobre la recta que pasa por P y tiene pendiente m (figura 2.12).

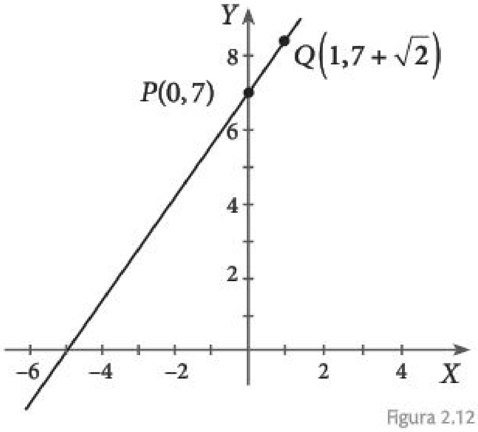


Figura 2.12

Cálculo del ángulo de inclinación cuando se conocen dos puntos de la recta

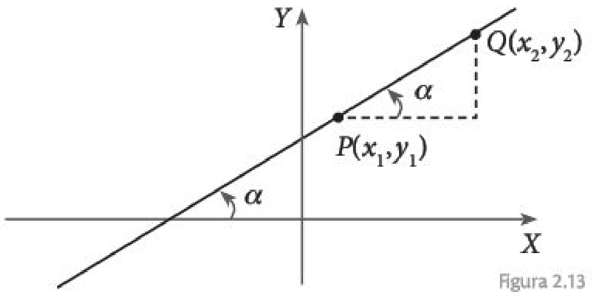


Figura 2.13

Para encontrar el ángulo de inclinación α de una recta no vertical conociendo dos puntos de ella, $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ primero calculamos su pendiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

y entonces $\alpha=\tan^{-1}m$.

Hay tres casos posibles:

- Si $m=0$, entonces $\alpha=\tan^{-1}0=0°$ y, por tanto, se trata de una recta horizontal.
- Si $m>0$, entonces $\alpha=\tan^{-1}m$ cumple que $0°<\alpha<90°$. Esto sucede en la figura 2.13, ya que $y_2-y_1>0$ y $x_2-x_1>0$ y, por tanto, el cociente m es positivo.
- Si $m<0$, entonces $\alpha=\tan^{-1}m$ cumple que $90°<\alpha<180°$. Esto se presenta en la figura 2.14, ya que $y_2-y_1<0$ y $x_2-x_1>0$ y por tanto, el cociente m es negativo.

Los trenes de alta velocidad requieren vías lo más rectas posibles y cuya pendiente no exceda de $\frac{1}{25}$.

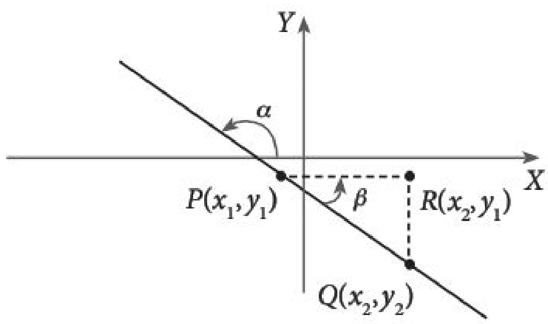


Figura 2.14

Uso de la calculadora para obtener una aproximación de α

En los dos primeros casos anteriores, es decir, cuando $m = 0$ o $m > 0$, aplicamos la función $\tan^{-1}$ de la calculadora al valor m y obtenemos un valor para α.

En el tercero, cuando $m < 0$, por lo general no podemos hacer lo anterior, pues muchas calculadoras no calculan $\tan^{-1} m$ cuando m es negativo.

Entonces procedemos de la siguiente manera: calculamos $\tan^{-1}(-m)$ —nótese que $-m > 0$— y obtenemos un ángulo β. Entonces,

$$\boxed{\alpha = 180° - \beta.} \tag{2.2}$$

Con base en la figura 2.14 explicaremos por qué se procede de la manera antes descrita cuando $m < 0$.

Consideramos el triángulo rectángulo PQR y observamos que los ángulos α y β son suplementarios por ser alternos externos. Así,

$$\boxed{\alpha + \beta = 180°.} \tag{2.3}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$\tan\beta = \frac{QR}{PR} = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{-(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -m.$$

O sea,

$$\tan\beta = -m;$$

o lo que es lo mismo $\beta = \tan^{-1}(-m)$ y por (2.3) $\alpha = 180° - \beta$.

Algunas calculadoras científicas pueden dar los ángulos en grados o en radianes. Asegúrate de que los esté dando en grados. Para ello oprime 0 inv cos.

Si la respuesta es 90, los está dando en grados; si es 1.57, en radianes.

Ejemplos

1. Encontrar el ángulo α que forma la recta que pasa por los puntos $P(-4, -2)$ y $Q(3, 5)$ con el eje X.

Solución:
El ángulo α es el ángulo de la recta. Encontramos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{5 - (-2)}{3 - (-4)} = 1,$$

de donde:

$$\alpha = \tan^{-1} m = \tan^{-1} 1.$$

Con una calculadora, encontramos el ángulo cuya tangente es 1, y obtenemos $\alpha = 45°$. La recta que pasa por P y Q forma un ángulo de 45° con el eje X (figura 2.15).

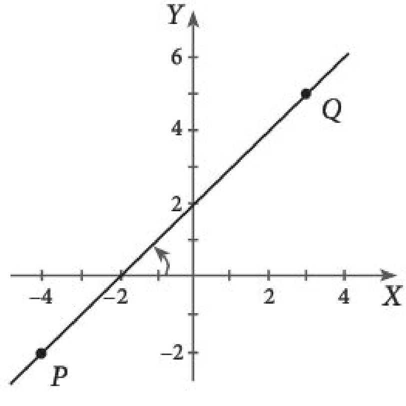


Figura 2.15

Ejemplos

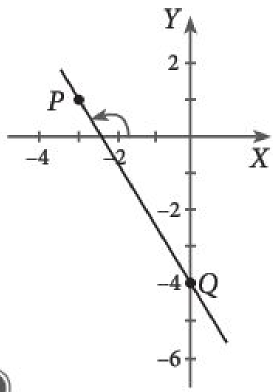


Figura 2.16

2. Encontrar el ángulo de inclinación α de la recta que pasa por los puntos $P(-3,1)$ y $Q\left(0,1-3\sqrt{3}\right)$.

Solución:
Encontramos la pendiente de la recta:

$$m=\frac{1-3\sqrt{3}-1}{0-(-3)}=-\sqrt{3}.$$

Con una calculadora, encontramos el ángulo cuya tangente es $-\left(-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$ y obtenemos $\beta=60°$.

De acuerdo con (2.2) tenemos que:

$$\alpha=180°-60°=120° \text{ (figura 2.16).}$$

Cómo graficar la recta conociendo uno de sus puntos y su pendiente

La pendiente nos dice cuánto subir o bajar verticalmente por cada unidad que avanzamos horizontalmente. Usaremos esto para dibujar una recta cuando conocemos un punto de ella y su pendiente.

Ejemplos

1. Dibujar la recta que pasa por el punto $O(0,0)$ y tiene pendiente $\frac{7}{4}$.

Solución:
A partir de $O(0,0)$ avanzamos horizontalmente 4 unidades (el denominador de la pendiente) hacia la derecha, llegando al punto $R(4,0)$ (figura 2.17). A partir de este punto, subimos verticalmente 7 unidades (el numerador de la pendiente), llegando así al punto $Q(4,7)$ (figura 2.18).

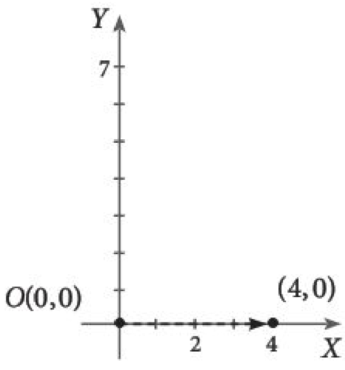


Figura 2.17

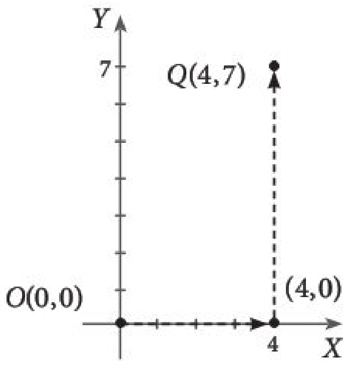


Figura 2.18

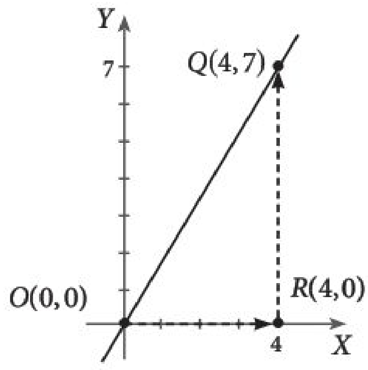


Figura 2.19

Trazamos la recta que pasa por los puntos O y Q, que tiene pendiente $\frac{7}{4}$ y está inclinada hacia la derecha (figura 2.19).

Ejemplos

Comprobación:
Aplicamos la fórmula (2.1) a los puntos $O(0,0)$ y $Q(4,7)$:

$$m = \frac{7-0}{4-0} = \frac{7}{4}.$$

2. Dibujar la recta que pasa por el punto $P(1,3)$ y tiene pendiente -2.

Solución:
Escribimos -2 como $\frac{-2}{1}$. A partir de $P(1,3)$ avanzamos horizontalmente 1 unidad (el denominador de la pendiente) hacia la derecha, llegando al punto $R(2,3)$ (figura 2.20). A partir de este punto, bajamos verticalmente 2 unidades (bajamos, ya que el numerador de la pendiente es negativo), llegando así al punto $Q(2,1)$ (figura 2.21).

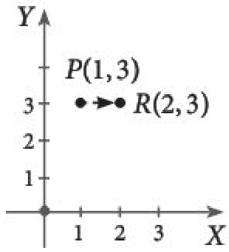


Figura 2.20

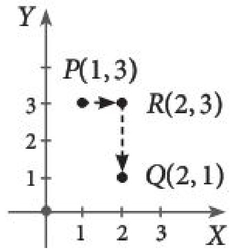


Figura 2.21

Trazamos la recta que pasa por los puntos P y Q, que tiene pendiente -2 y está inclinada hacia la izquierda (figura 2.22).

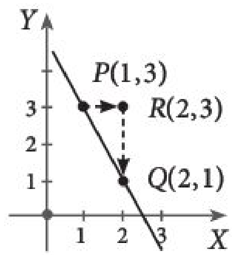


Figura 2.22

Comprobación:
Aplicamos la fórmula (2.1) a los puntos $P(1,3)$ y $Q(2,1)$:

$$m = \frac{1-3}{2-1} = -2.$$

Ejercicios

Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

1. $P(-9,0)$, $Q(0,3)$.

2. $P(3,2)$, $Q(6,2)$.

3. $P(5,7)$, $Q(-1,4)$.

4. $P(-5,5)$, $Q(1,1)$.

5. $P(-2,-2)$, $Q(-1,6)$.

6. $P(7.5,-2.2)$, $Q(4.8,-5.6)$.

7. $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(3,\frac{5}{2}\right)$.

8. $P\left(-5,\frac{3}{4}\right)$, $Q\left(8,\frac{11}{4}\right)$.

9. $P\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{8}{3},-4\right)$.

10. $P(4\pi,0)$, $Q(0,9\pi)$.

11. $P(3\pi,5)$, $Q(-8\pi,2)$.

12. $P(-6,-3)$, $Q(4,-7)$.

13. $P\left(\sqrt{3},1\right)$, $Q(0,1)$.

14. $P\left(4\sqrt{2},8\right)$, $Q\left(\sqrt{2},6\right)$.

15. $P\left(\sqrt{2},2\sqrt{5}\right)$, $Q\left(2,\sqrt{5}\right)$.

16. Halla la pendiente de las rectas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 donde:
ℓ_1 pasa por los puntos $P(-5,2)$ y $Q(-3,4)$.
ℓ_2 pasa por los puntos $P(-5,2)$ y $R(4,2)$.
ℓ_3 pasa por los puntos $P(-5,2)$ y $S(-1,-3)$.
Dibuja todas las rectas en el mismo sistema de ejes coordenados. ¿Qué puedes decir de estas rectas?
17. Dibuja una recta que pase por $P(1,3)$ y tenga pendiente positiva.
18. Dibuja una recta que pase por $P(1,3)$ y tenga pendiente negativa.
19. Dibuja una recta que pase por $P(1,3)$ y tenga pendiente cero.

En cada caso, dibuja la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m.

20. $P(1,0)$, $m=2$.
21. $P(0,0)$, $m=-3$.
22. $P(-2,8)$, $m=0$.
23. $P(5,5)$, $m=1$.
24. $P(7,-3)$, $m=-1$.
25. $P(0,-2)$, $m=4$.
26. $P(3,7)$, $m=-\frac{1}{2}$.
27. $P(6,-2)$, $m=\frac{1}{6}$.
28. $P(-3,-1)$, $m=\frac{2}{5}$.

29. Los vértices de un triángulo son $A(1,8)$, $B(-7,4)$ y $C(4,-3)$. Encuentra la pendiente de cada lado del triángulo.
30. Los vértices de un triángulo son $A(-5,6)$, $B(-4,-4)$ y $C(6,0)$. Encuentra la pendiente de cada lado del triángulo.

Ejercicios

Ecuación de la recta conociendo uno de sus puntos y su pendiente

Podemos obtener la ecuación de una recta de varias maneras, dependiendo de los datos que sepamos de ella; recíprocamente, si tenemos la ecuación de una recta, podemos escribirla en distintas formas y obtener de estas información directa sobre la recta.

Forma punto-pendiente

En este caso, obtenemos la ecuación de la recta a partir de conocer un punto de ella y su pendiente.

Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(5,4)$ y tiene pendiente cuatro.

Solución:
Si $Q(x,y)$ es cualquier otro punto de la recta, entonces la pendiente es:

$$m=\frac{y-4}{x-5},$$

pero sabemos que $m=4$; entonces,

$$4=\frac{y-4}{x-5}.$$

Al despejar, obtenemos:

$$y-4=4(x-5).$$

Esta ecuación también es satisfecha por $P(5,4)$ (figura 2.23).

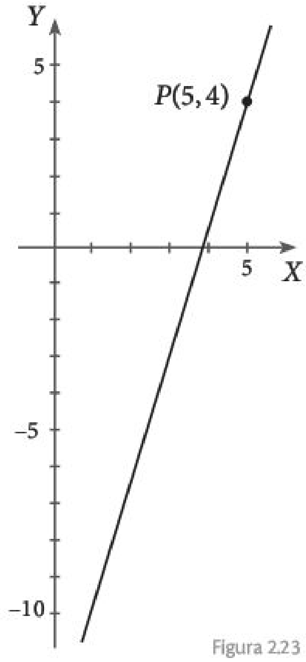


Figura 2.23

En general, consideremos el problema de encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(x_1,y_1)$ y tiene pendiente m.

Si $Q(x,y)$ es cualquier otro punto de la recta, se debe satisfacer:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

Al despejar, obtenemos:

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1),} \qquad (2.4)$$

la cual también es satisfecha por $P(x_1,y_1)$.

Esta manera de presentar la ecuación de la recta se llama forma *punto-pendiente* de la ecuación de la recta, ya que la obtuvimos conociendo la pendiente y un punto de ella. Recíprocamente, si vemos una ecuación de este tipo, podemos saber por qué punto pasa la recta y qué pendiente tiene (ver el segundo de los siguientes ejemplos).

Dado un punto $P(x_1,y_1)$ y un número m, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m es $y-y_1=m(x-x_1)$.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(4,-1)$ y tiene pendiente -2.

Solución:
Usamos (2.4) con $(x_1,y_1)=(4,-1)$ y $m=-2$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} y-y_1&=m(x-x_1)\\ y-(-1)&=(-2)(x-4)\\ y+1&=-2(x-4). \end{aligned}$$

2. Dar un punto y la pendiente de la recta $y-5=-7(x+3)$.

Solución:
Llevamos la ecuación dada a la forma $y-y_1=m(x-x_1)$:

$$y-5=-7(x-(-3)).$$

Observamos que:

$$y_1 = 5, \qquad x_1 = -3, \qquad m = -7;$$

de donde tenemos que la recta pasa por el punto $P(-3,5)$ y tiene pendiente $m = -7$.

3. Graficar la recta cuya ecuación es $3x + y = 2$.

Solución:

- Primer método:
  Llevamos la ecuación dada a la forma (2.4):

$$y - 2 = -3x,$$

o sea,

$$y - 2 = -3(x - 0).$$

La información que obtenemos con esta última ecuación es que la recta pasa por el punto $P(0,2)$ y tiene pendiente -3. Para graficar la recta, primero localizamos en el plano cartesiano el punto $P(0,2)$. Expresamos la pendiente -3 como $\frac{-3}{1}$. A partir de $P(0,2)$ avanzamos horizontalmente 1 unidad hacia la derecha (el denominador de la pendiente), llegando al punto $(1,2)$ (figura 2.24); a partir de este punto, bajamos verticalmente 3 unidades (bajamos porque el numerador es negativo), llegando al punto $Q(1,-1)$ (figura 2.25).

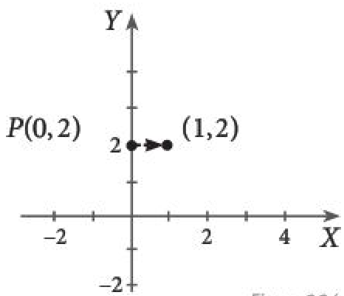


Figura 2.24

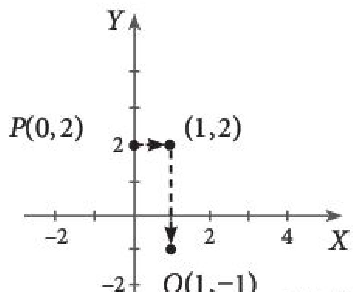


Figura 2.25

Ahora unimos los puntos P y Q con una recta (figura 2.26).

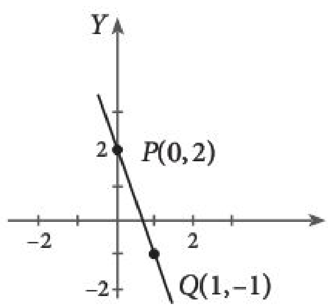


Figura 2.26

- Segundo método:
  Despejamos y:

$$y = -3x + 2.$$

Si $x=0$, entonces $y = -3 \cdot 0 + 2 = 2$, es decir, la recta pasa por el punto $P(0,2)$. Ahora podemos tomar cualquier otro valor de x y encontrar el correspondiente de y, por ejemplo, si $x=-1$, entonces $y=5$.

Hemos encontrado que el punto $Q(-1,5)$ también está sobre la recta. Trazamos la recta que pasa por P y Q.

Forma pendiente-ordenada al origen

Ahora también conocemos la pendiente m de la recta y uno de sus puntos P, pero ese punto es uno muy particular: aquel en que la recta corta el eje Y; a la ordenada de este punto P, que usualmente se denota con la letra b, se le llama *ordenada al origen* de la recta. Es decir, las coordenadas de P son $(0,b)$ y b es la ordenada al origen de la recta. Como conocemos un punto de la recta $P(0,b)$ y su pendiente m, podemos obtener, por medio de (2.4), la ecuación de la recta:

$$y-b=m(x-0),$$

que también se puede escribir como:

$$\boxed{y=mx+b.} \tag{2.5}$$

En Inglaterra se usa $y=mx+c$, pues es costumbre denotar por c a una constante arbitraria. En cambio en Estados Unidos de América se usa $y=mx+b$.

Esta última ecuación se conoce como la forma *pendiente-ordenada al origen* de la ecuación de la recta.

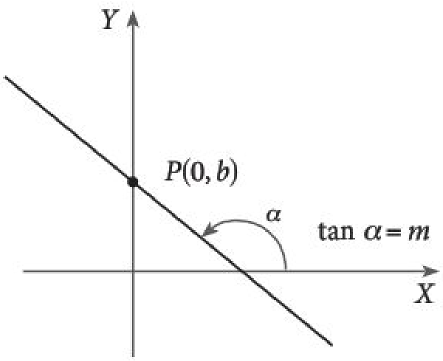


Figura 2.27

La ecuación $y=mx+b$ corresponde a la recta con pendiente m que corta el eje Y en b.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y que corta el eje Y en el punto -1.

   Solución:
   La pendiente es $m=3$ y la ordenada al origen es $b=-1$. Sustituimos estos valores en la ecuación (2.5); entonces:

   $$y=mx+b$$
   $$y=3x+(-1)$$
   $$y=3x-1.$$

   Así, la ecuación buscada es:

   $$y=3x-1.$$

2. ¿Cuál es la pendiente de la recta $y = -\frac{2}{3}x - 5$? Graficar esta recta.

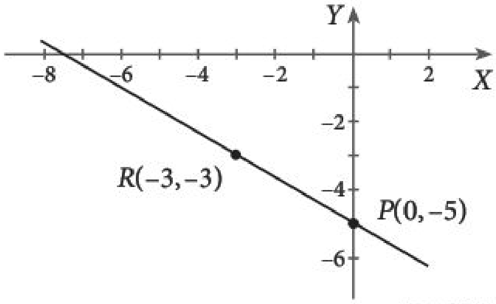


Figura 2.28

Solución:
La ecuación dada está escrita en la forma (2.5). La recta corta el eje Y en $b=-5$, es decir, pasa por el punto $P(0,-5)$ y tiene pendiente $m = -\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$. Ahora elegimos cualquier otro valor de x y lo sustituimos en la ecuación de la recta para obtener el valor y correspondiente. Por ejemplo, si $x=-3$ entonces:

$$y = -\frac{2}{3}(-3) - 5 = -3.$$

O sea, la recta pasa también por el punto $R(-3,-3)$. Trazamos la recta que pasa por P y R (figura 2.28).

3. Graficar la recta que tiene por ecuación $4x - y = -3$.

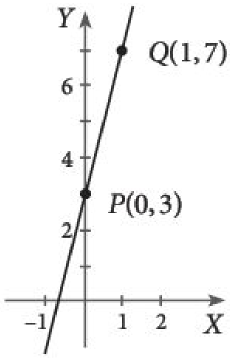


Figura 2.29

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen, es decir, dejamos la variable y sola en uno de los miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} 4x - y &= -3 \\ -y &= -4x - 3 \\ y &= 4x + 3. \end{aligned}$$

La recta corta el eje Y en $b=3$ y tiene pendiente $m = 4 = \frac{4}{1}$.

Marcamos el punto $P(0,3)$; a partir de ahí, avanzamos 1 unidad a la derecha y 4 hacia arriba para llegar al punto $Q(1,7)$. Trazamos la recta que une P y Q (figura 2.29).

4. Encontrar el ángulo de inclinación α de la recta $3x - 3y = 5$.

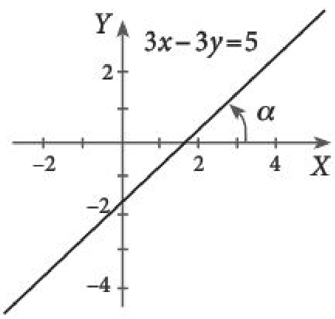


Figura 2.30

Solución:
Debemos encontrar primero la pendiente de la recta. Para ello, la escribimos en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 5 \\ -3y &= -3x + 5 \\ y &= x - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

La pendiente de la recta es $m=1$, es decir, $\tan\alpha = 1$. Debemos usar una calculadora o, simplemente, acordarnos del triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 45° para encontrar que el ángulo cuya tangente es 1 es $\alpha = 45°$.

El ángulo de inclinación de la recta $3x - 3y = 5$ es 45° (figura 2.30).

5. Encontrar el ángulo de inclinación α de la recta $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$.

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen para encontrar la pendiente:

$$\sqrt{3}x + y - 1 = 0$$
$$y = -\sqrt{3}x + 1,$$

así que $m = -\sqrt{3}$. Utilizando una calculadora, encontramos que el ángulo cuya tangente es $-\left(-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$ es $\beta = 60°$. También podemos obtener este valor recordando el triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°. De acuerdo con (2.2), tenemos que:

$$\alpha = 180° - 60° = 120°.$$

El ángulo de inclinación de la recta $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ es 120° (figura 2.31).

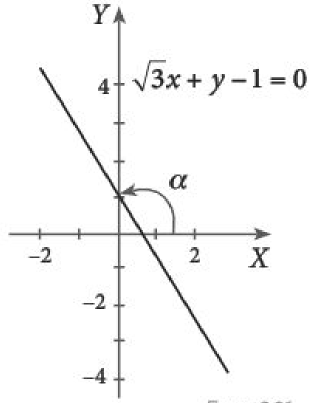


Figura 2.31

6. El *número de Mach* M de un avión se define como el cociente de su velocidad V_a entre la velocidad del sonido V_s, que puede considerarse constante, aunque disminuye a medida que baja la temperatura de la atmósfera. Así, M está dada por la ecuación:

$$M = \frac{V_a}{V_s}.$$

Esta ecuación representa una recta que pasa por el origen $(b = 0)$ y cuya pendiente es $m = \frac{1}{V_s}$. Según su velocidad de vuelo, los aviones se clasifican por su número de Mach en:

- Subsónico si $M < 0.7$.
- Transónico si $0.7 < M < 1.2$.
- Supersónico si $1.2 < M < 5$.
- Hipersónico si $M > 5$.

El número de Mach es un número adimensional, es decir, un número que no tiene asociadas unidades físicas que lo definan.

Einstein utilizó las ideas de Mach (Ernst Mach 1838-1916, físico y filósofo austriaco) en sus trabajos y enunció el *principio de Mach* diciendo "la masa inercial no es una característica intrínseca de un móvil, sino una medida de su acoplamiento con el resto del universo".

Otros ejemplos de números adimensionales son el número de Euler, que se utiliza en mecánica de fluidos; el de Biot, usado en cálculos de transmisión de calor; y el de Fresnel, utilizado en óptica.

Ejemplos

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y tiene pendiente m.

1. $P(2,3)$, $m = -1$.
2. $P(-2,7)$, $m = 5$.
3. $P(-1,-5)$, $m = 0$.
4. $P(8,0)$, $m = \pi$.
5. $P(-9,-3)$, $m = -10$.
6. $P(1.25, 0.5)$, $m = -6$.
7. $P(0,4)$, $m = -\frac{2}{3}$.
8. $P(-5,-5)$, $m = -\frac{1}{2}$.
9. $P(3,-7)$, $m = \frac{4}{7}$.

Halla la ecuación de la recta que tiene pendiente m y que corta el eje Y en el punto dado.

10. $m=3,\ b=\pi.$
11. $m=0,\ b=5.$
12. $m=11,\ b=0.$
13. $m=\frac{4}{5},\ b=-8.$
14. $m=-12,\ b=-\frac{3}{4}.$
15. $m=7,\ b=-\frac{2}{3}.$
16. $m=\frac{1}{2},\ b=\frac{6}{7}.$
17. $m=\frac{9}{8},\ b=16.$
18. $m=-\frac{7}{11},\ b=-\frac{7}{2}.$
19. $m=-6,\ b=\sqrt{2}.$
20. $m=\sqrt{5},\ b=-4.$
21. $m=-\sqrt{10},\ b=-\sqrt{7}.$

Grafica las siguientes rectas.

22. $3y-5x=0.$
23. $y=-2.$
24. $3x+2y=-9.$
25. $-2x+5y=3.$
26. $4x-y=11.$
27. $-9y+6x=-18.$
28. $8x+4y=-16.$
29. $3x-5y-8=0.$
30. $x+y-7=0.$
31. $y=\frac{3}{4}.$
32. $-\frac{2}{3}y+\frac{5}{2}x=-\frac{1}{6}.$
33. $\frac{8}{9}y+\frac{5}{3}x-12=0.$

34. Encuentra la ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto $P(-2,-4)$ y grafícala.
35. Una recta con pendiente -2 pasa por el punto $P(5,-1)$. La abscisa del punto Q que está en esa recta es 1. Encuentra la ordenada de Q.
36. Una recta con pendiente $-\frac{6}{11}$ pasa por el punto $P(-4,5)$. La abscisa del punto Q que está en esa recta es 3. Encuentra la ordenada de Q.
37. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y que corta el eje X en -8.
38. Deduce la forma pendiente-abscisa al origen de la ecuación de la recta. Es decir, encuentra la ecuación de la recta que tiene pendiente m y que corta el eje X en el punto a.

Encuentra el ángulo de inclinación de la recta dada con el eje X.

Ejercicios

39. $\sqrt{2}x+y+6=0.$
40. $\sqrt{3}x-2y-5=0.$
41. $x-2y+3=0.$
42. $x+y+4=0.$
43. $5x+6y-12=0.$
44. $7x-3y+6=0.$

Ecuación de la recta conociendo dos de sus puntos

La ecuación de demanda obedece la Ley de la demanda: la demanda de un bien o servicio disminuye si el precio aumenta y se incrementa si el precio disminuye.

Un colegio organiza un paseo a las grutas de Cacahuamilpa. Al hacer el análisis del costo, se determina que si asisten 30 niños, el costo que debe cubrir cada uno debe ser de \$80. Si van 40 niños, entonces el costo será de \$75 por niño. Suponiendo que la ecuación de demanda es lineal, ¿cuál sería el costo que debe cubrirse por persona si asisten 90 niños?

Solución:

La ecuación de demanda relaciona el número de demandantes (niños asistentes) con el cobro por atender a cada uno de ellos. Que la ecuación sea lineal quiere decir que se trata de la ecuación de una recta.

Llamamos x al número de niños y p al precio que debe pagar cada uno. Consideraremos parejas de la forma (x, p). Con los datos del problema, tenemos $P(30, 80)$ y $Q(40, 75)$ (figura 2.32).

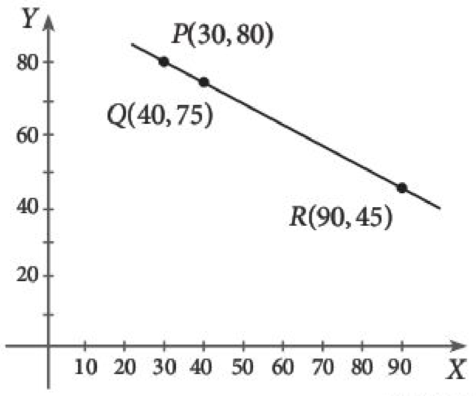


Figura 2.32

Con las parejas dadas calculamos la pendiente, es decir,

$$m = \frac{75 - 80}{40 - 30} = -\frac{1}{2}.$$

Ahora elegimos cualquiera de los dos puntos que conocemos, digamos $Q(40, 75)$, para usar la forma punto-pendiente (2.4) y encontrar la ecuación de demanda; es decir, en la ecuación:

$$p - p_1 = m(x - x_1),$$

sustituimos los valores numéricos conocidos para obtener:

$$p - 75 = -\frac{1}{2}(x - 40).$$

Así, la ecuación de demanda es:

$$p = -\frac{1}{2}x + 95.$$

De manera que si asisten 90 niños, es decir $x = 90$, entonces al sustituir obtenemos:

$$p = -\frac{1}{2}(90) + 95 = 50.$$

Es decir, cada niño pagará \$50.

Veamos ahora cómo encontrar, en general, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, con $x_1 \neq x_2$. Si conocemos dos puntos de la recta, podemos encontrar su pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

Las dos ecuaciones $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ y $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$ corresponden a la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, siempre que $x_1 \neq x_2$.

ahora, tomando cualquiera de los dos puntos que conocemos, digamos $P\,(x_1, y_1)$, podemos encontrar la ecuación en su forma punto pendiente (2.4):

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right).} \tag{2.6}$$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(4,-1)$ y $Q(8,3)$.

Solución:
Usamos $P(4,-1)$ como el punto de coordenadas (x_1, y_1) y sustituimos en (2.6):

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) \\ y - (-1) &= \frac{3-(-1)}{8-4}(x-4) \\ y + 1 &= \frac{3+1}{4}(x-4) \\ y + 1 &= x - 4 \\ y &= x - 5. \end{aligned}$$

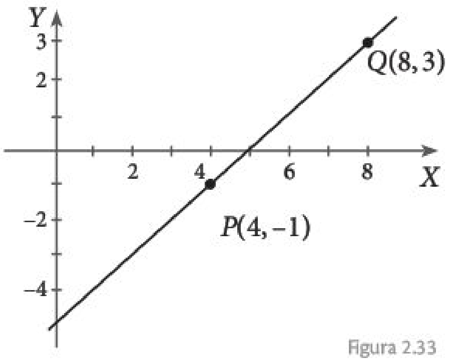


Figura 2.33

Veamos ahora qué pasa si, en lugar de elegir P, elegimos $Q(8,3)$ como el punto de coordenadas (x_1, y_1) para hacer la sustitución en (2.6):

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) \\ y - 3 &= \frac{-1-3}{4-8}(x-8) \\ y - 3 &= \frac{-4}{-4}(x-8) \\ y - 3 &= x - 8 \\ y &= x - 5. \end{aligned}$$

Hemos obtenido, como era de esperarse, la misma ecuación (figura 2.33).

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(5,2)$ y $Q(7,-2)$.

Solución:
Elegimos Q como el punto de coordenadas (x_1, y_1) y sustituimos en (2.6):

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right) \\ y - (-2) &= \frac{2-(-2)}{5-7}(x-7) \\ y + 2 &= -2\,(x-7) \end{aligned}$$

$$y = -2(x-7) - 2$$
$$y = -2x + 12.$$

También podemos calcular, primero, la pendiente:

$$m = \frac{-2-2}{7-5} = -2$$

y después sustituir en la ecuación (2.4) (figura 2.34):

$$y - (-2) = -2(x-7)$$
$$y + 2 = -2x + 14$$
$$y = -2x + 12.$$

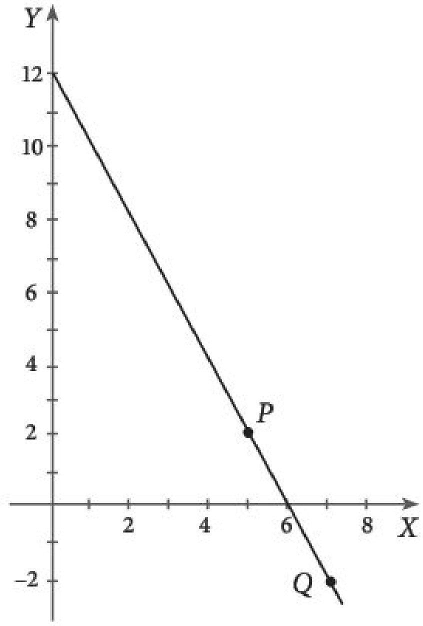


Figura 2.34

Ejemplos

Rectas verticales

Las ecuaciones anteriores sirven para representar cualquier recta, excepto las rectas verticales, ya que estas no tienen pendiente. Sin embargo, las ecuaciones para las rectas verticales son muy sencillas, pues todos sus puntos tienen la misma primera coordenada. Así, la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (h, k) es:

$$x = h.$$

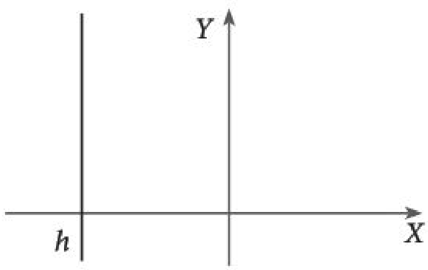


Figura 2.35

Ejemplo

1. Escribir la ecuación de la recta vertical que pasa por $(3, 2)$.

   Solución:
   La ecuación de la recta vertical que pasa por $(3,2)$ es $x=3$ (figura 2.36).

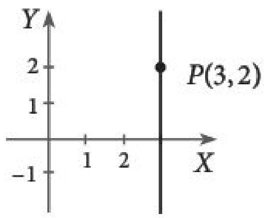


Figura 2.36

$x=h$ es la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (h,k) para cualquier valor de k.

Ejercicios

En cada caso, escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

1. $P(3,-4)$, $Q(2,2)$.
2. $P(4,0)$, $Q(-7,-1)$.
3. $P(-6,8)$, $Q(3,-1)$.
4. $P\left(\frac{1}{6},5\right)$, $Q\left(2,\frac{5}{2}\right)$.
5. $P\left(\frac{3}{4},\frac{1}{8}\right)$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{2}{6}\right)$.
6. $P\left(-\frac{7}{5},\frac{6}{5}\right)$, $Q\left(\frac{8}{5},-\frac{4}{5}\right)$.
7. $P(7,2)$, $Q(2,7)$.
8. $P\left(-2\pi,7\right)$, $Q\left(-1,\sqrt{2}\right)$.
9. $P(-11,-3)$, $Q(-18,-24)$.

En cada caso, prueba que los puntos dados son colineales y encuentra la ecuación de la recta que pasa por ellos.

10. $P(-2,3)$, $Q(1,2)$, $R(4,1)$.
11. $P(-4,-3)$, $Q(-1,1)$, $R(2,5)$.
12. $P(0,7)$, $Q(5,-13)$, $R(-2,15)$.
13. $P(5,-3)$, $Q(0,-5)$, $R(10,-1)$.
14. $P(7,10)$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{44}{7}\right)$, $R\left(-\frac{1}{4},\frac{41}{7}\right)$.
15. $P\left(\frac{1}{6},-\frac{31}{4}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{3},-\frac{17}{2}\right)$, $R\left(1,-\frac{13}{2}\right)$.

En cada caso, se dan los vértices de un triángulo; dibújalo y encuentra las ecuaciones de sus lados.

16. $A(-5,3)$, $B(1,3)$, $C(-1,6)$.
17. $A(8,0)$, $B(2,-2)$, $C(-5,1)$.
18. $A(-3,2)$, $B(4,4)$, $C(6,-3)$.
19. $A(-2,5)$, $B(9,-5)$, $C(7,0)$.

20. Los vértices de un cuadrilátero son $A(5,-2)$, $B(4,4)$, $C(-1,2)$, $D(-2,-2)$. Dibújalo y encuentra las ecuaciones de sus lados y de sus diagonales.
21. Halla los puntos que equidisten de los puntos $A(-7,5)$ y $B(6,-3)$.

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde:

22. $A(9,-2)$, $B(2,-1)$, $C(-5,3)$, $D(-2,7)$.
23. $A(-4,-2)$, $B(-1,-4)$, $C(-1,6)$, $D(1,2)$.
24. Una compañía hace una cotización para un banquete, de manera que el costo es de \$12 000 para 100 personas, o de \$16 500 para 150 personas.
    a. Encuentra la ecuación que determina el costo del banquete para x personas, suponiendo que está dado por la ecuación de una recta.
    b. ¿Cuánto costaría el banquete para 125 personas?
25. Un viaje con boleto de avión incluido tiene cierto costo por persona. Si se desea permanecer un tiempo mayor en el lugar, se debe pagar una cuota adicional por noche. Con permanencia de dos noches adicionales, el pago total es de \$6 400 y, con seis noches adicionales, el costo es de \$8 200. Los alimentos no están incluidos.
    a. Encuentra, suponiendo que está dado por la ecuación de una recta, el costo total del viaje con x noches adicionales.
    b. ¿Cuál es el costo sin noches adicionales?
    c. ¿Cuánto cuesta cada noche adicional?

26. Un punto $P(x,y)$ equidista de los puntos $Q(-4,-1)$ y $R(1,-4)$. La recta que une P con el punto $S(-3,3)$ tiene pendiente $-\frac{2}{3}$. Encuentra las coordenadas del punto P.
27. Considera el cuadrilátero con vértices $A(-6,1)$, $B(-3,-5)$, $C(2,-2)$ y $D(3,3)$.
    a. Encuentra los puntos medios de AB y CD y la ecuación de la recta que los une.
    b. Halla los puntos medios de AD y BC, y la ecuación de la recta que los une.
    c. Encuentra el punto de intersección de las rectas obtenidas en los incisos anteriores.
    d. Localiza los puntos medios de las diagonales AC y BD y la ecuación de la recta que los une.
    e. Prueba que el punto obtenido en el inciso **c.** está sobre la recta que obtuviste en el **d.**

Ejercicios

Forma general de la ecuación de la recta

Nos gustaría tener una forma de la ecuación de la recta que cubriera tanto las rectas verticales como las que no lo son. Esta es la *forma general* de la ecuación de la recta y se obtiene pasando todos los términos de la ecuación a un miembro, de manera que este quede igualado a cero:

$$\boxed{Ax + By + C = 0.} \tag{2.7}$$

Al menos uno de los coeficientes A y B debe ser distinto de 0.

Ejemplos

1. Escribir la ecuación $y = 4x + 5$ en la forma general.

Solución:
Si pasamos todos los términos de un lado de la ecuación, obtenemos la ecuación en su forma general:

$$4x - y + 5 = 0$$

2. Escribir, en la forma general, la ecuación de la recta que pasa por $P(-3,2)$ y tiene pendiente 8.

Solución:
La forma punto-pendiente de la ecuación de la recta es:

$$y - 2 = 8(x + 3),$$

efectuando las operaciones, y pasando todos los términos de un lado de la ecuación, obtenemos la forma general de la ecuación:

$$8x - y + 26 = 0.$$

3. Encontrar la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(4,3)$ cuyo ángulo de inclinación es $135°$.

Solución:
Debemos encontrar la pendiente de la recta para poder utilizar la ecuación de la recta que pasa por un punto conocido y tiene una pendiente dada. La pendiente de la recta es la tangente del ángulo que forma dicha recta con el eje X.

$$m = \tan 135° = -\tan 45° = -1,$$

ya que $135°$ y $45°$ son ángulos suplementarios (el valor de $\tan 135°$ también se puede obtener directamente usando una calculadora). La ecuación de la recta es:

$$y - 3 = -1(x - 4).$$

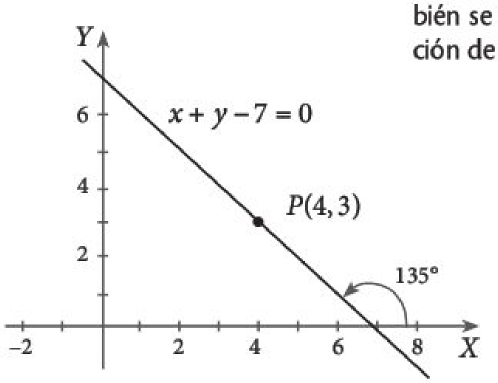


Figura 2.37

Pasamos todo al primer miembro para obtener la ecuación en la forma general:

$$x + y - 7 = 0.$$

La forma general de la ecuación de la recta es $x + y - 7 = 0$ (figura 2.37).

4. Encontrar la forma general de la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(-4,5)$.

Solución:
Como la recta es vertical, entonces todos sus puntos tienen la misma primera coordenada y, como la recta pasa por $(-4,5)$, ese valor común debe ser -4; de donde la ecuación es:

$$x = -4.$$

Al pasar todo al primer miembro, obtenemos la ecuación de la recta en su forma general:

$$x + 4 = 0.$$

Ejemplos

Consideremos la recta $Ax + By + C = 0$. Entonces al menos uno de los dos coeficientes A o B es distinto de 0, en tanto que C no tiene restricción alguna.

Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ y la ecuación se reduce a $Ax + C = 0$, es decir, se trata de la recta vertical:

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Si $B \neq 0$, entonces la recta $Ax + By + C = 0$ tiene pendiente $m = -\frac{A}{B}$ y ordenada al origen $-\frac{C}{B}$, ya que al despejar y se obtiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

que es la ecuación de la recta en su forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = mx + b.$$

Así, $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$.

Observamos que para que la recta $Ax + By + C = 0$ sea vertical, es necesario y suficiente que $B = 0$. En particular, si $B \neq 0$, entonces la recta con ecuación general $Ax + By + C = 0$ no es vertical.

Ejemplo

1. Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de la recta $2x - 5y + 1 = 0$.

Solución:
La pendiente es:

$$m = -\frac{2}{-5} = \frac{2}{5}$$

y la ordenada al origen,

$$b = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5}.$$

Si una ecuación se obtiene de otra efectuando las operaciones siguientes:

- Sumar la misma cantidad (que puede ser una expresión algebraica) de ambos lados de una ecuación.
- Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad distinta de cero.

Entonces, las dos ecuaciones son *equivalentes*.

Dos ecuaciones que son equivalentes representan el mismo lugar geométrico. En el caso de ecuaciones lineales en dos variables, representan la misma recta. Observa que la forma general de la ecuación de la recta puede escribirse de diversas maneras, ya que si multiplicamos la ecuación:

$$Ax + By + C = 0$$

por una constante λ distinta de cero, obtenemos la ecuación:

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0,$$

que es de la misma forma que la anterior y representa la misma recta.

Ejemplo

1. Probar que las tres ecuaciones siguientes son equivalentes:

$$\boxed{\begin{aligned} 3x - 6y + 12 &= 0, \\ x - 2y + 4 &= 0, \\ -x + 2y - 4 &= 0. \end{aligned}} \tag{2.8}$$

Solución:
Obtenemos la segunda ecuación multiplicando la primera por $\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} 3x - 6y + 12 &= 0 \\ \frac{1}{3}(3x - 6y + 12) &= 0 \\ x - 2y + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Obtenemos la tercera multiplicando la segunda por (-1):

$$\begin{aligned} x - 2y + 4 &= 0 \\ -(x - 2y + 4) &= 0 \\ -x + 2y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Por último, obtenemos la primera multiplicando la tercera por (-3):

$$\begin{aligned} -x + 2y - 4 &= 0 \\ -3(-x + 2y - 4) &= 0 \\ 3x - 6y + 12 &= 0. \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones son equivalentes. Las tres representan la recta cuya ecuación escrita en la forma pendiente-ordenada al origen es:

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Esta última ecuación es equivalente a las anteriores, pues se obtiene a partir de cualquiera de ellas utilizando sucesivamente las dos operaciones que producen ecuaciones equivalentes.

Pensamiento crítico

En la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$, si $C = 0$ y $A \neq 0$, ¿qué tipo de recta es?

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m. Escríbela en la forma general $Ax + By + C = 0$.

1. $P(-5,0)$, $m = \frac{3}{2}$.
2. $P(0,\pi)$, $m = \frac{\pi}{2}$.
3. $P(6,3)$, $m = -1$.
4. $P(-4,-1)$, $m = 5$.
5. $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $m = -\frac{1}{6}$.
6. $P(-\frac{3}{5},\frac{1}{3})$, $m = 7$.

Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q. Escríbela en la forma general $Ax + By + C = 0$.

7. $P(2,-3)$, $Q(6,-1)$.
8. $P(\sqrt{2},1)$, $Q(-3,-3)$.
9. $P(0,4)$, $Q(2,0)$.
10. $P(-1,0)$, $Q(0,1)$.
11. $P(-\frac{\pi}{2},-\pi)$, $Q(2\pi,5\pi)$.
12. $P(\frac{7}{6},\frac{11}{6})$, $Q(\frac{13}{6},\frac{7}{3})$.

13. Las escalas en grados Fahrenheit o Celsius (en grados centígrados) para medir la temperatura están relacionadas por la ecuación lineal:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Grafica esta recta colocando F en el eje horizontal y C en el eje vertical y responde:

a. ¿A cuántos grados centígrados equivalen $32°F$, $100°F$ y $410°F$?
b. ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen $36.5°C$, $100°C$ y $-10°C$?
c. ¿En qué valor coinciden las escalas Celsius y Fahrenheit?

Encuentra la forma general de la ecuación de la recta que pasa por el punto P cuyo ángulo de inclinación es α.

14. $P(-2,-1)$, $\alpha = 120°$.
15. $P(3,5)$, $\alpha = 75°$.
16. $P(4,-3)$, $\alpha = 45°$.
17. $P(-1,-5)$, $\alpha = 60°$.
18. $P(5,8)$, $\alpha = 30°$.
19. $P(2,-6)$, $\alpha = 45°$.

Escribe la forma general de la ecuación de la recta con pendiente m y ordenada al origen b.

20. $m = -5$, $b = 1$.
21. $m = 8$, $b = -3$.
22. $m = 2$, $b = 6$.
23. $m = -\frac{1}{6}$, $b = -10$.
24. $m = \frac{9}{4}$, $b = \frac{3}{7}$.
25. $m = -1$, $b = -\frac{12}{5}$.

Determina si la recta dada es o no vertical.

26. $y = 2x$.
27. $5y = 0$.
28. $-x - y - 1 = 0$.
29. $x - 32 = 3y$.
30. $-x + 25 = 0$.
31. $7x + 1 = y$.

Pensamiento crítico

En la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$, si $A = 0$ y $B \neq 0$, ¿qué tipo de recta es?

Forma simétrica de la ecuación de la recta

A partir de la forma general de la ecuación de la recta:

$$Ax + By + C = 0,$$

podemos escribir:

$$Ax + By = -C.$$

Si $C \neq 0$, podemos dividir entre $-C$ obteniendo:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1,$$

si, además, A y B también son distintos de cero, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Llamamos $a = -\frac{C}{A}$ y $b = -\frac{C}{B}$ y escribimos:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.} \tag{2.9}$$

Esta ecuación se llama *forma simétrica de la ecuación de la recta* y tiene la ventaja de que en ella podemos ver explícitamente los puntos donde la recta corta los dos ejes (figura 2.38).

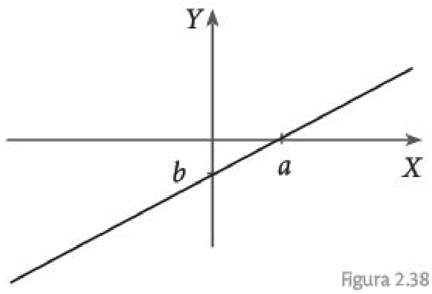


Figura 2.38

La ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ se llama *forma simétrica de la ecuación de la recta*, que corta el eje Y en b y el eje X en a.

Observaciones:

- Si $x = 0$, obtenemos $y = b$.
- Si $y = 0$, obtenemos $x = a$.

De las observaciones anteriores deducimos que la recta corta el eje Y en $y = b$ y el eje X en $x = a$. Observamos que una recta corta ambos ejes en puntos distintos del origen si, y sólo si, en su ecuación, en forma general, $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$; solamente cuando se cumplen estas condiciones se puede escribir la ecuación de la recta en la forma simétrica.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta que corta los ejes en $(5,0)$ y $(0,-3)$.

Solución:
Hacemos $a=5$ y $b=-3$; ahora, sustituimos en la ecuación simétrica:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1,$$

efectuando las operaciones podemos transformarla a la forma general:

$$-3x+5y+15=0.$$

2. Encontrar los puntos en los que la recta $5x+8y-6=0$ corta los ejes.

Solución:
Pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación y dividimos entre él:

$$5x+8y=6$$
$$\frac{5x}{6}+\frac{8y}{6}=1,$$

que puede escribirse como:

$$\frac{x}{\frac{6}{5}}+\frac{y}{\frac{3}{4}}=1.$$

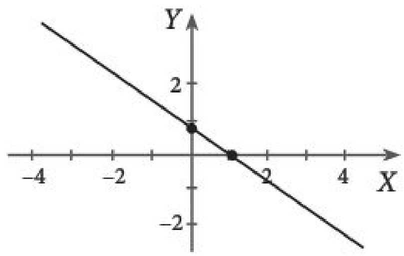


Figura 2.39

Así, la recta corta los ejes en $\left(\frac{6}{5},0\right)$ y $\left(0,\frac{3}{4}\right)$.(figura 2.39).

Consideremos la recta $Ax+By+C=0$. Cuando $C=0$ no podemos presentar la ecuación en su forma simétrica, ya que en este caso tenemos:

$$Ax+By=0$$

y no podemos dividir entre cero, pero aún podemos determinar la intersección de la recta con cada uno de los ejes: a ambos los interseca en el origen $O(0,0)$. Esto es fácil de comprobar, ya que:

$$A\cdot 0+B\cdot 0=0,$$

es decir, $O(0,0)$ pertenece a la recta y obviamente $O(0,0)$ también está en cada uno de los ejes.

Sin embargo, cuando de una recta (figura 2.40) sólo sabemos que corta los ejes en el origen $O(0,0)$, no es posible saber de cuál se trata, necesitamos conocer más información sobre ella.

Existe una forma más de la ecuación de la recta que es la forma normal: $x\cos\omega+y\,sen\,\omega-\rho=0$ misma que usa dos parámetros: ω y ρ, el primero es un ángulo y el segundo es una distancia.

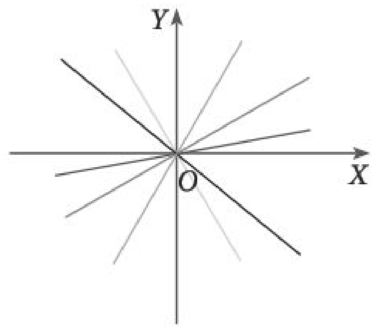


Figura 2.40

Ejercicios

Di, en cada caso, qué información inmediata te proporciona la ecuación.

1. $y = \frac{3}{5}x + 8.$
2. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1.$
3. $6x - 9y + 7 = 0.$
4. $x - 3 = 0.$
5. $y + 1 = \frac{9}{8}(x - 3).$
6. $y - 2 = \frac{3-2}{4-6}(x - 6).$
7. $y + 9 = 0.$
8. $y = -x.$
9. $\frac{x}{-4} + \frac{y}{7} = 1.$
10. $\frac{3}{4}x + 5y - 12 = 0.$
11. $5x - 8y + 3 = 0.$
12. $y = -20x.$
13. $y + \frac{4}{5} = -4(x + 7).$
14. $y + 8 = \frac{6+8}{5+9}(x + 9).$
15. $y = -\frac{5}{11}x + 4.$

Escribe las siguientes ecuaciones de rectas en la forma simétrica y grafícalas.

16. $3x + 8y - 6 = 0.$
17. $6x - 5y - 30 = 0.$
18. $y = -\frac{5}{12}x + \frac{5}{4}.$
19. $y - 3 = -\frac{7}{9}(x + 4).$
20. $2x + 20y - 5 = 0.$
21. $y + 7 = 6(x - 4).$
22. $20x - 5y + 25 = 0.$
23. $4x + 7y - 28 = 0.$
24. $y = -\frac{6}{11}x + 3.$

Encuentra la ecuación de la recta que corta el eje X en a y el eje Y en b. Escríbela en la forma general.

25. $a = -5$, $b = 8$.
26. $a = -3$, $b = 5$.
27. $a = -\frac{1}{2}$, $b = -4$.

28. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 4)$ tal que la distancia del origen al punto de intersección de la recta con el eje X sea igual a la distancia del origen al punto de intersección de la recta con el eje Y. Sugerencia: usa la forma simétrica de la ecuación de la recta.

Intersección de rectas

Un fabricante de radios tiene costos fijos de \$140 diarios más \$72 por concepto de mano de obra y materiales por cada radio fabricado. Si cada aparato es vendido en \$107, ¿cuántos radios debe producir y vender cada día el fabricante para garantizar que no haya pérdidas ni ganancias?

Solución:
El costo total de producción de x radios al día es:

$$C(x) = 72x + 140,$$

puesto que cada aparato se vende en \$107, los ingresos correspondientes son:

$$I(x) = 107x.$$

Para garantizar que no haya pérdidas ni ganancias, el costo total y los ingresos deben ser iguales, es decir,

$$I(x) = C(x)$$
$$107x = 72x + 140,$$

de donde:

$$107x - 72x = 140$$
$$x = \frac{140}{35} = 4.$$

La solución de esta ecuación es $x = 4$. De lo anterior deducimos que, para que no haya pérdidas ni ganancias, debe producir y vender 4 radios diariamente, lo que representará un costo y un ingreso iguales entre sí: \$428.

Dibujando las rectas $y = C(x)$ y $y = I(x)$, que representan el costo total y los ingresos, observamos que se cortan en el punto (4, 428) (figura 2.41).

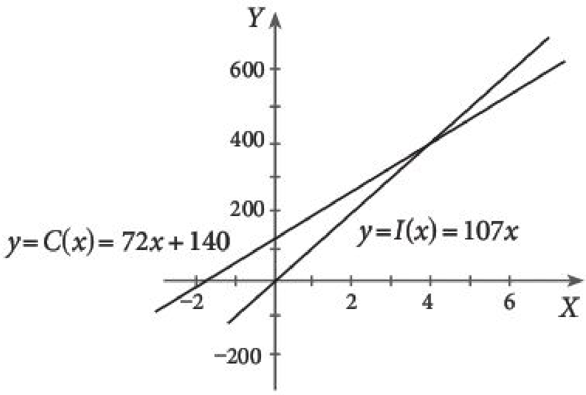
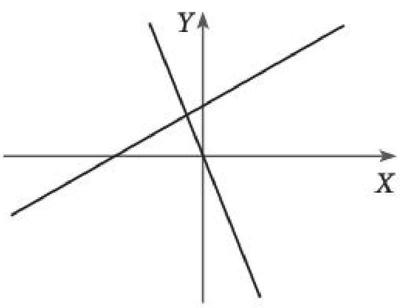


Figura 2.41

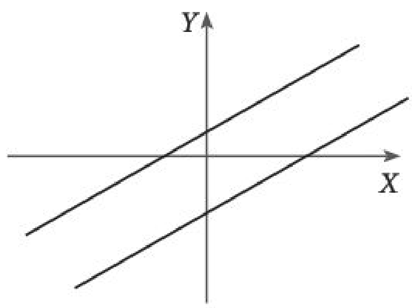
Sabemos que, dadas dos rectas en el plano, sucede uno y sólo uno de los siguientes hechos:

- Se cortan en un solo punto (figura 2.42).
- Son paralelas y distintas (figura 2.43).
- Son la misma recta (figura 2.44).



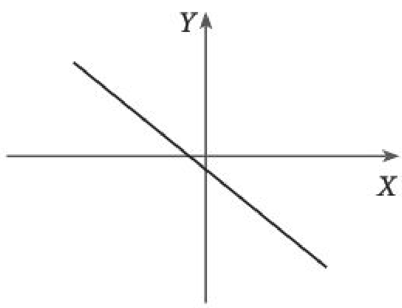
Se cortan en un solo punto.

Figura 2.42



Son paralelas y distintas.

Figura 2.43



Son la misma recta.

Figura 2.44

Un punto en el plano está en dos rectas si satisface las ecuaciones de ambas rectas. Si tenemos las ecuaciones de dos rectas y queremos encontrar su intersección, lo que debemos hacer es resolver las ecuaciones simultáneamente, es decir, encontrar sus soluciones comunes. De acuerdo con la discusión anterior, podemos esperar uno y sólo uno de los siguientes resultados:

- Hay un solo punto (x, y) que satisface ambas ecuaciones. Este es el punto donde se cortan las rectas (punto de intersección).
- Ningún punto satisface ambas ecuaciones. Las rectas son paralelas y distintas.
- Las dos ecuaciones son equivalentes y todos los puntos que satisfacen una, también satisfacen la otra. Las dos ecuaciones representan la misma recta.

Ejemplos

1. Encontrar la intersección de las rectas $5x - y - 11 = 0$ y $x + 3y + 1 = 0$.

Solución:
Debemos resolver simultáneamente:

$$\boxed{\begin{aligned} 5x - y - 11 &= 0 \\ x + 3y + 1 &= 0. \end{aligned}} \tag{2.10}$$

Para eliminar una de las variables, multiplicamos la primera ecuación por 3:

$$\begin{aligned} 15x - 3y - 33 &= 0 \\ x + 3y + 1 &= 0, \end{aligned}$$

sumando las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$16x - 32 = 0,$$

despejamos x:

$$x = 2.$$

Ahora, sustituimos este valor en la segunda ecuación de (2.8):

$$2 + 3y + 1 = 0,$$

de donde:

$$y = -1.$$

El punto donde se cortan las rectas es $P(2, -1)$ (figura 2.45).

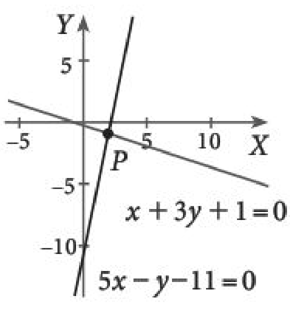


Figura 2.45

2. Encontrar la intersección de las rectas $3x - y - 5 = 0$ y $6x - 2y + 7 = 0$.

Solución:
Resolvemos simultáneamente:

$$\begin{aligned} 3x - y - 5 &= 0 \\ 6x - 2y + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por -2:

$$\begin{aligned} -6x + 2y + 10 &= 0 \\ 6x - 2y + 7 &= 0, \end{aligned}$$

sumamos y obtenemos:

$$17 = 0,$$

lo cual es falso. Por tanto, las rectas no se cortan, es decir, son paralelas como se puede ver en la figura 2.46.

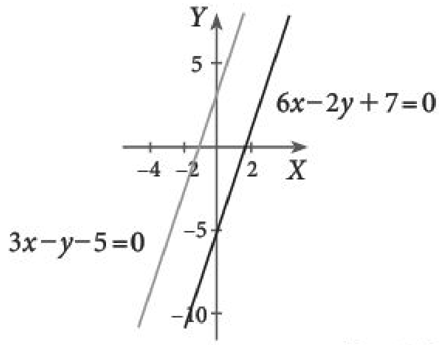


Figura 2.46

Pensamiento crítico

¿Cómo son las pendientes de las rectas $3x - y - 5 = 0$ y $6x - 2y + 7 = 0$?

3. Encontrar la intersección de las rectas $3x - 6y - 9 = 0$ y $2x - 4y - 6 = 0$.

Solución:
Al tratar de resolver simultáneamente:

$$\begin{aligned} 3x - 6y - 9 &= 0 \\ 2x - 4y - 6 &= 0; \end{aligned}$$

multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3, y obtenemos:

$$\begin{aligned} 6x - 12y - 18 &= 0 \\ 6x - 12y - 18 &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, que las ecuaciones originales son equivalentes y, entonces, las dos ecuaciones iniciales representan la misma recta (figura 2.47).

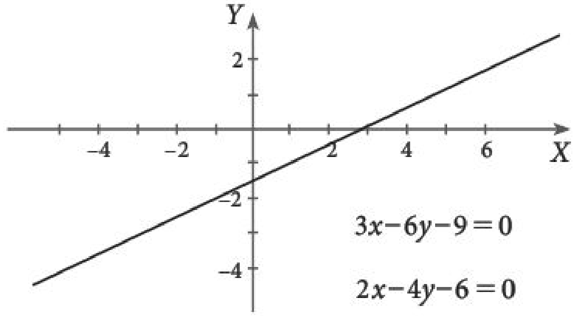


Figura 2.47

4. Con una barrica de 110 litros de vinagre se quiere llenar 168 botellas, unas de $\frac{1}{2}$ litro y otras de $\frac{3}{4}$. ¿Cuántas botellas de cada clase se utilizarán?

Solución:
Llamamos x a las botellas de $\frac{1}{2}$ litro y y a las de $\frac{3}{4}$ de litro. Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$x + y = 168$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 110.$$

Despejamos x de ambas ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 168 - y \\ x &= 220 - \frac{3}{2}y. \end{aligned}} \tag{2.11}$$

Igualamos las ecuaciones y resolvemos para obtener y:

$$168 - y = 220 - \frac{3}{2}y$$
$$104 = y.$$

Sustituimos este valor de y en cualquiera de las ecuaciones (2.11) para obtener el valor de x:

$$x = 168 - 104 = 64.$$

Se utilizarán 64 botellas de $\frac{1}{2}$ litro y 104 de $\frac{3}{4}$ de litro.

Comprobación:

Primera ecuación: $x + y = 64 + 104 = 168.$

Segunda ecuación: $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = \frac{1}{2}(64) + \frac{3}{4}(104) = 110.$

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso, determina si las rectas se cortan o no. Grafica las rectas.

1. $3x + 9y = 12$
   $x - 3y = 4.$
2. $14x - 10y = -5$
   $7x - 5y = -8.$
3. $3x + 2y = -4$
   $6x + 4y = 20.$
4. $5x - 8y = 2$
   $40x + 40y = 13.$
5. $x - 3y = 4$
   $3x - 9y = 12.$
6. $-12x + 4y = 11$
   $4x + 2y = -7.$

7. $6x - 3y = 2$
$2x + 6y = 3.$
8. $6x + 2y = -7$
$2x + 5y = -1.$
9. $3x - 4y = 4$
$2x - y = 6.$
10. $6x + 4y = -2$
$-3x - 2y = 1.$
11. $4x - y = -17$
$2x + y = 11.$
12. $\pi x + 2\pi y = 2$
$2\pi x + 6\pi y = 5.$

13. Determina si las rectas $5x - 6y = 0$, $2x - y - 17 = 0$ y $3x - 7y = 0$ forman un triángulo. Si es el caso, encuentra sus vértices.
14. Determina si las rectas $3x - y + 23 = 0$, $4x + 3y + 30 = 0$ y $3x - y + 11 = 0$ forman un triángulo. Si es el caso, encuentra sus vértices.
15. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y por el punto de intersección de las rectas $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ y $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$
16. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-4,5)$ y por el punto de intersección de las rectas $\frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1$ y $\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1.$
17. Prueba que la recta que pasa por los puntos $P(3,1)$ y $Q(7,-2)$ divide en dos partes iguales el segmento que tiene como extremos los puntos $A(-8,4)$ y $B(6,4)$.
18. Prueba que la recta que pasa por los puntos $P(2,-5)$ y $Q(-1,6)$ divide en dos partes iguales el segmento que tiene como extremos los puntos $A(-3,-3)$ y $B(4,4)$.
19. Determina si las rectas $x - y - 2 = 0$, $3x + y - 18 = 0$ y $3x + 4y - 27 = 0$ se cortan en un punto.
20. Prueba que la recta que pasa por los puntos $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $Q\left(\frac{1}{3},0\right)$ corta la recta que pasa por el origen y cuya pendiente es 1 en el punto de coordenadas $R\left(\frac{1}{2+3},\frac{1}{2+3}\right)$.
21. Encuentra los valores de las constantes a y b tales que las rectas $ax + 3y - 11 = 0$ y $-x + by - 8 = 0$ se cortan en el punto $P(2,5)$.
22. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo si se sabe que uno de ellos mide 20°, y de los restantes, el doble de uno menos el otro es igual a 50°?
23. La densidad del plomo menos la densidad de la plata es igual a 0.88. Si al doble de la densidad de la plata le restamos 9.59, se obtiene la densidad del plomo. Encuentra las densidades del plomo y la plata.
24. Escribe el número 49 como suma de dos números de tal manera que un cuarto de uno de ellos más un tercio del otro sea igual a 14.
25. Un número de dos cifras cumple con las siguientes condiciones: la cifra de las unidades es tres unidades menor que la de las decenas. Cinco veces la cifra de las decenas menos cinco veces la de las unidades es igual a cero. Encuentra la suma de la cifra de las unidades más la cifra de las decenas.

Ejercicios

Ángulo entre dos rectas

Consideremos dos rectas cualesquiera ℓ_1 y ℓ_2 que se corten en un punto A, como se ve en la figura 2.48. En A, se forman cuatro ángulos. Los ángulos θ_1 y θ_2 son suplementarios y cada uno de los restantes es igual a θ_1 o θ_2 por ser opuesto por el vértice. Así, sólo hay que decidir entre θ_1 y θ_2 para definir el ángulo entre las rectas. Esto crea cierta ambigüedad, para evitarla, distinguiremos entre el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2 que se obtiene al hacer girar, en sentido positivo (contrario al de las manecillas del reloj), a la recta ℓ_1 (recta inicial) hasta que coincida con la recta ℓ_2 (recta final), que en la figura es el ángulo θ_1, y el ángulo de ℓ_2 a ℓ_1 que en la figura representamos como θ_2.

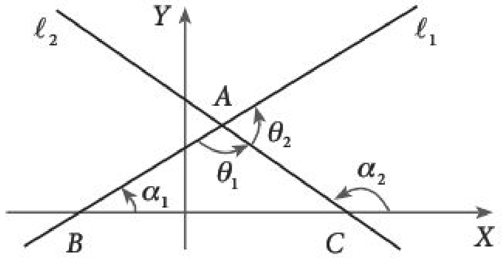


Figura 2.48

Por supuesto, al conocer θ_1 o θ_2, conocemos también el otro, ya que son suplementarios. La recta ℓ_1 corta el eje X en B y su ángulo de inclinación es α_1. La recta ℓ_2 corta el eje X en C y su ángulo de inclinación es α_2.

Consideremos el triángulo ABC; como la suma de sus ángulos interiores es de $180°$, tenemos:

$$\alpha_1 + \theta_1 + \left(180° - \alpha_2\right) = 180°$$

es decir,

$$\boxed{\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1,} \tag{2.12}$$

así que, para encontrar el ángulo formado por las dos rectas, calculamos el ángulo de inclinación de la recta final (ℓ_2) menos el ángulo de inclinación de la recta inicial (ℓ_1).

Si ninguna de las rectas es vertical, podemos también expresar la tangente de θ_1 en términos de las pendientes de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, recordando la fórmula de la tangente de la diferencia de dos ángulos:

$$\tan\theta_1 = \tan\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \tan\alpha_1}.$$

Si llamamos m_1 y m_2 a las pendientes de ℓ_1 y ℓ_2, entonces:

$$m_1 = \tan\alpha_1 \text{ y } m_2 = \tan\alpha_2$$

y al sustituir en la ecuación anterior, obtenemos:

$$\boxed{\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}.} \tag{2.13}$$

Ahora, calculamos el ángulo θ_2. Como θ_1 y θ_2 son suplementarios, entonces,

$$\theta_2 = 180° - \theta_1,$$

de donde:

$$\tan\theta_2 = \tan\left(180° - \theta_1\right) = -\tan\theta_1,$$

es decir,

$$\tan\theta_2 = -\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Observamos que, en cualquier caso, en el numerador aparece la pendiente de la recta final menos la pendiente de la recta inicial.

Si las ecuaciones, en la forma general, de ℓ_1 y ℓ_2 son:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

respectivamente, entonces sus pendientes son:

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

Sustituyendo estos valores en (2.11):

$$\tan\theta_1 = \frac{-\frac{A_2}{B_2} - \left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}{1 + \left(-\frac{A_2}{B_2}\right)\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)},$$

simplificamos las fracciones y obtenemos:

$$\boxed{\tan\theta_1 = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.} \qquad (2.14)$$

En general, la fórmula (2.14) es más fácil de evaluar que la fórmula (2.13), con la ventaja adicional de que (2.14) sirve para calcular el ángulo entre dos rectas, aun en el caso de que una de ellas sea vertical.

Dadas las rectas ℓ_1 y ℓ_2 cuyas ecuaciones son $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, respectivamente, la tangente del ángulo θ_1 de ℓ_1 a ℓ_2 es $\tan\theta_1 = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$.

Una forma de recordar esta fórmula es la siguiente:

Se desea encontrar la tangente del ángulo θ_1 de la recta ℓ_1 a la recta ℓ_2. Escribimos sus ecuaciones generales en ese orden:

$$\begin{aligned} \ell_1 &: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ \ell_2 &: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0. \end{aligned}$$

En cada una de ellas eliminamos las variables, los signos y 0:

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}$$

Para obtener el numerador de la fracción que nos da $\tan\theta_1$, hacemos la operación indicada a continuación:

$$\begin{matrix} A_1 & \overset{-}{\nearrow\!\!\!\!\searrow} & B_1 \\ A_2 & & B_2 \end{matrix}$$

Es decir, $A_1B_2 - A_2B_1$.

Para obtener el denominador hacemos las operaciones:

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ \downarrow & \downarrow \\ A_2 & B_2 \end{matrix}$$

es decir, $A_1A_2 + B_1B_2$.

Al escribirlas como cociente, obtenemos el lado derecho de la fórmula:

$$\tan\theta_1 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Dadas las rectas ℓ_1 y ℓ_2 cuyas ecuaciones son $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$, respectivamente, la tangente del ángulo θ_1 de ℓ_1 a ℓ_2 es $\tan\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2m_1}$.

Cuando dos rectas son paralelas o coinciden, entonces convenimos en decir que forman un ángulo de 0°.

Ejemplos

1. Encontrar el ángulo de la recta $x + 3y + 2 = 0$ a la recta $-x + 3y + 5 = 0$.

Solución:

Llamamos θ al ángulo buscado. Determinamos su valor aplicando la fórmula (2.12). Como, en este caso:

$$\begin{matrix} A_1 = 1 & \qquad & B_1 = 3 \\ A_2 = -1 & \qquad & B_2 = 3 \end{matrix}$$

entonces,

$$\tan\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{(1\cdot 3) - ((-1)\cdot 3)}{(1\cdot(-1)) + (3\cdot 3)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

o sea, θ es el ángulo cuya tangente es igual a $\frac{3}{4}$ y este es 36.8°.

Otra forma para obtener la solución es encontramos las pendientes de las rectas:

$$x + 3y + 2 = 0 \qquad\qquad -x + 3y + 5 = 0$$

$$3y = -x - 2 \qquad\qquad 3y = x - 5$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \qquad\qquad y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}.$$

De donde, $m_1 = -\frac{1}{3}$ y $m_2 = \frac{1}{3}$.

Utilizamos ahora la fórmula (2.11) y obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4},$$

que es la misma ecuación que ya resolvimos: $\theta = 36.8°$ (figura 2.49).

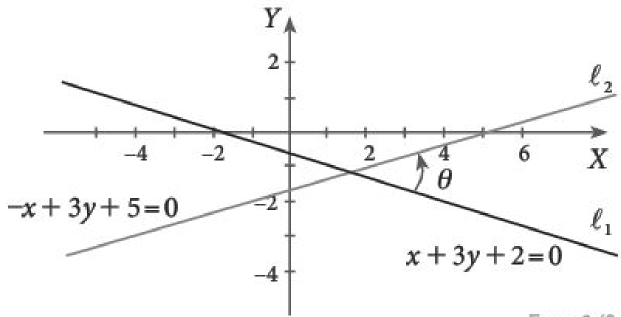


Figura 2.49

2. Encontrar el ángulo de la recta $5x - 3y = 4$ a la recta $x = 7$.

Solución:

Llamamos θ al ángulo buscado. La recta $x = 7$ es vertical y, por tanto, no tiene pendiente, así que no podemos utilizar la fórmula (2.13); pero, en cambio, la fórmula (2.14) sí es aplicable. Observamos que, en este caso:

$$A_1 = 5 \qquad B_1 = -3$$

$$A_2 = 1 \qquad B_2 = 0.$$

Entonces:

$$\tan\theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{(5\cdot 0) - (1(-3))}{(5\cdot 1) + ((-3)\cdot 0)} = \frac{3}{5}.$$

El ángulo cuya tangente es $\frac{3}{5}$ es 31° (figura 2.50).

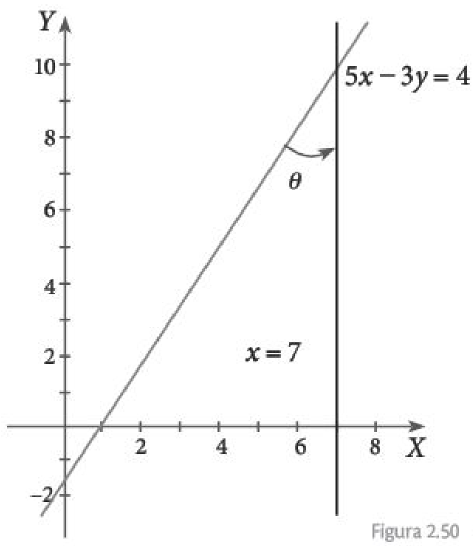


Figura 2.50

3. Encontrar el ángulo agudo entre las rectas $2x-3y-6=0$ y $x+5y+10=0$.

Solución:
Llamamos ℓ_1 a la recta $2x-3y-6=0$ y ℓ_2 a la recta $x+5y+10=0$. Puesto que ambas rectas están escritas en la forma general, aplicaremos la fórmula (2.12) para encontrar el ángulo de ℓ_1 a ℓ_2.

En este caso, tenemos que:

$$A_1=2 \qquad B_1=-3$$
$$A_2=1 \qquad B_2=5;$$

entonces:

$$\tan\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}=\frac{(2\cdot 5)-(1(-3))}{(2\cdot 1)+((-3)\cdot 5)}=-1.$$

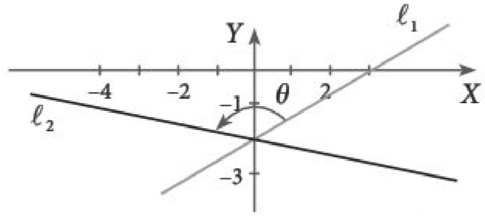


Figura 2.51

Utilizando una calculadora, encontramos que el ángulo cuya tangente es -1 es el ángulo obtuso $135°$. Este ángulo se señala en la figura 2.51.

Entonces, el ángulo agudo buscado es su suplementario: $180°-135°=45°$.

4. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son $A(2,6)$, $B(-3,-1)$ y $C(4,-5)$?

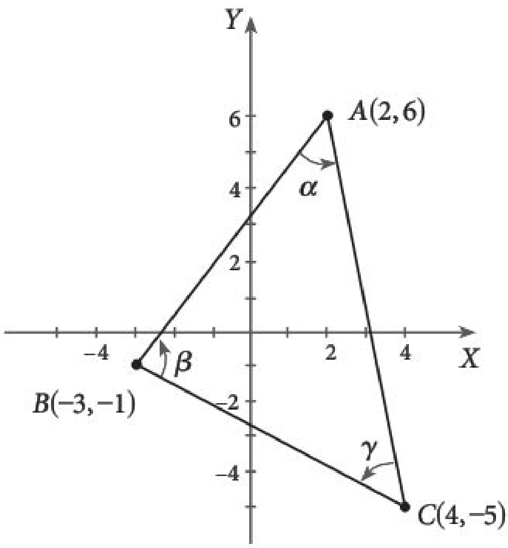


Figura 2.52

Solución:
Dibujamos el triángulo (figura 2.52).

Para encontrar el ángulo α calculamos las pendientes m_1 y m_3 de los lados AB y AC, respectivamente; entonces:

$$m_1=\frac{6-(-1)}{2-(-3)}=\frac{7}{5} \quad \text{y} \quad m_3=\frac{6-(-5)}{2-4}=-\frac{11}{2}.$$

Así:

$$\tan\alpha=\frac{m_3-m_1}{1+m_3m_1}=\frac{-\frac{11}{2}-\frac{7}{5}}{1+\left(-\frac{11}{2}\right)\left(\frac{7}{5}\right)}=\frac{69}{67}.$$

Entonces,

$$\alpha\approx 45.85°.$$

Calculamos la pendiente m_2 del lado BC:

$$m_2=\frac{-1-(-5)}{-3-4}=-\frac{4}{7}.$$

Ahora, calculamos el ángulo β, es decir,

$$\tan\beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{7}{5} - \left(-\frac{4}{7}\right)}{1 + \frac{7}{5}\left(-\frac{4}{7}\right)} = \frac{69}{7}, \text{ de donde } \beta \approx 84.20°.$$

Y el ángulo γ es:

$$\tan\gamma = \frac{m_2 - m_3}{1 + m_2 m_3} = \frac{-\frac{4}{7} - \left(-\frac{11}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{11}{2}\right)} = \frac{69}{58}.$$

Así, $\gamma \approx 49.95°$.

Observación:
Se podría dar también solución al último ejemplo aplicando la fórmula (2.13) a cada uno de los tres pares de lados y, si en algún caso obtenemos un ángulo obtuso, entonces lo cambiamos por su suplementario.

Ejemplos

Ejercicios

Encuentra el ángulo de la primera recta a la segunda.

1. $x + 3y = 0$ y $x - y + 5 = 0$.
2. $5x + 6y - 7 = 0$ y $4x - 3y - 11 = 0$.
3. $x - 2y - 1 = 0$ y $x - y + 1 = 0$.
4. $4x + y - 7 = 0$ y $x - 6y + 8 = 0$.
5. $x - 2y + 5 = 0$ y $3x - y + 10 = 0$.
6. $2x + y - 1 = 0$ y $3x - y - 4 = 0$.
7. $y + 3 = 0$ y $2x + y + 5 = 0$.
8. $x - 5 = 0$ y $x + 2y - 5 = 0$.

9. Un cuadrilátero tiene vértices $A(2,3)$, $B(3,2)$, $C(2,1)$ y $D(1,2)$. Encuentra las pendientes de los lados y los ángulos interiores del cuadrilátero. Grafícalo.
10. Un triángulo tiene vértices $A(-2,6)$, $B(-5,-1)$, $C(6,-2)$. Encuentra las pendientes de los lados y los ángulos interiores del triángulo. Grafícalo.
11. Una recta ℓ_1 tiene pendiente $\frac{3}{4}$. El ángulo que se forma, al ir de esta recta a ℓ_2, es de 45°. Encuentra la pendiente de la recta ℓ_2.
12. Una recta ℓ_1 tiene pendiente 2. El ángulo que se forma, al ir de esta recta a ℓ_2, es de 135°. Encuentra la pendiente de la recta ℓ_2.
13. Los lados de un triángulo se encuentran sobre las rectas $4x + 3y - 19 = 0$, $3x - 4y + 17 = 0$ y $2x - 11y + 3 = 0$. Encuentra los ángulos interiores del triángulo y di qué tipo de triángulo es.

Paralelismo y perpendicularidad

Un número de dos cifras cumple con las siguientes condiciones: la cifra de las unidades es tres unidades menor que la de las decenas. Cinco veces la cifra de las decenas menos cinco veces la de las unidades es igual a cero. Encontrar el número.

Solución:
Llamamos d a la cifra de las decenas y u a la de las unidades. Expresamos la información en lenguaje algebraico:

$$\begin{aligned} u &= d + 3 \\ 5d - 5u &= 0. \end{aligned}$$

Aprovechamos que u está despejada en la primera ecuación del sistema para sustituirla en la segunda:

$$\begin{aligned} 5d - 5(d + 3) &= 0 \\ 5d - 5d - 15 &= 0 \\ -15 &= 0. \end{aligned}$$

Como $-15 \neq 0$ concluimos que el sistema no tiene solución. No hay un número que satisfaga las condiciones dadas.

Recordamos que esto significa, geométricamente, que las rectas representadas por estas ecuaciones no se cortan, es decir, son paralelas.

Observamos que, al escribir las ecuaciones en la forma general:

$$\begin{aligned} -d + u - 3 &= 0 \\ 5d - 5u &= 0, \end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} A_1 &= -1 \qquad & B_1 &= 1 \\ A_2 &= 5 \qquad & B_2 &= -5; \end{aligned}$$

entonces, si θ es el ángulo de la primera a la segunda de las dos rectas, obtenemos:

$$\tan\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{(-1)(-5) - 5(1)}{(-1)5 + 1(-5)} = \frac{0}{-10} = 0.$$

De donde $\theta = 0°$.

Lo visto en el ejemplo anterior concuerda con nuestra convención:

- Si dos rectas coinciden o son paralelas, entonces forman un ángulo de 0°. Otro caso particularmente importante es cuando dos rectas forman un ángulo de 90°.
- Si el ángulo formado es de 90°, decimos que las rectas son *perpendiculares*.

Relación entre las pendientes de rectas paralelas o perpendiculares

A partir de la fórmula (2.14) podemos obtener condiciones que nos indiquen que dos rectas no verticales:

$$\ell_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$\ell_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

sean paralelas o perpendiculares.

Las dos rectas son paralelas si forman un ángulo de $0°$, entonces $\tan 0° = 0$ y por consiguiente el numerador de (2.14) es igual a cero:

$$\boxed{A_1B_2 - A_2B_1 = 0.} \tag{2.15}$$

Como ninguna de las rectas es vertical tenemos $B_1B_2 \neq 0$ y podemos dividir la ecuación anterior entre B_1B_2,

$$0 = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{B_1B_2} = \frac{A_1}{B_1} - \frac{A_2}{B_2};$$

como las pendientes de las rectas están dadas por:

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

obtenemos:

$$-m_1 + m_2 = 0.$$

Despejando m_2, tenemos:

$$\boxed{m_2 = m_1,} \tag{2.16}$$

es decir, las pendientes de dos rectas paralelas no verticales son iguales.

Cuando las rectas son perpendiculares, el ángulo formado por ellas es de $90°$ y la tangente de $90°$ no está definida; esto sucede cuando el denominador de (2.14) es igual a cero, luego la condición para que dos rectas sean perpendiculares es:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0.} \tag{2.17}$$

Se dice que el uso de la letra m para representar la pendiente de una recta proviene de la expresión *modulus of slope*, que quiere decir medida de inclinación.

Si dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas o son la misma recta: $m_1 = m_2$.

Como ninguna de las rectas es vertical, tenemos que $B_1B_2 \neq 0$ y podemos dividir la ecuación anterior entre B_1B_2:

$$0 = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{B_1B_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} + 1;$$

como las pendientes de las rectas están dadas por:

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

obtenemos:

$$m_1m_2 + 1 = 0;$$

es decir,

$$m_1m_2 = -1;$$

Si el producto de las pendientes de dos rectas es igual a -1, entonces las rectas son perpendiculares: $m_1m_2 = -1$.

despejando m_1, tenemos:

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2},} \tag{2.18}$$

es decir, la pendiente de una de ellas es el negativo del recíproco de la otra.

Ejemplos

1. Determinar si las rectas $-5x + 3y + 18 = 0$ y $3x + 5y - 4 = 0$ son perpendiculares.

   Solución:
   Encontramos las pendientes de las rectas:

$$-5x + 3y + 18 = 0$$
$$y = \frac{5}{3}x - 6,$$

   así $m_1 = \frac{5}{3}$ y

$$3x + 5y - 4 = 0$$
$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5},$$

   de donde $m_2 = -\frac{3}{5}$. Ahora calculamos el producto de las pendientes:

$$m_1m_2 = \frac{5}{3}\left(-\frac{3}{5}\right) = -1.$$

   Por tanto, las rectas son perpendiculares.

2. Encontrar la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto $P(2,1)$ y es perpendicular a la recta ℓ_2, cuya ecuación es $2x-3y-1=0$.

Solución:
Escribimos la ecuación de ℓ_2 en la forma pendiente-ordenada al origen para determinar su pendiente:

$$\begin{aligned} 2x-3y-1&=0\\ -3y&=-2x+1\\ y&=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

así que su pendiente es $m_2=\frac{2}{3}$; entonces, la pendiente de ℓ_1 es:

$$m_1=-\frac{1}{m_2}=-\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}.$$

Utilizamos ahora la forma punto-pendiente para encontrar la ecuación de ℓ_1:

$$\begin{aligned} y-1&=-\frac{3}{2}(x-2)\\ 2(y-1)&=-3(x-2)\\ 2y-2&=-3x+6\\ 3x+2y-8&=0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de ℓ_1 es $3x+2y-8=0$ (figura 2.53).

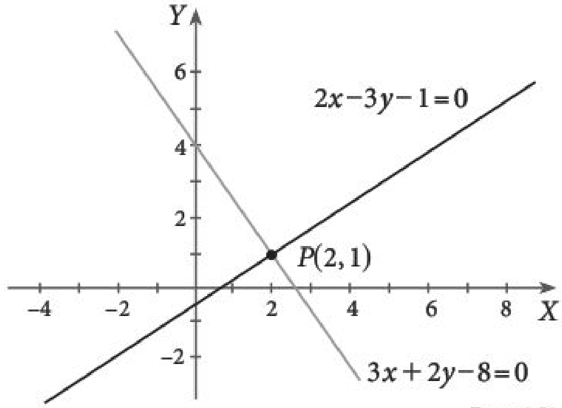


Figura 2.53

3. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $P(3,4)$ y es paralela a la recta $2x-3y=10$.

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen para determinar la pendiente:

$$\begin{aligned} 2x-3y&=10\\ y&=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

La pendiente de la recta es $\frac{2}{3}$. La recta que buscamos tiene esa misma pendiente y pasa por $P(3,4)$; por consiguiente, su ecuación es (figura 2.54):

$$\begin{aligned} y-4&=\frac{2}{3}(x-3)\\ 2x-3y+6&=0. \end{aligned}$$

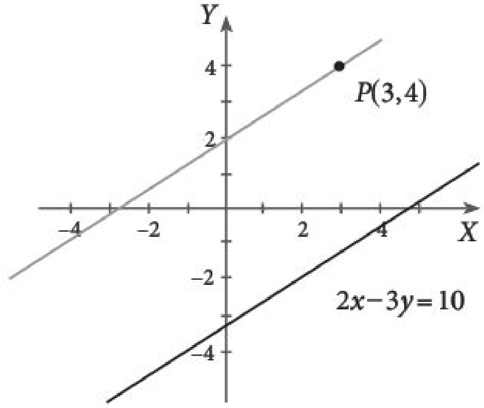


Figura 2.54

4. Encontrar la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por $Q(-3,-2)$ y es perpendicular a la recta ℓ_2, cuya ecuación es $x=4$.

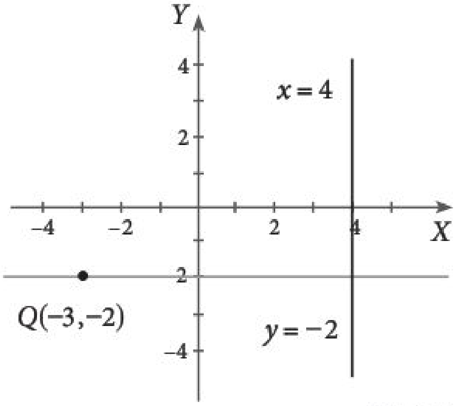


Figura 2.55

Solución:

La recta $x=4$ es vertical, así que una recta perpendicular a ella debe ser horizontal; por lo tanto, todos sus puntos tienen la misma segunda coordenada. Como queremos que pase por el punto $Q(-3,-2)$, su ecuación debe ser $y=-2$ (figura 2.55).

Cuando una recta ℓ_1 es vertical, entonces la otra recta ℓ_2 es:

- Paralela a ℓ_1 si ℓ_2 es también vertical.
- Perpendicular a ℓ_1 si ℓ_2 es horizontal.

Ejemplos

Pensamiento crítico

¿Cómo determinas si dos rectas con la misma pendiente son paralelas o se trata de la misma recta?

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular a la recta dada.

1. $P(-3,1)$; $5x+6y-13=0$.
2. $P(-1,1)$; $2x-y+10=0$.
3. $P(4,-2)$; $7x-3y-1=0$.
4. $P(0,3)$; $5x-y-3=0$.
5. $P(-1,-5)$; $x=-2$.
6. $P(2,2)$; $y=1$.
7. $P(-9,-12)$; $2x+9y=0$.
8. $P(7,0)$; $4x+7y+21=0$.
9. $P\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; $x-y+8=0$.

Encuentra la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto dado y es paralela a la recta dada.

10. $P(-2,-3)$; $y=\frac{3}{4}x+4$.
11. $P\left(\frac{4}{3},0\right)$; $x+5y-12=0$.
12. $P(-2.5,4)$; $y=-2$.
13. $P(5,5)$; $x=3$.
14. $P\left(\sqrt{2},-1\right)$; $x=y+5$.
15. $P(4,3)$; $x+\sqrt{2}y=0$.
16. $P(0,8)$; $11x+5y+7=0$.
17. $P(3,-2)$; $x-y=0$.
18. $P\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$; $12x-4y-1=0$.

Determina si los siguientes pares de rectas se cortan en un punto, son paralelas o son la misma recta. En el caso de que se corten en un punto, analiza si son perpendiculares.

19. $4x+y-3=0$ y $2x-5y+4=0$.
20. $3x-y+1=0$ y $x+3y-15=0$.
21. $2x-y-3=0$ y $8x-4y+3=0$.
22. $6x-3y+32=0$ y $4x-2y+2=0$.
23. $4x-y+6=0$ y $2x-5y+12=0$.
24. $x-y+2=0$ y $x+y+5=0$.
25. $5x-y-23=0$ y $23x+5y+7=0$.
26. $3x-4y+4=0$ y $-6x+8y+2=0$.

27. Dado el cuadrilátero con vértices en $A(0,0)$, $B(6,0)$, $C(1,2)$, $D(5,4)$, prueba que las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos del cuadrilátero forman un paralelogramo. Represéntalo gráficamente.
28. Dado el paralelogramo con vértices $A(0\,0)$, $B(5,0)$, $C(3,4)$, $D(8,4)$, prueba lo siguiente:
    a. Que las diagonales de este paralelogramo son perpendiculares. Represéntalo gráficamente.
    b. Que este paralelogramo es un rombo. Represéntalo de manera gráfica.
29. Dado el paralelogramo con vértices $A(-1,3)$, $B(3,3)$, $C(-3,-2)$ y $D(1,-2)$, prueba que sus diagonales se cortan en el punto medio. Represéntalo de modo gráfico.
30. Dado el triángulo rectángulo con vértices $A(0,0)$, $B(4,0)$ y $C(0,-6)$, prueba que la distancia de cualquier vértice al punto medio de la hipotenusa es la misma. Represéntalo gráficamente.
31. Dados los puntos $A(-2,3)$, $B(8,8)$, $C(2,2)$, $D(4,3)$, $E(0,-2)$, $F(6,1)$:
    a. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por A y B, C y D, E y F.
    b. Describe cómo son las rectas que encontraste.
    c. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por A y E, B y F. Encuentra las coordenadas del punto P, en que se cortan las dos rectas.
    d. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por E y C, F y D. Encuentra las coordenadas del punto Q, en que se cortan las dos rectas.
    e. Encuentra las ecuaciones de las rectas que pasan por A y C, B y D. Encuentra las coordenadas del punto R, en que se cortan las dos rectas.
    f. Prueba que los puntos P, Q y R son colineales.
    g. Grafica en un mismo plano todas las rectas y puntos que encontraste.

Ejercicios

Desigualdades y regiones del plano

Una recta divide el plano en tres conjuntos ajenos entre sí:

- El conjunto de puntos que están en la recta.
- La región formada por el conjunto de puntos que están a un lado de la recta.
- La región formada por el conjunto de puntos que están al otro lado de la recta.

Regiones del plano determinadas por rectas no verticales

Describir las regiones determinadas por la recta $x + 2y - 8 = 0$.

Solución:

Escribimos la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

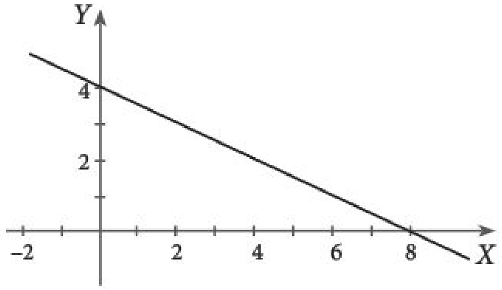


Figura 2.56

Graficándola, obtenemos la figura 2.56.

Observamos que la recta divide el plano en tres conjuntos:

- Los puntos que están en la recta.
- Los puntos que están arriba de la recta.
- Los puntos que están abajo de la recta.

Sabemos que los puntos que están en la recta son los que satisfacen la ecuación:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

Observamos que si nos movemos verticalmente hacia arriba, la ordenada del punto es cada vez mayor. Así, los puntos que están arriba de la recta satisfacen la siguiente desigualdad:

$$y > -\frac{1}{2}x + 4.$$

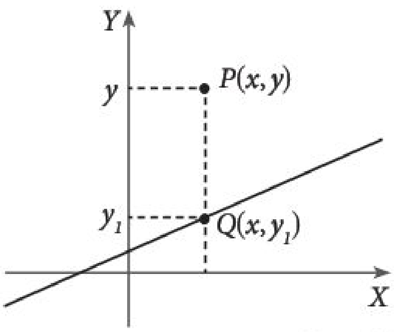


Figura 2.57

De la misma manera, si nos movemos verticalmente hacia abajo, la ordenada del punto es cada vez menor, por lo que los puntos que están abajo de la recta satisfacen la desigualdad:

$$y < -\frac{1}{2}x + 4.$$

Consideremos una recta no vertical cuya ecuación es $y = mx + b$; los puntos que están en la recta son precisamente los que satisfacen su ecuación. Consideremos ahora un punto $P(x, y)$ que esté arriba de la recta, como se muestra en la figura 2.57.

La recta paralela al eje Y corta la recta dada en un punto Q que tiene la misma primera coordenada que P. Al trazar una paralela al eje X desde Q obtenemos la segunda coordenada de Q:

$$Q(x, y_1).$$

Puesto que Q está en la recta, tenemos:

$$y_1 = mx + b,$$

además, como P está arriba de la recta, la segunda coordenada de P es mayor que la de Q, es decir,

$$y > y_1;$$

por tanto,

$$\boxed{y > mx + b.} \tag{2.19}$$

Como el punto P fue elegido de manera arbitraria, arriba de la recta, cualquier otro punto que esté de ese mismo lado de la recta satisface la desigualdad (2.19).

Si tomamos un punto cualquiera que esté debajo de la recta, obtendremos la desigualdad:

$$y < mx + b.$$

En resumen, una recta no vertical con ecuación $y = mx + b$ divide el plano en tres conjuntos:

- Los puntos que están en la recta que satisfacen la ecuación $y = mx + b$.
- Los puntos que están arriba de la recta que satisfacen la desigualdad $y > mx + b$.
- Los puntos que están debajo de la recta que satisfacen la desigualdad $y < mx + b$.

Si $y = mx + b$ es una recta no vertical, los puntos que están arriba de la recta satisfacen la desigualdad $y > mx + b$.

Si $y = mx + b$ es una recta no vertical, los puntos que están debajo de la recta satisfacen la desigualdad $y < mx + b$.

Ejemplos

1. Describir las regiones determinadas por la recta $y = -7$.

Solución:

Los puntos que están en la recta satisfacen $y = -7$, los que se encuentran arriba de la recta satisfacen la desigualdad $y > -7$ y los que se hallan debajo de la recta satisfacen la desigualdad $y < -7$ (figura 2.58).

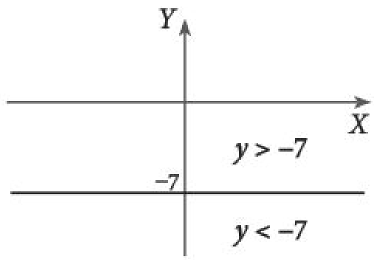


Figura 2.58

2. Describir mediante desigualdades la región sombreada en la figura 2.59, limitada por las rectas ℓ_1: $6x + 2y + 3 = 0$ y ℓ_2: $x + 2y - 16 = 0$.

Solución:

Escribimos las ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen; es decir, despejamos la variable y:

$$y = -3x - \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}x + 8.$$

Los puntos que están en la zona sombreada están debajo de la recta ℓ_1 y, por tanto, satisfacen:

$$y < -3x - \frac{3}{2},$$

y están arriba de la recta ℓ_2 así que satisfacen:

$$y > -\frac{1}{2}x + 8.$$

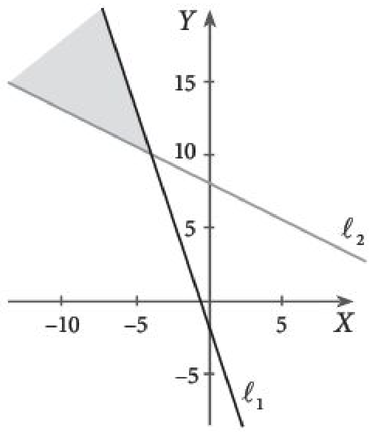


Figura 2.59

Por tanto, la zona sombreada consiste en los puntos (x,y) que satisfacen ambas desigualdades:

$$y > -\frac{1}{2}x + 8 \quad \text{y} \quad y < -3x - \frac{3}{2},$$

que podemos resumir en:

$$-\frac{1}{2}x + 8 < y < -3x - \frac{3}{2}.$$

3. Encontrar los valores de x para los cuales la recta $y = -6x + 10$ está debajo de la recta $y = -2x + 2$.

Solución:
Resolvemos la desigualdad:

$$-6x + 10 < -2x + 2$$
$$-6x + 2x < 2 - 10$$
$$-4x < -8,$$

al dividir entre -4 se invierte la desigualdad:

$$x > \frac{-8}{-4}$$
$$x > 2.$$

Si $x > 2$, entonces $y = -6x + 10$ está debajo de $y = -2x + 2$ (figura 2.60).

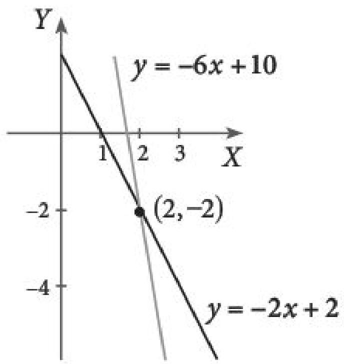


Figura 2.60

4. Graficar la región del plano que satisface las desigualdades $y < 3x + 2$ y $y < 6 - 7x$.

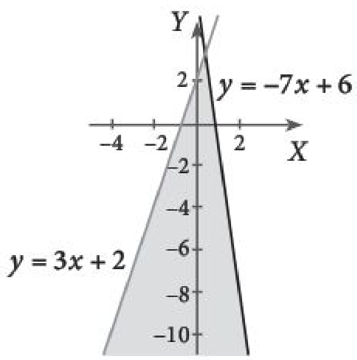


Figura 2.61

Solución:
Primero encontramos la solución de cada una de ellas. Los puntos que satisfacen $y < 3x + 2$ son los que están debajo de la recta $y = 3x + 2$, los que satisfacen $y < 6 - 7x$ son los que están abajo de la recta $y = 6 - 7x$..

Por tanto, los puntos que satisfacen ambas desigualdades son los que están debajo de cada una de las dos rectas (figura 2.61).

Regiones del plano determinadas por rectas verticales

Las únicas rectas para las que no se puede proceder de la manera anterior son las rectas verticales, ya que no tienen pendiente. Sin embargo, dada una recta vertical $x = k$, esta también divide el plano en tres regiones:

- Los puntos que están en la recta, que son los que satisfacen la ecuación $x = k$.
- Los puntos que están a la derecha de la recta, que son los que satisfacen la desigualdad $x > k$.
- Los puntos que están a la izquierda de la recta, que son los que satisfacen la desigualdad $x < k$.

Dada una recta vertical $x = k$, los puntos que están a la derecha de la recta son los que satisfacen la desigualdad $x > k$.

Dada una recta vertical $x = k$, los puntos que están a la izquierda de la recta son los que satisfacen la desigualdad $x < k$.

Ejemplos

1. Identificar las regiones determinadas por la recta $x = 5$.

Solución:

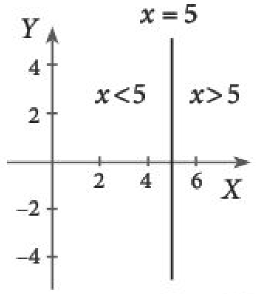


Figura 2.62

2. Graficar la región determinada por las desigualdades $x > 3$, $y < -x + 9$ y $y > -5$.

Solución:

La región que determina la desigualdad $x > 3$ son los puntos que están a la derecha de la recta $x = 3$.

La región que determina la desigualdad $y < -x + 9$ son los puntos que están debajo de la recta $y = -x + 9$.

La región que determina la desigualdad $y > -5$ son los puntos que están arriba de la recta $y = -5$.

Así, la región determinada por las tres condiciones se muestra en la figura 2.63:

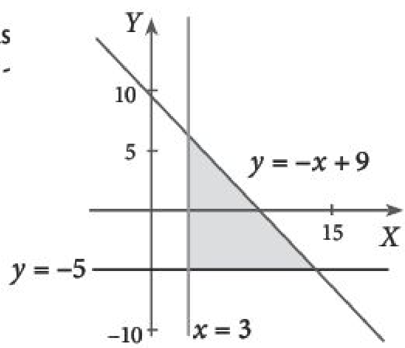


Figura 2.63

Punto de equilibrio

Un fabricante de cochecitos de juguete tiene como gastos fijos la cantidad de \$630 diarios y el costo de cada cochecito es de \$15. El precio de venta es de \$20. Durante el primer mes produjo y vendió 3 528 cochecitos. ¿Cuál fue la ganancia en ese mes? ¿Cuántos cochecitos debe producir durante el mes para que —manteniendo ese precio— no tenga pérdidas?

Solución:
Llamamos x al número de cochecitos producidos en un mes. El costo total de producción es:

$$y = C(x) = (630)(30) + 15x = 18900 + 15x,$$

los ingresos al venderlos son:

$$y = I(x) = 20x.$$

Calculamos la utilidad obtenida al venderlos, que es la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$I(x) - C(x) = 20x - 18900 - 15x = 5x - 18900.$$

Puesto que en el mes en cuestión se vendieron 3 528 cochecitos, entonces la utilidad fue:

$$5(3528) - 18900 = -1260.$$

La fábrica perdió durante el mes \$1 260.
Para que no haya pérdida en el mes, la utilidad deberá ser no negativa, es decir:

$$20x - 18900 - 15x \geq 0;$$

simplificando:

$$\begin{aligned} 5x - 18900 &\geq 0 \\ x &\geq \frac{18900}{5} \\ x &\geq 3780. \end{aligned}$$

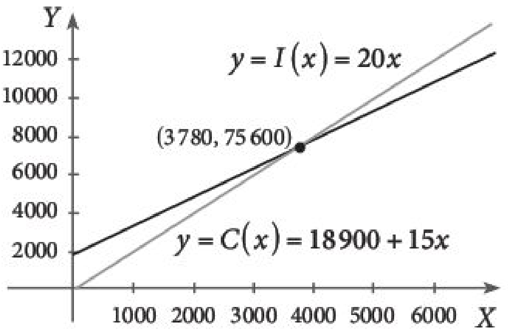


Figura 2.64

Para que no haya pérdidas, es necesario que produzca y venda por lo menos 3 780 cochecitos.

Observamos en la figura 2.64 que cuando x es mayor que 3780, la recta $y = 20x$ está arriba de la recta $y = 18900 + 15x$, es decir, la cantidad obtenida al vender esos x artículos es mayor que el costo de su producción y, por consiguiente, hay ganancia. Si, por el contrario, x es menor que 3 780, entonces la recta $y = 20x$ está debajo de $y = 18900 + 15x$, es decir, que la cantidad obtenida al vender esos x productos es menor que el costo de producción, en cuyo caso hay pérdidas.

El punto de intersección de las dos rectas se conoce como *punto de equilibrio de costo-ingreso.*

El precio de un artículo en el mercado está relacionado con el número de artículos que pueden venderse. Cuando el precio de un producto es muy alto, los consumidores no lo adquieren; en cambio, cuando es bajo, se vende muy bien. La ecuación que relaciona el precio de un artículo con la cantidad de ellos que los consumidores están dispuestos a comprar se llama *ecuación de demanda.*

La ecuación de demanda más simple es una ecuación lineal como

$$p = ax + b,$$

donde p es el precio por unidad, x es el número de artículos, a y b son constantes. Con esto se ha definido el precio en función del número de artículos; de esta forma se pueden calcular fácilmente los ingresos brutos y la utilidad neta de una empresa que vende x artículos a un precio p cada uno.

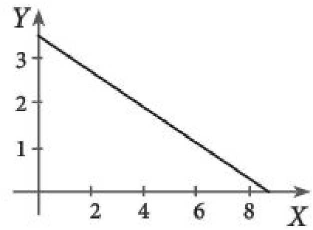


Figura 2.65

Es claro que si el precio de los artículos aumenta, entonces se venderán menos artículos, mientras que si baja el precio, se venderán más. Esto significa que la pendiente a de la recta es negativa (figura 2.65).

Puesto que tanto el precio como el número de artículos vendidos son cantidades no negativas, únicamente representamos la parte de la recta que se encuentra en el primer cuadrante.

De la misma manera, la cantidad de artículos que un fabricante está dispuesto a colocar en el mercado está relacionada con el precio al que puede venderlos. Si el precio de los artículos es alto, el fabricante producirá muchos artículos; en cambio, si el precio es bajo, producirá pocos, con la esperanza de crear escasez. La relación entre el número de artículos que pueden colocarse en el mercado y su precio se llama *ecuación de oferta*. Nuevamente, la ecuación de oferta más simple es la ecuación lineal, aunque en este caso, así como en el anterior, en la vida real, se usan ecuaciones más complejas. Entonces, la ecuación de oferta se escribe como:

$$p = cx + d,$$

donde p es el precio ofrecido por unidad, x es el número de artículos que se colocan a la venta, c y d son constantes.

En este caso, la pendiente c es positiva, pues cuando el precio es alto, los fabricantes tratan de producir muchos artículos y, cuando es bajo, producen pocos (figura 2.66).

El punto en el que la cantidad de artículos demandada por los consumidores coincide con el número de artículos que ofrece el productor es donde se intersecan las rectas y se llama *punto de equilibrio de mercado.*

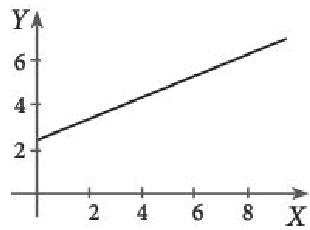


Figura 2.66

Ejemplos

1. Una fábrica de colchones lanza al mercado uno de sus productos y encuentra que no es aceptado. Por esto, decide variar el precio, de acuerdo con la experiencia obtenida y las políticas de la empresa; al hacerlo se determinan dos ecuaciones: una de oferta y otra de demanda. Encuentra esas ecuaciones, suponiendo que son lineales, a partir de la siguiente información:
   - **a.** La fábrica fija un precio de \$2 900, observa que durante un mes no se registra ninguna venta.
   - **b.** Decide disminuir el precio a \$2 700 y logra vender 100 colchones en un mes.
   - **c.** Un estudio de mercado muestra que por cada \$200 que se disminuyen en el precio, la demanda se incrementa en 100 unidades.
   - **d.** El fabricante no está dispuesto a vender cada colchón en menos de \$1 700.
   - **e.** Ofrece a un comerciante 800 colchones a \$2 000 cada uno.

   Solución:

   Primero, encontraremos la ecuación de la demanda: $y = ax + b$, en la que usamos la variable y en lugar de p. O sea, debemos determinar a y b. Para ello, escribimos los datos como pares ordenados. Observamos que no hay demanda si el precio es \$2 900; es decir, el par ordenado:

$$(0, 2\,900),$$

   satisface la ecuación y tenemos:

$$\begin{aligned} 2\,900 &= 0a + b \\ 2\,900 &= b. \end{aligned}$$

   De la misma manera, según nos dicen, el punto:

$$(100,\ 2\,700)$$

   también pertenece a la recta $y = ax + b$, por lo que:

$$2\,700 = 100a + b.$$

   Como ya sabemos que $b = 2\,900$ tenemos:

$$\begin{aligned} 2700 &= 100a + 2\,900 \\ -\frac{200}{100} &= a \\ a &= -2. \end{aligned}$$

   Así, la ecuación de demanda es:

$$y = -2x + 2\,900.$$

Ahora encontramos la ecuación de la oferta: $y = cx + d$ donde —como antes— usamos la variable y en lugar de p.

Que el fabricante no esté dispuesto a vender cada artículo en menos de \$1 700 lo interpretamos como que el número de artículos que vendería en \$1 700 sería cero. Además, como ofrece 800 colchones a \$2 000 cada uno, tenemos que los puntos:

$$(0, 1700) \text{ y } (800, 2\,000)$$

satisfacen la ecuación de la oferta:

$$1700 = 0c + d$$
$$2\,000 = 800c + d,$$

de donde:

$$d = 1700$$
$$c = \frac{300}{800} = \frac{3}{8}.$$

Así, la ecuación de la oferta es $y = \frac{3}{8}x + 1700$ (figura 2.67).

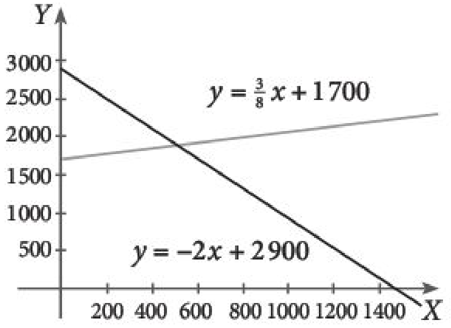


Figura 2.67

2. Encontrar el punto de equilibrio de mercado en el ejemplo anterior.

Solución:
Consideramos las ecuaciones de oferta y de demanda obtenidas:

$$\boxed{y = -2x + 2\,900 \quad \text{y} \quad y = \frac{3}{8}x + 1\,700.} \tag{2.20}$$

Como en las dos ecuaciones está despejada la y, para obtener el punto en el que se cortan, basta con igualar:

$$-2x + 2\,900 = \frac{3}{8}x + 1700,$$

y despejando x obtenemos:

$$2\,900 - 1\,700 = 2x + \frac{3}{8}x$$
$$1\,200 = \frac{19}{8}x$$
$$\frac{9\,600}{19} = x.$$

Ejemplos

Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación de (2.20) obtenemos:

$$y = -2\left(\frac{9600}{19}\right) + 2900 = \frac{35900}{19} \approx 1889.5.$$

Las rectas se cortan en el punto $\left(\frac{9600}{19}, \frac{35900}{19}\right)$ que es, aproximadamente, el punto $(505, 1890)$.

Ejercicios

Encuentra las desigualdades que describen las regiones en que las rectas siguientes dividen el plano.

1. $2x - y + 7 = 0.$
2. $-x - 8 = 0.$
3. $y - 5 = 0.$
4. $-\frac{1}{2}x + 2y = 0.$
5. $\frac{4}{3}x - \frac{3}{4}y + 1 = 0.$
6. $-x + \frac{5}{8}y - 5 = 0.$
7. Encuentra los valores de x para los cuales la recta $y = -4x + 7$ está arriba de la recta $y = \frac{4}{3}x - 1.$
8. Halla los valores de x para los cuales la recta $y = \frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$ está arriba de la recta $y = -\frac{5}{6}x + \frac{25}{6}.$
9. Determina y grafica la región que consta de los puntos que satisfacen las desigualdades siguientes: $y < -6x + 10$, $y > -2x + 2$, $y < 2x + 2.$
10. El dueño de una zapatería en la Ciudad de México hace un pedido a una fábrica en León, Guanajuato. Cada par tiene un costo \$190 y, por concepto de flete, debe pagar \$2600.
    a. Escribe la función de costo suponiendo que es lineal.
    Si cada par se vende en \$230:
    b. ¿Cuántos pares debe vender para recuperar la inversión sin obtener ganancia?
    c. ¿Cuántos pares debe vender para obtener una ganancia de \$16000?
11. Un ama de casa hace pasteles para mejorar la economía familiar. Cada pastel tiene un costo de \$19 por concepto de materia prima, mientras que el aumento en el gasto diario de la casa por concepto de agua, luz y gas asciende a \$16.
    a. Escribe la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.
    Si cada pastel se vende en \$27:
    b. ¿Cuántos pasteles debe vender diariamente para asegurar que no haya pérdidas?
    c. ¿Cuántos pasteles debe vender para ganar al día por lo menos \$70?
12. Un vendedor expende artículos a comisión recibiendo \$3 por cada artículo vendido. El vendedor trabaja de lunes a viernes. Paga diariamente \$5 para que se le permita vender en un mercado y \$6 para transportarse. Después de una semana en la que no tuvo ingresos para compensar los gastos, decide no continuar con la venta.
    a. ¿Cuántos artículos vendió durante esa semana?
    b. ¿Cuántos artículos debe vender en una semana para que, restando sus gastos, le queden \$35 pesos por cada día de trabajo?

13. Una fábrica tiene gastos fijos al mes de \$8 500 y cada artículo producido tiene un costo de \$6.50. Un vendedor le ofrece un nuevo equipo con el que puede producir el mismo artículo en \$4.75, pero el dueño de la fábrica calcula que la adquisición del nuevo equipo aumentará los gastos fijos mensuales a \$15 000. Si cada artículo se vende en \$9:

a. ¿Cuál es el punto de equilibrio en cada caso?

Si al mes vende 15 000 artículos:

b. ¿Debe adquirir el nuevo equipo o le conviene conservar el que ya tiene?

14. Un comerciante adquiere un lote de telas. Estima que, si establece un precio de \$52 por metro de tela, podría vender en un mes 385 metros; pero disminuyendo el precio a \$45 el metro, podría vender 630 metros. Si la oferta está dada por la ecuación $y = 175x - 6500$:

a. Escribe la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

b. ¿Cuál es el precio por metro que equilibra la oferta y la demanda?

15. Una señora que vende tamales observa que puede vender 200 al día si los da a \$3 cada uno, pero si aumenta el precio a \$3.50, entonces sólo vende 150 tamales. Si la oferta está dada de manera que a un precio de \$3 puede ofrecer 250 tamales diarios y a \$2.50 ofrecería solamente 50 tamales:

a. Encuentra la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

b. Encuentra la ecuación de oferta suponiendo que es lineal.

c. ¿Cuál es el precio que equilibra la oferta y la demanda?

16. En una recaudería, el vendedor observa que, a un precio de \$4.50 por kilo, puede vender 60 kg de jitomate en una semana, pero si aumenta el precio a \$5.50 sólo vende 40 kg. La ecuación de oferta está dada por:

$$y = \begin{cases} 4 + \frac{1}{10}x & \text{si } x \le 20 \\ \frac{3}{10}x & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

a. Encuentra la ecuación de demanda suponiendo que es lineal.

b. Encuentra el punto de equilibrio de mercado.

17. En una fábrica familiar, los costos fijos mensuales son de \$5 500 y puede producir hasta 25 000 artículos, cada uno de los cuales tiene un costo de \$16. Cierto mes, la demanda es mayor y el dueño pide a otro fabricante que lo apoye para lograr una producción total de 40 000 artículos. El fabricante estima que, a partir de 25 000 artículos, el costo será de \$16.22 por unidad. Cada artículo puede ser vendido en \$19.

a. Escribe la ecuación de costo suponiendo que, hasta 25 000 artículos, es lineal.

b. ¿Cuál es el menor número de artículos que debe vender para no registrar pérdidas?

c. ¿Cuándo ganaría más por unidad, vendiendo 25 000 o vendiendo 37 000 artículos?

Ejercicios

Distancia de un punto a una recta

Encontrar la distancia del punto $P\left(-4, \frac{7}{2}\right)$ a la recta $x - 2y - 2 = 0$.

Solución:
La distancia del punto a la recta $x - 2y - 2 = 0$ es la distancia de P al punto de la recta más próximo a él.

Escribimos la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = \frac{1}{2}x - 1.$$

Consideramos la recta perpendicular a ella que pase por $P\left(-4, \frac{7}{2}\right)$, sabemos que esta perpendicular tiene pendiente -2 y por tanto, su ecuación es:

$$\begin{aligned} y - \frac{7}{2} &= -2\left(x - (-4)\right) \\ y &= -2x - \frac{9}{2} \\ 4x + 2y + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Encontramos el punto donde se cortan las rectas:

$$x - 2y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad 4x + 2y + 9 = 0.$$

Para ello, resolvemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} x - 2y &= 2 \\ 4x + 2y &= -9 \end{aligned}} \tag{2.21}$$

Sumándolas y despejando x tenemos:

$$\begin{aligned} 5x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (2.21) y obtenemos el valor de y:

$$\begin{aligned} -\frac{7}{5} - 2y &= 2 \\ 2y &= -\frac{7}{5} - 2 \\ y &= -\frac{17}{10}. \end{aligned}$$

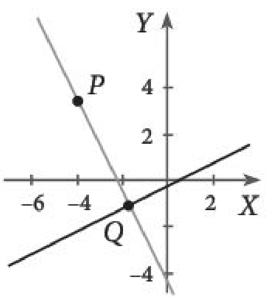


Figura 2.68

El punto donde se cortan las dos rectas es $Q\left(-\frac{7}{5}, -\frac{17}{10}\right)$ (figura 2.68).

La distancia del punto P a la recta es la distancia de P a Q:

$$d(P,Q)=\sqrt{\left(-4-\left(-\frac{7}{5}\right)\right)^2+\left(\frac{7}{2}-\left(-\frac{17}{10}\right)\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{13}{5}\right)^2+\left(\frac{26}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{5}}=\frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Así, la distancia de $P\left(-4,\frac{7}{2}\right)$ a la recta $x-2y-2=0$ es de $\frac{13}{5}\sqrt{5}$.

Consideremos una recta ℓ cualquiera y un punto $P(x_1,y_1)$ que no esté en la recta. La distancia del punto P a la recta ℓ se define como la distancia de P al punto de ℓ que esté más cercano a él. Si la recta no es vertical y su ecuación en la forma general es:

$$Ax+By+C=0,$$

entonces la forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación es:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

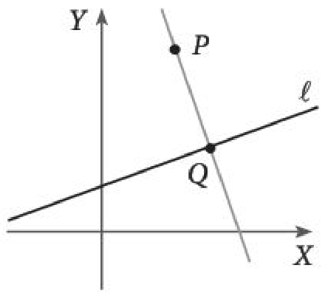


Figura 2.69

Consideremos la recta ℓ' que pasa por $P(x_1,y_1)$ y es perpendicular a ℓ (figura 2.69).

Puesto que la pendiente de ℓ es $m=-\frac{A}{B}$ la pendiente de ℓ' es $\frac{B}{A}$; entonces, la forma pendiente-ordenada al origen de ℓ' es:

$$\begin{aligned}y-y_1&=\frac{B}{A}\left(x-x_1\right)\\ Ay-Ay_1&=Bx-Bx_1\\ -Bx+Ay+Bx_1-Ay_1&=0.\end{aligned}$$

Ahora encontramos el punto en que se cortan las rectas ℓ y ℓ'; es decir, resolvemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned}Ax+By&=-C\\ -Bx+Ay&=-Bx_1+Ay_1.\end{aligned}} \qquad (2.22)$$

Multiplicamos la primera ecuación de (2.22) por B y la segunda por A:

$$\begin{aligned}ABx+B^2y&=-BC\\ -ABx+A^2y&=-ABx_1+A^2y_1.\end{aligned}$$

Sumándolas y resolviendo para y, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left(A^2+B^2\right)y&=-BC-ABx_1+A^2y_1\\ y&=\frac{-BC-ABx_1+A^2y_1}{A^2+B^2}\end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación de (2.22) y despejando x tenemos:

$$Ax + B\left(\frac{-BC - ABx_1 + A^2y_1}{A^2 + B^2}\right) = -C$$

$$Ax + \frac{-B^2C - AB^2x_1 + A^2By_1}{A^2 + B^2} = -C$$

$$x = \frac{1}{A}\left(-C - \left(\frac{-B^2C - AB^2x_1 + A^2By_1}{A^2 + B^2}\right)\right)$$

$$x = \frac{1}{A}\left(\frac{-C\left(A^2 + B^2\right) + B^2C + AB^2x_1 - A^2By_1}{A^2 + B^2}\right)$$

$$x = \frac{-CA + B^2x_1 - ABy_1}{A^2 + B^2}.$$

Así, el punto en el que se cortan las rectas es:

$$Q\left(\frac{-CA + B^2x_1 - ABy_1}{A^2 + B^2}, \frac{-BC - ABx_1 + A^2y_1}{A^2 + B^2}\right).$$

La distancia de P a la recta es la distancia de P a Q:

$$d(P,Q) = \sqrt{\left(x_1 - \left(\frac{-CA + B^2x_1 - ABy_1}{A^2 + B^2}\right)\right)^2 + \left(y_1 - \left(\frac{-BC - ABx_1 + A^2y_1}{A^2 + B^2}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x_1A^2 + AC + ABy_1}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{x_1AB + BC + B^2y_1}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(x_1A + By_1 + C\right)^2}{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

La distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ es $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Es decir,

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \qquad (2.23)$$

Se usa el valor absoluto porque la distancia debe ser un número no negativo.

Ejemplos

1. Encontrar la distancia del punto $P(2,3)$ a la recta $y = \frac{3}{4}x + 1$.

Solución:
Escribimos la ecuación de la recta en la forma general:

$$y = \frac{3}{4}x + 1$$

$$-\frac{3}{4}x + y - 1 = 0$$

$$-3x + 4y - 4 = 0.$$

Sustituimos las coordenadas de $P(2,3)$ y los coeficientes de la ecuación de la recta en la fórmula (2.23):

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(-3)(2) + (4)(3) + (-4)|}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}.$$

Entonces, la distancia es $d = \frac{2}{5}$ (figura 2.70).

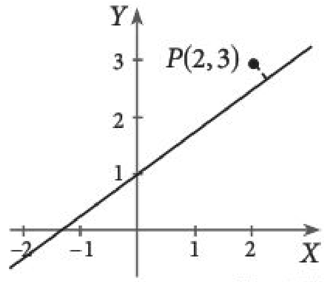


Figura 2.70

2. Hallar la distancia entre el punto $P(1,-5)$ y la recta $y + 1 = -x$.

Solución:
Escribimos la ecuación de la recta en la forma general:

$$y + 1 = -x$$

$$x + y + 1 = 0.$$

Sustituimos las coordenadas de $P(1, -5)$ y los coeficientes de la ecuación de la recta en la fórmula (2.23):

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(1)(1) + (1)(-5) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Obsérvese que de no tomarse el valor absoluto, obtendríamos una distancia negativa.

Entonces, la distancia es $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$ (figura 2.71):

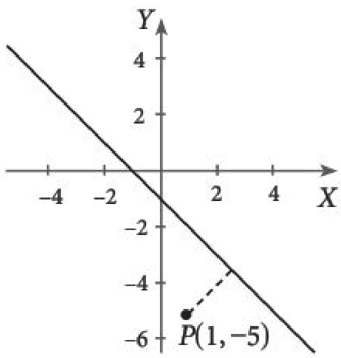


Figura 2.71

Pensamiento crítico

Si la distancia de un punto a una recta es cero, ¿qué se puede decir acerca del punto?

Distancia entre dos rectas paralelas

Encontrar la distancia entre las rectas $6x+2y-3=0$ y $6x+2y+21=0$.

Solución:

Notamos que los coeficientes de las variables x y y en una de las ecuaciones son respectivamente iguales a los que aparecen en la otra ecuación; entonces, las rectas tienen la misma pendiente (-3) y por tanto son paralelas.

Elegimos un punto cualquiera en la primera recta. Para ello, tomamos cualquier valor de x, por ejemplo $x=1$ lo sustituimos en la ecuación y encontramos el valor de y correspondiente:

$$6(1)+2y-3=0 \text{ de donde } y=-\frac{3}{2}.$$

Así, el punto $P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ pertenece a la primera recta. Calculamos ahora la distancia de P a la segunda recta:

$$d=\frac{\left|6(1)+2\left(-\frac{3}{2}\right)+21\right|}{\sqrt{6^2+2^2}}=\frac{|24|}{\sqrt{40}}=\frac{24}{2\sqrt{10}}=\frac{12}{\sqrt{10}}\approx 3.79.$$

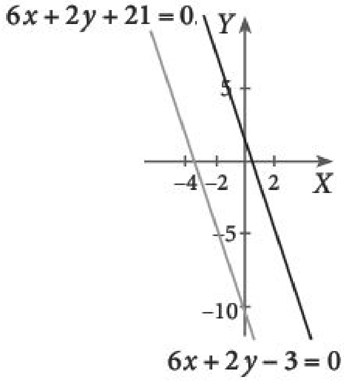


Figura 2.72

Por tanto, la distancia entre las rectas es de $\frac{12}{\sqrt{10}}$ (figura 2.72).

Para encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, tomamos un punto en una de ellas y encontramos la distancia de ese punto a la otra recta.

Pensamiento crítico

Si la distancia entre dos rectas paralelas es cero, ¿qué se puede decir de las rectas?

La distancia entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto de una de ellas a la otra recta.

Ejercicios

Encuentra la distancia entre la recta y el punto dados.

1. $y=\frac{1}{2}x+5$, $P(-1,2)$.
2. $y=-\frac{7}{5}x+\frac{3}{5}$, $P(-3,-4)$.
3. $\frac{x}{4}+\frac{y}{-5}=1$, $P(1,5)$.
4. $y=-\frac{3}{2}x-2$, $P(2,-1)$.
5. $3x+5y-8=0$, $P(6,2)$.
6. $y+2=0$, $P(4,8)$.
7. $x-2=0$, $P(7,1)$.
8. $x+y=0$, $P(-4,-5)$.
9. $-4x+6y+7=0$, $P(0,-3)$.
10. $2x-10y-5=0$, $P(-2,4)$.

Halla la distancia entre las dos rectas dadas.

11. $6x+9y-9=0$, $2x+3y+7=0$.
12. $x+2y+2=0$, $2x+4y-3=0$.
13. $7x-5y+1=0$, $7x-5y-1=0$.
14. $-2x+4y-3=0$, $-8x+16y-2=0$.
15. $x+2y+2=0$, $2x+4y-3=0$.
16. $8x+3y-8=0$, $8x+3y+6=0$.
17. $5x+6y=20$, $5x+6y=15$.
18. $-x+3y-5=0$, $5x-15y+8=0$.
19. Encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular al segmento que pasa por el origen y que forma un ángulo de 30° con el eje X, y cuya distancia al origen es 5.
20. Considera los puntos $A(-1,3)$, $B(2,6)$, y $C(4,1)$. Calcula la distancia del punto A a la recta que pasa por B y C. Calcula el área del triángulo con vértices A, B y C.

Ejercicios

21. Considera las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ y $9x - 12y - 5 = 0$, y los puntos $A\left(2, \frac{7}{2}\right)$ y $B(8, 8)$. Calcula las distancias de A y B a cada una de las rectas. ¿Qué puedes concluir acerca de la recta que pasa por los puntos A y B?
22. Un punto $P(x, y)$ equidista de los puntos $A(3, 7)$ y $B(6, 6)$. La distancia de P a la recta que pasa por A y tiene pendiente 2 es de $\frac{4}{\sqrt{5}}$. Encuentra las coordenadas de P.
23. Los puntos $A(x, 4)$ y $B(5, y)$ se encuentran ambos a una distancia de $\frac{20}{\sqrt{130}}$ de la recta que pasa por los puntos $P(-3, 2)$ y $Q(8, 5)$. Encuentra la abscisa de A y la ordenada de B.

Lados opuestos (semiplanos) respecto a una recta

Juan y María se encuentran en una ciudad que tiene una calle que la cruza de un extremo a otro. Ellos se hallan en el mismo lado de la calle si pueden caminar hasta donde está el otro sin cruzarla; en cambio, están en lados opuestos si necesitan cruzar la calle para encontrarse.

Utilizaremos el criterio anterior en el plano cartesiano para definir cuándo dos puntos en el plano fuera de una recta ℓ están en el mismo lado respecto de ℓ o en lados opuestos. Así, diremos que dos puntos P y Q fuera de ℓ están en lados opuestos respecto a esa recta si el segmento $\overline{PQ}$ interseca a ℓ (figura 2.73). Asimismo, diremos que P y Q están en un mismo lado respecto a ℓ si $\overline{PQ}$ no interseca a ℓ (figura 2.74).

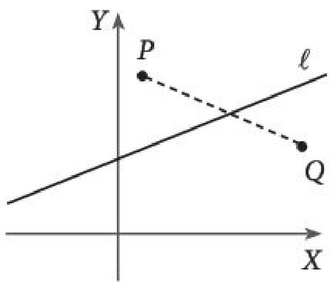


Figura 2.73

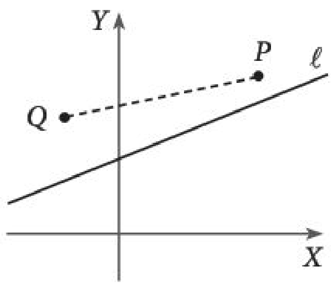


Figura 2.74

En el apartado "Desigualdades y regiones del plano" vimos que una recta ℓ no vertical divide el plano en tres conjuntos que pueden caracterizarse de la siguiente manera si $y = mx + b$ es la ecuación de la recta:

- Los puntos que están en la recta, que son precisamente los que satisfacen la ecuación $y = mx + b$.
- Los puntos que están arriba de la recta, que satisfacen la desigualdad $y > mx + b$.
- Los puntos que están abajo de la recta, que satisfacen la desigualdad $y < mx + b$.

Resulta intuitivamente claro que si los puntos P y Q están ambos arriba o debajo de la recta ℓ, entonces el segmento $\overline{PQ}$ no interseca ℓ y, por tanto, los puntos P y Q están en un mismo lado; en tanto que si uno está arriba y otro debajo, entonces $\overline{PQ}$ interseca ℓ y los puntos están en lados contrarios.

Por lo anterior, se dirá que los puntos $P(x,y)$ que satisfacen $y > mx + b$ forman un lado (semiplano) de la recta ℓ, y el lado contrario a este lo forman los puntos (x, y) que satisfacen $y < mx + b$.

En una recta vertical no se tiene la forma pendiente-ordenada al origen, se tiene una ecuación del tipo:

$$x = a,$$

las tres regiones en que divide el plano quedan caracterizadas como se indica a continuación:

- Los puntos que están en la recta, que satisfacen la ecuación $x = a$.
- Los puntos que están a la derecha de la recta, que satisfacen la desigualdad $x > a$.
- Los puntos que están a la izquierda de la recta, que satisfacen la desigualdad $x < a$.

Uno de sus lados está formado por los puntos (x,y) que cumplen la condición $x > a$ y el otro lado lo constituyen los que satisfacen $x < a$.

Si queremos englobar ambas situaciones, lo que debemos hacer es trabajar con la forma general de la ecuación de la recta. Así, si la recta ℓ tiene por ecuación general:

$$Ax + By + C = 0,$$

- uno de sus lados es el formado por los puntos (x,y) que satisfacen:

$$\boxed{Ax + By + C > 0} \tag{2.24}$$

- y el lado contrario a este es el formado por los puntos (x,y) que satisfacen:

$$\boxed{Ax + By + C < 0.} \tag{2.25}$$

Podemos llamar a uno de los lados el *lado positivo* y al otro el *lado negativo*. Esta asignación de nombres puede hacerse de modo arbitrario, atendiendo a aspectos geométricos, o bien puramente algebraicos. Cuando damos estos nombres decimos que *hemos orientado los lados de la recta*.

Dos orientaciones de los lados de una recta

Daremos dos formas de orientar los lados de una recta que responden a distintos aspectos geométricos y que se expresan de modo algebraico de manera tal que el lado positivo queda representado por una desigualdad del tipo de la que aparece en (2.24), y el negativo por una como la que se indica en (2.25).

Orientación estándar

La primera de ellas es la que más usaremos y surge de la discusión con la que comienza esta sección. Así, para una recta no vertical establecemos como lado positivo el lado de *arriba* y como negativo el de *abajo*; en tanto que para una recta vertical designamos como positivo el lado *de la derecha* y como negativo el *de la izquierda*. Una vez que hemos procedido de esta manera, decimos que hemos dado la *orientación estándar* o *natural* a los lados de la recta (figuras 2.75 y 2.76).

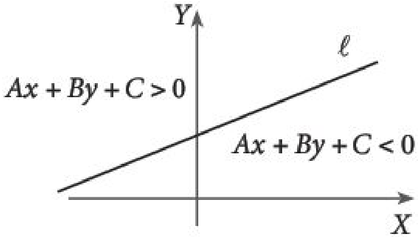


Figura 2.75

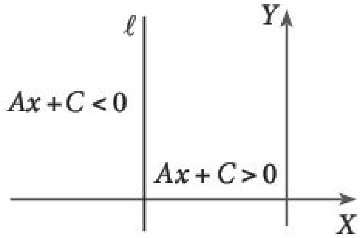


Figura 2.76

El criterio algebraico que refleja esta orientación estándar es el siguiente: escribimos la ecuación de la recta ℓ en la forma general:

$$Ax + By + C = 0$$

cuidando de tener $B > 0$ (cuando ℓ no sea vertical), o bien $B = 0$ y $A > 0$ (cuando ℓ sea vertical). Para que se cumpla lo anterior, quizás será necesario multiplicar por -1 la ecuación originalmente dada para ℓ. Una vez hecho esto, los lados de ℓ, según la orientación estándar, quedan caracterizados como sigue:

- El lado positivo está formado por los puntos que satisfacen $Ax + By + C > 0$.
- El lado negativo está formado por los puntos que satisfacen $Ax + By + C < 0$.

Para convencernos de esto observamos que cuando $B > 0$,

$$Ax + By + C > 0 \text{ equivale a } y > \overbrace{-\frac{A}{B}}^{m}x \overbrace{-\frac{C}{B}}^{b};$$

y

$$Ax + By + C < 0 \text{ equivale a } y < -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Si ℓ es vertical, entonces $B = 0$ y $A > 0$, la ecuación general se reduce a $Ax + C = 0$ y:

$$Ax + C > 0 \text{ equivale a } x > -\frac{C}{A}$$

y

$$Ax + C < 0 \text{ equivale a } x < -\frac{C}{A}.$$

En la orientación estándar de una recta no vertical $Ax + By + C = 0$, con $B > 0$, el lado positivo es el que se encuentra arriba de la misma y está formado por los puntos que satisfacen $Ax + By + C > 0$.

En la orientación estándar de una recta no vertical $Ax + By + C = 0$, con $B > 0$, el lado negativo es el que se encuentra abajo de la misma y está formado por los puntos que satisfacen $Ax + By + C < 0$.

Ejemplos

1. Determinar en qué lado de la recta $3x+4y+5=0$ está el punto $Q(-4,8)$ de acuerdo con la orientación estándar.

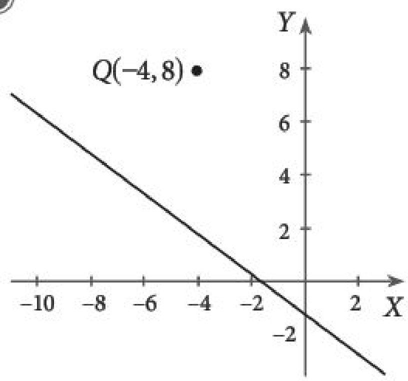


Figura 2.77

Solución:
Veamos primero geométricamente lo que pasa:
Al graficar la recta, vemos que Q está arriba de la recta y, por tanto, está en el lado positivo de ella (figura 2.77).

Si abordamos numéricamente el problema, notamos que la ecuación $3x+4y+5=0$ está escrita de forma que el coeficiente de y es positivo; entonces, simplemente evaluamos el punto $Q(-4,8)$ en el lado izquierdo de la ecuación y vemos que:

$$3(-4)+4(8)+5=25>0,$$

lo que indica que Q está del lado positivo de la recta.

2. Determinar de qué lado de la recta $2x-5y=0$ está el punto $Q(2,-6)$ según la orientación estándar.

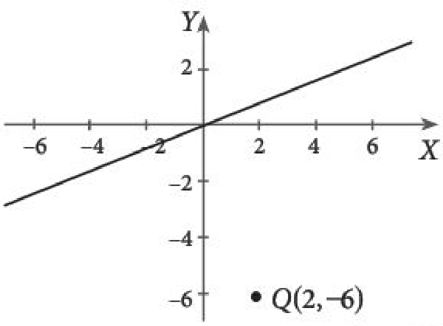


Figura 2.78

Solución:
Si graficamos la recta, observamos que el punto Q está debajo de ella, así que está en el lado negativo (figura 2.78).

Analicémoslo ahora algebraicamente. Como el coeficiente de y $(B=-5)$ en la ecuación $2x-5y=0$ es negativo, primero multiplicamos la ecuación por -1:

$$-2x+5y=0.$$

Después evaluamos el lado izquierdo en el punto $Q(2,-6)$:

$$-2(2)+5(-6)=-34<0.$$

Como el resultado es negativo, Q está en el lado negativo.

3. Dada la recta ℓ, cuya ecuación es $5x+3y-8=0$, determinar si los puntos $P(2,1)$ y $Q(-4,3)$ están en el mismo lado de la recta o en lados opuestos. Además, determinar en qué lado está cada uno de esos puntos según la orientación estándar.

Solución:
Evaluamos el lado izquierdo de la ecuación $5x+3y-8=0$ en los puntos P y Q:

$$5(2)+3(1)-8=5 \quad \textbf{y} \quad 5(-4)+3(3)-8=-19;$$

el primer valor es positivo y el segundo negativo, por lo que P y Q están en lados opuestos de ℓ.

Ejemplos

Observamos que en la ecuación $5x + 3y - 8 = 0$ el coeficiente de y es positivo; por lo tanto, podemos aplicarle el criterio algebraico que hemos establecido para la orientación estándar; como:

$$5(2)+3(1)-8=5>0 \quad \text{y} \quad 5(-4)+3(3)-8=-19<0,$$

tenemos que $P(2,1)$ está en el lado positivo y $Q(-4,3)$ en el lado negativo (figura 2.79).

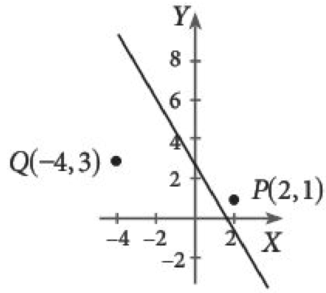


Figura 2.79

Orientación puntual

La segunda manera de orientar los lados de una recta se hace estableciendo que el lado positivo es aquel donde está un punto particular $P(x_0, y_0)$ que hemos escogido previamente; a tal tipo de orientación la llamamos *orientación puntual*.

El criterio algebraico para una orientación puntual determinada por el punto $P(x_0, y_0)$ es el siguiente: escribimos la ecuación de la recta en la forma general:

$$Ax + By + C = 0;$$

entonces, multiplicamos por (-1) si hace falta para lograr que al evaluar la ecuación en el punto $P(x_0, y_0)$ se cumpla que $Ax_0 + By_0 + C > 0$; y establecemos que el lado positivo está formado por los puntos $Q(x, y)$ que satisfacen $Ax + By + C > 0$ y el lado negativo por los que cumplen $Ax + By + C < 0$. De esta manera, el punto P está del lado positivo.

Ejemplo

1. Las ecuaciones $y = x + 1$, $y = -x + 1$ y $y = -1$ corresponden a tres rectas que forman un triángulo. Dar una orientación puntual a los lados de dichas rectas, de modo tal que todo punto interior al triángulo esté en los lados positivos respecto a cada una de ellas, y obtener las desigualdades que definen los lados positivos.

   Solución:
   Escribimos las ecuaciones en la forma general:

   $$x - y + 1 = 0, \quad x + y - 1 = 0, \quad y + 1 = 0.$$

   Nos damos cuenta de que el origen está en el interior del triángulo (figura 2.80), así que podemos utilizarlo para dar la orientación puntual a cada lado. Al evaluar los miembros del lado izquierdo de las ecuaciones anteriores en $(0,0)$, obtenemos:

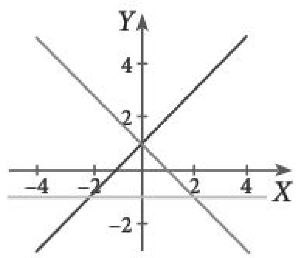


Figura 2.80

$$(0)-(0)+1=1>0$$
$$(0)+(0)-1=-1<0$$
$$(0)+1=1>0.$$

Ejemplo

Así, debemos multiplicar por -1 la segunda ecuación y entonces los lados positivos están dados por las desigualdades:

$$\begin{aligned} x - y + 1 &> 0 \\ -x - y + 1 &> 0 \\ y + 1 &> 0, \end{aligned}$$

respectivamente.

En lo sucesivo, a menos que indiquemos otra cosa, usaremos la orientación estándar (arriba, abajo, derecha e izquierda).

Distancia dirigida de un punto a una recta

Consideremos la recta ℓ cuya ecuación es $7x - 8y + 20 = 0$ y el punto $P(-1, 8)$. ¿A qué distancia de la recta está P? ¿En qué lado de ℓ está P?

Solución:
Utilizando la fórmula (2.23) de la distancia de un punto a una recta, tenemos que la distancia de P a ℓ es:

$$\frac{|7(-1) - 8(8) + 20|}{\sqrt{113}} = \frac{|-51|}{\sqrt{113}} = \frac{51}{\sqrt{113}}.$$

Para determinar en qué lado está el punto (recordemos que estamos usando la orientación estándar de la recta), multiplicamos la ecuación $7x - 8y + 20 = 0$ por -1 ya que el coeficiente de y es negativo, con lo que obtenemos:

$$-7x + 8y - 20 = 0.$$

Y al evaluar el miembro izquierdo en P, tenemos:

$$-7(-1) + 8(8) - 20 = 51 > 0.$$

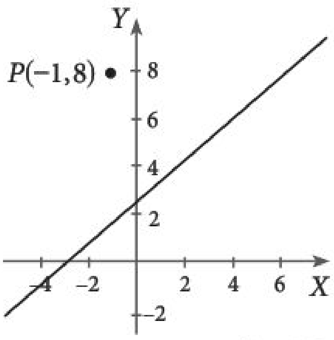


Figura 2.81

Es decir, P está en el lado positivo: arriba de la recta (figura 2.81).

Cuando dividimos la ecuación $Ax + By + C = 0$ de una recta ℓ entre $\sqrt{A^2 + B^2}$, decimos que la normalizamos, y a la ecuación:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

la llamamos *ecuación normalizada* de la recta.

El uso de las formas normalizadas nos permite *definir la distancia dirigida*, que también llamaremos *distancia con signo* de un punto a una recta, cuyo valor nos lleva a conocer la distancia del punto a una recta ℓ y, en su caso, el lado de la recta en que este se encuentra.

Al dividir la ecuación $Ax + By + C = 0$ de una recta ℓ entre $\sqrt{A^2 + B^2}$, obtenemos su ecuación normalizada $\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$.

Consideremos el punto $P(x_0, y_0)$ y escribamos la ecuación general de la recta ℓ:

$$Ax + By + C = 0,$$

de modo tal que $B > 0$, o bien $B = 0$ y $A > 0$; tal y como procedimos para dar la orientación estándar a los lados de ℓ. Posteriormente, normalizamos esta ecuación y obtenemos:

$$A'x + B'y + C' = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

donde $B' > 0$ o bien, $B' = 0$ y $A' > 0$.

Al evaluar el miembro izquierdo en el punto $P(x_0, y_0)$ se obtiene lo que llamamos la *distancia dirigida (estándar)* de P a ℓ y que denotamos por $D(P, \ell)$. Es decir,

$$D(P, \ell) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Está distancia será:

- Positiva cuando $P(x_0, y_0)$ esté en el lado positivo de la recta.
- Negativa cuando $P(x_0, y_0)$ esté en el lado negativo de la recta.
- Cero cuando $P(x_0, y_0)$ esté en la recta.

En efecto,

$$D(P, \ell) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} > 0$$

equivale a $A'x_0 + B'y_0 + C' > 0$ o, lo que es lo mismo, a que P esté ubicado en el lado positivo (arriba o derecha).

De modo similar,

$$D(P, \ell) = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 0$$

equivale a $A'x_0 + B'y_0 + C' < 0$ o, lo que es lo mismo, a que P esté ubicado en el lado negativo (abajo o izquierda) de ℓ.

Finalmente, $D(P, \ell) = 0$ equivale a $Ax_0 + By_0 + C = 0$ y se tiene entonces que P está en la recta.

Recordamos que la distancia de P a ℓ es:

$$d(P, \ell) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = |D(P, \ell)|,$$

o sea, el valor absoluto de la distancia dirigida es la distancia del punto a la recta.

Cuando $B > 0$, o bien $B = 0$ y $A > 0$, entonces:
$P(x_0, y_0)$ está ubicado arriba o a la derecha de la recta $Ax + By + C = 0$ si $\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} > 0.$

$P(x_0, y_0)$ está ubicado debajo o a la izquierda de la recta $Ax + By + C = 0$ si $\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} < 0.$

Resumen:

La distancia dirigida $D(P, \ell)$ de un punto P a una recta ℓ nos dice, a través de su signo, cómo está ubicado el punto respecto a la recta, orientada de la manera estándar, y su tamaño (su valor absoluto) nos indica la distancia del punto a la recta.

Ejemplos

1. Encontrar la distancia dirigida del punto $P(3,2)$ a la recta ℓ cuya ecuación es $3x-4y+8=0$; decir cómo está ubicado P respecto a la recta.

Solución:
Multiplicamos la ecuación por -1, por ser negativo el coeficiente de y:

$$-3x+4y-8=0.$$

La normalizamos:

$$\frac{-3x+4y-8}{5}=0.$$

Evaluamos en P el miembro izquierdo de la ecuación anterior y obtenemos:

$$D(P,\ell)=-\frac{3}{5}(3)+\frac{4}{5}(2)-\frac{8}{5}=-\frac{9}{5}.$$

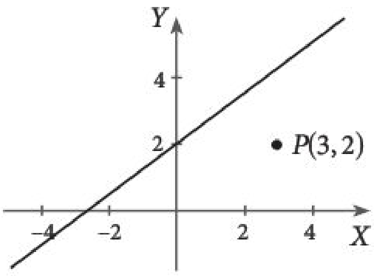


Figura 2.82

Su distancia dirigida es $-\frac{9}{5}$. Así que P está en el lado negativo de la recta (abajo) y su distancia a ℓ es $\left|-\frac{9}{5}\right|=\frac{9}{5}$ (figura 2.82).

2. Encontrar la distancia del punto $P(4,-2)$ a la recta vertical ℓ cuya ecuación es $-5x+2=0$; determinar si el punto está en el mismo lado que el origen.

Solución:
Para responder ambas preguntas basta calcular las distancias dirigidas $D(P,\ell)$ y $D(O,\ell)$.

Multiplicamos la ecuación por -1, ya que es una recta vertical $(B=0)$ y el coeficiente de x es negativo. Después la normalizamos obteniendo:

$$x-\frac{2}{5}=0.$$

Sustituimos las coordenadas de $P(4,-2)$ y $O(0,0)$ en el miembro izquierdo de la ecuación anterior,

$$D(P,\ell)=4-\frac{2}{5}=\frac{18}{5} \quad \text{y} \quad D(O,\ell)=0-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5},$$

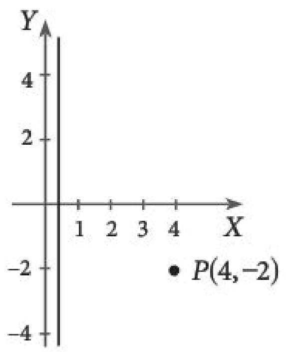


Figura 2.83

así que P está en el lado positivo de ℓ y su distancia a ella es $\left|\frac{18}{5}\right|=\frac{18}{5}$, en tanto que O está en el lado negativo. Por tanto, P y O están en lados contrarios, respecto a ℓ (figura 2.83).

Coordenadas de un punto respecto a dos rectas ortogonales

La distancia dirigida tiene una aplicación interesante. Observamos que si $P(x, y)$ es un punto del plano, x es la distancia dirigida de P a la recta $x = 0$, es decir, al eje Y, y y es la distancia dirigida de P a la recta $y = 0$, es decir, al eje X. Así, las coordenadas de P son las distancias dirigidas a dos rectas perpendiculares entre sí. Esta idea nos permite encontrar las coordenadas de P respecto a cualquier sistema de ejes ortogonales.

Si X' y Y' son dos rectas perpendiculares entre sí, entonces las coordenadas de un punto $P(x,y)$ respecto al sistema ortogonal $X'Y'$ son:

$$x' = D(P', Y')$$
$$y' = D(P, X')$$

Ejemplo

1. Encontrar las coordenadas de $P(5, 3)$ respecto a las rectas $X': 8x - 6y + 6 = 0$ y $Y': 3x + 4y - 1 = 0$.

Solución:

Comprobamos primero que las rectas son perpendiculares, lo que logramos al utilizar el criterio (2.14):

$$3 \cdot 8 + 4(-6) = 0,$$

o bien comprobando que sus pendientes $m_1 = -\frac{3}{4}$ y $m_2 = \frac{4}{3}$ satisfacen $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Orientamos los lados de las rectas y normalizamos las ecuaciones que reflejan dicha orientación:

$$X' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{3}{5} = 0$$
$$Y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} = 0.$$

Las distancias dirigidas de P a estas rectas son:

$$D(P, Y') = \frac{3}{5}(5) + \frac{4}{5}(3) - \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

y

$$D(P, X') = -\frac{4}{5}(5) + \frac{3}{5}(3) - \frac{3}{5} = -\frac{14}{5},$$

así que las coordenadas de P, con respecto a las dos rectas dadas, son $\left(\frac{26}{5}, -\frac{14}{5}\right)$ (figura 2.84).

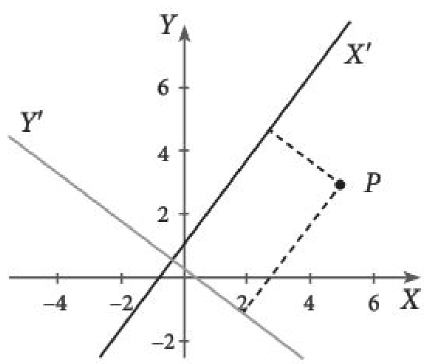


Figura 2.84

Bisectriz de un ángulo

Encontrar la ecuación de cada una de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas ℓ_1 y ℓ_2 cuyas ecuaciones son $4x - 3y + 2 = 0$ y $5x - 12y + 19 = 0$, respectivamente.

Solución:
Como en ambas ecuaciones el coeficiente de y es negativo, entonces multiplicamos ambas por (-1), que dan la orientación estándar a cada recta:

$$-4x + 3y - 2 = 0$$
$$-5x + 12y - 19 = 0.$$

Normalizamos las ecuaciones:

$$\frac{-4x + 3y - 2}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 0$$
$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} = 0$$

y

$$\frac{-5x + 12y - 19}{\sqrt{(-5)^2 + 12^2}} = 0$$
$$-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{19}{13} = 0.$$

Llamamos bisectriz *interior de un ángulo* a la semirrecta que parte del vértice del ángulo y que lo divide en dos ángulos iguales. Recordemos que los puntos de una bisectriz interior equidistan de cada una de las rectas.

Al graficar las rectas ℓ_1 y ℓ_2 observamos que se forma un par de ángulos agudos opuestos por el vértice, cuyo vértice común V es el punto de intersección de las dos rectas. Las bisectrices interiores de esos ángulos agudos forman una recta que llamaremos *la bisectriz* de cualquiera de ellos. Con excepción de V, todos los puntos de esa bisectriz tienen la propiedad de que están en el lado positivo de sólo una de las dos rectas ℓ_1 y ℓ_2; así, para ellos la distancia dirigida a una de las rectas es positiva y la distancia dirigida a la otra es negativa, compartiendo ambas distancias dirigidas el mismo valor absoluto, es decir, son números que sólo difieren en el signo. El vértice está en ambas rectas, por lo que su distancia dirigida a ℓ_1 y ℓ_2 es cero; es decir, todos los puntos de la bisectriz, y sólo ellos, satisfacen:

$$D(P, \ell_1) = -D(P, \ell_2),$$

o, lo que es lo mismo,

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{2}{5} = -\left(-\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{19}{13}\right),$$

es decir,

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+\frac{2}{5}=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{19}{13},$$

simplificando,

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+\frac{2}{5}-\left(-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{19}{13}\right)=0,$$

de donde la forma general es:

$$7x-9y+11=0,$$

que es la bisectriz de los ángulos agudos (figura 2.85).

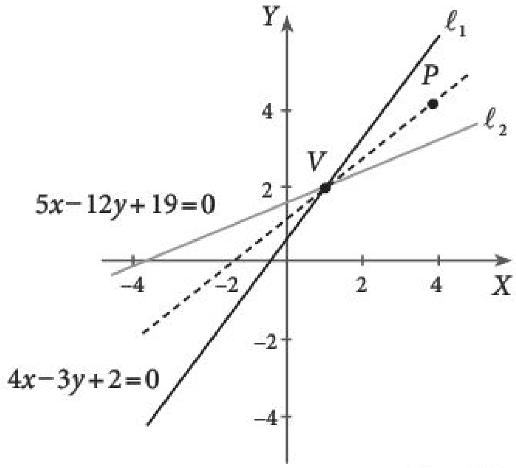


Figura 2.85

Por otra parte, hay un par de ángulos obtusos opuestos por el vértice V. La recta determinada por las bisectrices interiores de esos ángulos es llamada *la bisectriz de cualquiera de esos dos ángulos*. Cada punto de esta bisectriz está en el lado positivo de ambas rectas, o bien en el lado negativo de las dos, con excepción, por supuesto, del vértice que está en ambas rectas. Por tanto, la ecuación de dicha bisectriz es:

$$D(P,\ell_1)=D(P,\ell_2),$$

donde las distancias consideradas son también dirigidas (figura 2.86).

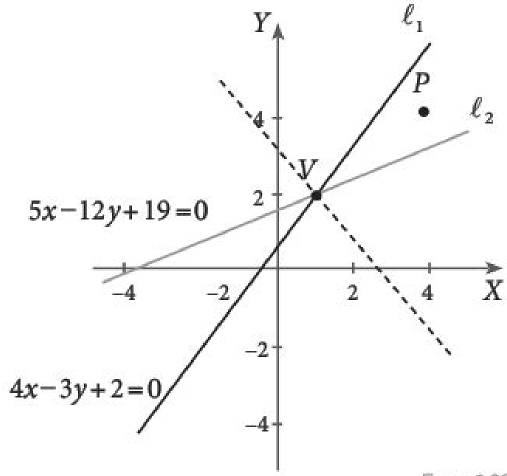


Figura 2.86

Con lo que obtenemos:

$$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{19}{13}.$$

Simplificando, obtenemos la forma general:

$$9x+7y-23=0.$$

Observamos que las bisectrices son ortogonales entre sí.

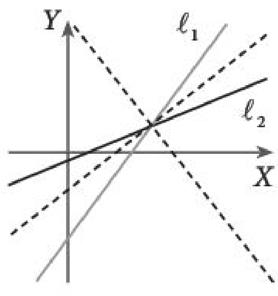


Figura 2.87

Dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 que se cortan forman dos pares de ángulos iguales (figura 2.87).

Cada uno de esos ángulos tiene una bisectriz interior. Las bisectrices interiores de cada par de ángulos opuestos por el vértice determinan una recta llamada *la bisectriz del cualquiera de los ángulos del par respectivo*. Así, tenemos dos rectas bisectrices con la propiedad de que todo punto de cualquiera de ellas equidista de ℓ_1 y ℓ_2; es decir, la ecuación:

$$d(P,\ell_1)=d(P,\ell_2)$$

representa las dos bisectrices.

A continuación veremos que con el uso de la distancia dirigida podemos obtener la ecuación de cada una de ellas.

En general, si:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad A'x + B'y + C' = 0$$

son las ecuaciones normalizadas que dan la orientación estándar de dos rectas que se intersecan, entonces las dos bisectrices de los ángulos formados por ellas están determinadas por las ecuaciones:

$$Ax + By + C = A'x + B'y + C'$$

y

$$Ax + By + C = -(A'x + B'y + C').$$

Cuando queremos identificar específicamente una de las dos, debemos tener cuidado en escribir las ecuaciones de manera que las rectas estén orientadas de manera estándar y fijar un punto $P(x,y)$ de la bisectriz deseada.

Si P está en el lado positivo o en el lado negativo de ambas rectas, la bisectriz b_1 que lo contiene está dada por la ecuación:

$$D(P, \ell_1) = D(P, \ell_2),$$

es decir,

$$\boxed{Ax + By + C = A'x + B'y + C',} \tag{2.26}$$

o sea,

$$(A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0.$$

En cambio, si P está en el lado positivo de una de ellas y en el lado negativo de la otra, entonces, la bisectriz b_2 que lo contiene está dada por la ecuación:

$$\boxed{D(P, \ell_1) = -D(P, \ell_2),} \tag{2.27}$$

es decir,

$$\boxed{Ax + By + C = -(A'x + B'y + C');} \tag{2.28}$$

o sea,

$$(A + A')x + (B + B')y + (C + C') = 0.$$

Una propiedad importante que tienen las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas que se cortan es que son perpendiculares (figura 2.88).

Para comprobarlo, en general escribimos las ecuaciones normalizadas de las rectas y obtenemos las siguientes para las bisectrices:

$$(A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0$$

y

$$(A+A')x+(B+B')y+(C+C')=0.$$

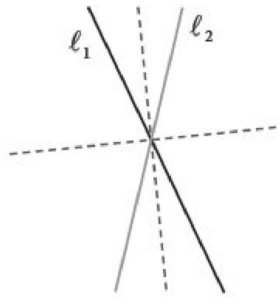


Figura 2.88

Sabemos que:

$$A^2+B^2=(A')^2+(B')^2=1.$$

Aplicamos el criterio (2.14), obteniendo:

$$(A-A')(A+A')+(B-B')(B+B')=A^2-(A')^2+B^2-(B')^2=0.$$

Ejemplos

1. Encontrar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $6x+8y-5=0$ y $4x-8y+10=0$.

Solución:

Puesto que en la segunda ecuación el coeficiente de y es negativo, multiplicamos por (-1) toda la ecuación:

$$-4x+8y-10=0.$$

Normalizamos la primera ecuación y esta última:

$$\frac{6x+8y-5}{\sqrt{6^2+8^2}}=0$$

$$\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-\frac{5}{10}=0$$

y

$$\frac{-4x+8y-10}{\sqrt{(-4)^2+8^2}}=0$$

$$\frac{-4}{\sqrt{80}}x+\frac{8}{\sqrt{80}}y-\frac{10}{\sqrt{80}}=0.$$

Para encontrar las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas, se restan y normalizan las ecuaciones de las rectas.

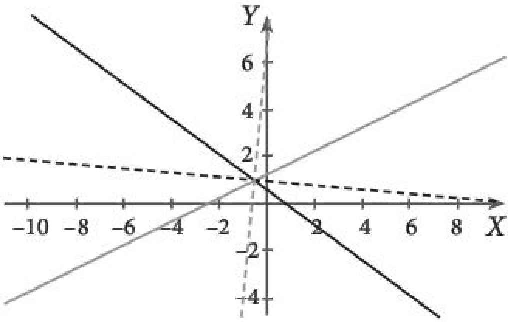


Figura 2.89

Las ecuaciones de la bisectrices son (figura 2.89):

$$\left(\frac{6}{10}+\frac{-4}{\sqrt{80}}\right)x+\left(\frac{8}{10}+\frac{8}{\sqrt{80}}\right)y+\left(-\frac{5}{10}+\left(-\frac{10}{\sqrt{80}}\right)\right)=0$$

$$\left(\frac{6}{10}-\frac{4}{\sqrt{80}}\right)x+\left(\frac{8}{10}+\frac{8}{\sqrt{80}}\right)y+\left(-\frac{5}{10}-\frac{10}{\sqrt{80}}\right)=0$$

y

$$\left(\frac{6}{10}-\left(-\frac{4}{\sqrt{80}}\right)\right)x+\left(\frac{8}{10}-\frac{8}{\sqrt{80}}\right)y+\left(-\frac{5}{10}-\left(-\frac{10}{\sqrt{80}}\right)\right)=0$$

$$\left(\frac{6}{10}+\frac{4}{\sqrt{80}}\right)x+\left(\frac{8}{10}-\frac{8}{\sqrt{80}}\right)y+\left(-\frac{5}{10}+\frac{10}{\sqrt{80}}\right)=0.$$

2. Encontrar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $12x-5y+2=0$ y $7x-9=0$.

Solución:
Puesto que en la primera ecuación el coeficiente de y es negativo, multiplicamos la ecuación por (-1):

$$-12x+5y-2=0.$$

En la segunda ecuación tenemos que el coeficiente de y es igual a cero y el de x es positivo, entonces no necesitamos modificar la ecuación.

Normalizamos:

$$\frac{-12x+5y-2}{\sqrt{12^2+5^2}}=0$$

$$-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{2}{13}=0$$

y

$$\frac{7x-9}{7}=0$$

$$x-\frac{9}{7}=0.$$

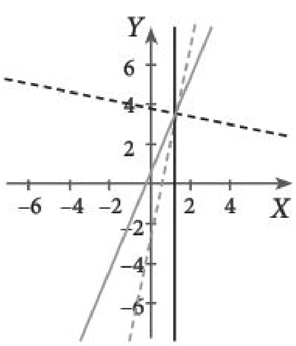


Figura 2.90

Las ecuaciones de la bisectrices son (figura 2.90):

$$\left(-\frac{12}{13}-1\right)x+\frac{5}{13}y+\left(-\frac{2}{13}+\frac{9}{7}\right)=0$$

$$-\frac{25}{13}x+\frac{5}{13}y+\frac{103}{91}=0$$

Ejemplos

y

$$\left(-\frac{12}{13}+1\right)x+\frac{5}{13}y+\left(-\frac{2}{13}-\frac{9}{7}\right)=0$$
$$\frac{1}{13}x+\frac{5}{13}y-\frac{131}{91}=0.$$

Ejercicios

Encuentra, en cada caso, la distancia del punto P a la recta dada y determina si P está del mismo lado de la recta que el origen.

1. $2x+3y-3=0$, $P(5,-2)$.
2. $5x-4y-8=0$, $P(-1,-1)$.
3. $2x-5=0$, $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$.
4. $x+y-6=0$, $P(3,4)$.
5. $8x+7y+2=0$, $P(-2,1)$.
6. $x+7y+21=0$, $P(7,-3)$.
7. $y+9=0$, $P(-3,-7)$.
8. $2x-y+5=0$, $P(-9,0)$.
9. $3x-y-6=0$, $P(1,-4)$.

Encuentra la bisectriz del ángulo agudo formado por las dos rectas dadas.

10. $12x-5y-8=0$ y $6x+8y-7=0$.
11. $9x+12y+21=0$ y $3x+4y+5=0$.
12. $y-6=0$ y $4x-3y+6=0$.
13. $4x+2y-3=0$ y $2x-y+3=0$.
14. $7x+24y-21=0$ y $12x+9y-6=0$.
15. $8x+15y+5=0$ y $3x-4y-25=0$.

16. Encuentra la ecuación de cada una de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas ℓ_1 y ℓ_2 cuyas ecuaciones son $3x-4y+7=0$ y $8x+15y+3=0$.
17. Los lados de un triángulo se encuentran sobre las rectas, $5x-12y-8=0$, $9x+12y+14=0$ y $3x-4y+5=0$. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos del triángulo y prueba que se cortan en un mismo punto.

Ecuaciones paramétricas de una recta

Los puntos $A(1,3)$ y $B(-5,4)$ determinan dos segmentos dirigidos $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ que sólo difieren en su dirección. Al calcular en cada caso la diferencia (extremo final menos extremo inicial) obtenemos parejas ordenadas:

$$B-A=(-5,4)-(1,3)=(-6,1)$$
$$A-B=(1,3)-(-5,4)=(6,-1).$$

La primera sirve para indicar la dirección de A hacia B; la segunda, la dirección de B hacia A. Así, decimos que $\overline{AB}$ tiene la dirección $(-6,1)$ y $\overline{BA}$ la dirección $(6,-1)$ (figuras 2.91 y 2.92).

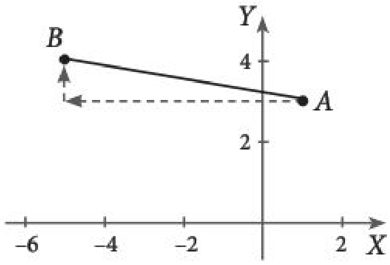


Figura 2.91

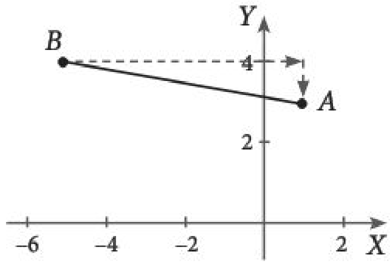


Figura 2.92

Observamos que para ir de A hacia B nos movemos horizontalmente -6 unidades y después 1 unidad verticalmente.

Un móvil se mueve en línea recta *con velocidad constante* del punto $A(2,3)$ hacia el punto $B(1,7)$ y llega a ese punto en una unidad de tiempo. Describir la posición del móvil en cada instante.

Solución:

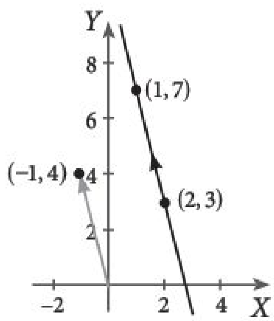


Figura 2.93

Consideremos que el móvil está en $A(2,3)$ al tiempo $t=0$. Por moverse con velocidad constante se tiene que al tiempo t se encontrará en el punto $P(t)=(x(t),y(t))$ cuyas coordenadas satisfacen:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2+at \\ y(t) &= 3+bt \end{aligned}} \tag{2.29}$$

donde a y b son constantes que a continuación determinaremos.

Como la posición del móvil al instante $t=1$ es $P(1)=B(1,7)$ tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= x(1) = 2 + a\cdot 1 \\ 7 &= y(1) = 3 + b\cdot 1. \end{aligned}$$

Así, $(a,b)=(-1,4)$; es decir, $(a,b)=B-A$ y, por tanto, (a,b) indica la dirección de A hacia B.

Al sustituir los valores de a y b en (2.29) obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2 - t \\ y(t) &= 3 + 4t. \end{aligned}} \tag{2.30}$$

Para valores de t entre 0 y 1 el móvil se encuentra en el segmento que une $(2, 3)$ con $(1, 7)$.

Si $t > 1$, el móvil se encuentra en la recta que une los puntos $(2, 3)$ y $(1, 7)$ pero fuera del segmento que ellos determinan, más allá del punto $(1, 7)$.

Si $t < 0$, el móvil también está en dicha recta, pero en el otro lado del punto $(2, 3)$.

Cuando describimos las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en una curva, en términos de una tercera variable t,

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

llamamos a estas *ecuaciones paramétricas* de la curva y decimos que t es un *parámetro*.

Las ecuaciones paramétricas permiten describir una gran cantidad de curvas en el plano. Para obtenerlas, pensamos en un móvil que recorre la curva dada, de manera que en cada instante t las coordenadas del móvil son $(x(t), y(t))$.

Una curva tiene muchas ecuaciones paramétricas distintas. Si pensamos en la curva como una carretera, un móvil puede recorrerla de muchas maneras distintas modificando su velocidad, deteniéndose e, inclusive, recorriéndola en sentido contrario. Por ejemplo, las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2 - t^2 \\ y(t) &= 3 + 4t^2 \end{aligned}$$

describen la misma recta que las ecuaciones (2.30), sin embargo, con estas nuevas describimos el movimiento de un móvil que va de A a B más despacio que el móvil del ejemplo introductorio, pero que después de haber llegado a B va más rápido.

De hecho, la mayor parte de las figuras de este libro están construidas utilizando ecuaciones paramétricas.

En lo sucesivo ya no escribiremos $x(t)$ y $y(t)$, sino simplemente x y y.

Hay varias maneras de describir una recta mediante ecuaciones paramétricas. Mostraremos dos ellas; para la primera nos basaremos en el ejemplo introductorio.

Si conocemos dos puntos de una recta $R(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$, entonces los puntos:

$$\boxed{\begin{aligned} P(t) &= R + t(Q - R) \\ P(t) &= (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \end{aligned}} \tag{2.31}$$

pertenecen a la recta para cualquier valor de t y todo punto de ella se puede escribir de esta forma. Si a partir de esta ecuación escribimos la abscisa y la ordenada de $P(t) = (x, y)$, obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0)$$

de la recta.

Unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $R(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ son
$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$
$y = y_0 + t(y_1 - y_0)$.

- Para $t = 0$, el punto (x, y) es igual a $R(x_0, y_0)$; para $t = 1$, el punto (x, y) es $Q(x_1, y_1)$.
- Para t entre 0 y 1, (x, y) está entre R y Q.
- Para $t > 1$, (x, y) está fuera del segmento RQ en el lado de Q.
- Para $t < 0$, (x, y) está fuera del segmento RQ en el lado de R.

También podemos escribir a cada punto de la recta como:

$$Q + t(R - Q).$$

En el primer caso, podemos considerar que estamos recorriendo la recta en la dirección de R hacia Q, y en el segundo, en sentido contrario.

Otra manera de parametrizar una recta es a partir de alguna de las formas de su ecuación cartesiana, despejando una de las variables y utilizando la otra como parámetro.

Por ejemplo, a partir de la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = mx + b$$

Unas ecuaciones paramétricas de la recta $y = mx + b$ son
$x = t$
$y = mt + b.$

utilizamos x como parámetro:

$$x = t, \quad y = mt + b.$$

Otro ejemplo es a partir de la forma general:

$$Ax + By + C = 0;$$

cuando $A \neq 0$. En esta situación podemos despejar x:

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}$$

Unas ecuaciones paramétricas de la recta $Ax + By + C = 0$ son
$x = -\frac{B}{A}t - \frac{C}{A}$
$y = t$
siempre que $A \neq 0$.

y utilizar y como parámetro:

$$x = -\frac{B}{A}t - \frac{C}{A}, \qquad y = t.$$

Ejemplos

1. Dar unas ecuaciones paramétricas de la recta que une los puntos $P(5, 3)$ y $Q(8, 2)$.

Solución:
Sustituimos los puntos dados en la ecuación (2.31):

$$(5,3) + t\left[(8,2) - (5,3)\right] = (5,3) + t(3,-1);$$

si escribimos por separado la abscisa y la ordenada de estos puntos, entonces:

$$x = 5 + 3t, \qquad y = 3 - t$$

son ecuaciones paramétricas de la recta.

2. Dar unas ecuaciones paramétricas de la recta $3x - 7y - 9 = 0$.

Solución:
Despejamos cualquiera de las variables:

$$y = \frac{3}{7}x - \frac{9}{7}.$$

Utilizamos x como parámetro:

$$x = t, \qquad y = \frac{3}{7}t - \frac{9}{7}.$$

3. Escribir en la forma general la ecuación de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 4t - 8$ y $y = -5t + 1$.

Solución:
Debemos eliminar el parámetro t, para lo cual lo despejamos de una de las dos ecuaciones y lo sustituimos en la otra.
De la primera ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} x &= 4t - 8 \\ 4t &= x + 8 \\ t &= \frac{x}{4} + 2. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} y &= -5t + 1 \\ y &= -5\left(\frac{x}{4} + 2\right) + 1 \\ y &= -\frac{5}{4}x - 10 + 1 \\ \frac{5}{4}x + y + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Podemos multiplicar la ecuación por 4 para eliminar las fracciones:

$$5x + 4y + 36 = 0.$$

Por tanto, la ecuación de esta recta en su forma general es $5x + 4y + 36 = 0$.

Ejemplos

Pensamiento crítico

Usando x como parámetro, encuentra unas ecuaciones paramétricas de la recta cuya ecuación está escrita en forma simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Ejercicios

En cada caso, da unas ecuaciones paramétricas de la recta que une los puntos dados.

1. $P(-2,4)$, $Q(2,-6)$.
2. $P(3,-7)$, $Q(5,4)$.
3. $P(-5,-3)$, $Q(5,3)$.
4. $P(4,-6)$, $Q(-1,1)$.
5. $P(-1,-10)$, $Q(8,1)$.
6. $P(2,1)$, $Q(2,11)$.
7. $P(-9,-3)$, $Q(4,-3)$.
8. $P(0,6)$, $Q(-7,0)$.
9. $P(4,-1)$, $Q(1,-8)$.

En cada caso, da unas ecuaciones paramétricas de la recta dada.

10. $4x+2y+13=0$.
11. $6x-7y+5=0$.
12. $-2x+y-8=0$.
13. $9x-y-9=0$.
14. $7x+5y+20=0$.
15. $5x-2y+14=0$.

En cada caso, escribe en la forma general la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

16. $x=5-t$, $y=-2+6t$.
17. $x=7-3t$, $y=4-2t$.
18. $x=1+4t$, $y=3+5t$.
19. $x=-7+13t$, $y=5-8t$.
20. $x=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}t$, $y=2+\frac{1}{2}t$.
21. $x=4-\frac{13}{4}t$, $y=\frac{1}{8}t$.

Resolución de problemas

Lugares geométricos

Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ que equidistan de los puntos $A(-5,2)$ y $B(1,4)$.

Solución:
La distancia de A a P es:

$$\sqrt{\left(x-(-5)\right)^2+\left(y-2\right)^2}=\sqrt{\left(x+5\right)^2+\left(y-2\right)^2}$$

y la distancia de B a P es:

$$\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-4\right)^2}.$$

Puesto que ambas distancias deben ser iguales, tenemos:

$$\sqrt{\left(x+5\right)^2+\left(y-2\right)^2}=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-4\right)^2},$$

si elevamos al cuadrado y simplificamos:

$$(x+5)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y-4)^2$$
$$x^2+10x+25+y^2-4y+4=x^2-2x+1+y^2-8y+16$$
$$10x+25-4y+4=-2x+1-8y+16$$
$$12x+4y+12=0$$
$$3x+y+3=0.$$

Todos los puntos de la recta $3x+y+3=0$ equidistan de los puntos A y B (figura 2.94).

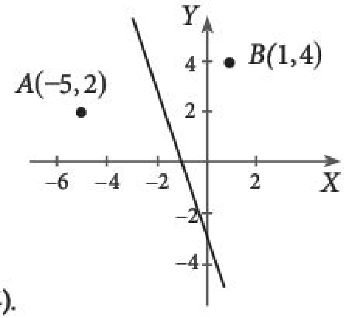


Figura 2.94

El *lugar geométrico* determinado por una ecuación es el conjunto de puntos que la satisfacen.

El objeto de la geometría analítica es estudiar ciertos lugares geométricos utilizando las ecuaciones que los representan y, recíprocamente, representar geométricamente las soluciones de ecuaciones para obtener propiedades de ellas, a partir de su representación geométrica.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-2,-1)$ y $B(0,3)$ sea igual a 16.

Solución:
El cuadrado de la distancia de A a P es:

$$(x-(-2))^2+(y-(-1))^2=(x+2)^2+(y+1)^2$$

y el cuadrado de la distancia de B a P es:

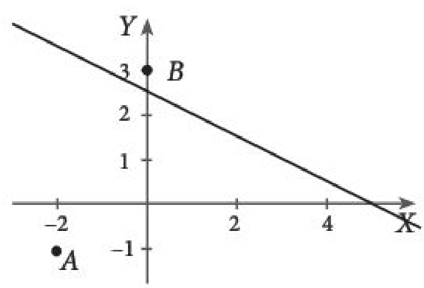
$$(x-0)^2+(y-3)^2=x^2+(y-3)^2.$$

Con los datos del problema planteamos la ecuación:

$$(x+2)^2+(y+1)^2-\left[x^2+(y-3)^2\right]=16.$$

Simplificando tenemos:

$$x^2+4x+4+y^2+2y+1-(x^2+y^2-6y+9)=16$$
$$4x+8y=16-5+9$$
$$y=\frac{-4x+20}{8}$$
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}.$$



El lugar geométrico buscado es la recta $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ (figura 2.95).

Figura 2.95

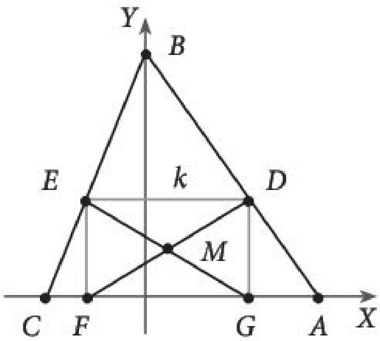


Figura 2.96

2. En el triángulo cuyos vértices son $A(7,0)$, $B(0,10)$ y $C(-4,0)$, encontrar el lugar geométrico que describen los centros de los rectángulos inscritos en ese triángulo y que tienen uno de sus lados sobre el lado AC.

Solución:
Observamos (figura 2.96) que el lado AC está en el eje X y que la altura del triángulo está sobre el eje Y y mide 10.

La ecuación de la recta AB es:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{10}=1.$$

Para construir un rectángulo con las propiedades requeridas, tomamos sobre el eje Y cualquier valor k entre 0 y 10, y trazamos una recta paralela al eje X que pase por k. La ecuación de esta recta es:

$$y=k.$$

La recta $y=k$ corta la recta AB en el punto D y la recta CB en el punto E. Para encontrar las coordenadas de D resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{10}=1$$
$$y=k.$$

Sustituimos el valor de y correspondiente a la segunda ecuación en la primera y despejamos x:

$$\frac{x}{7}+\frac{k}{10}=1$$
$$x=7\left(1-\frac{k}{10}\right).$$

Así, las coordenadas de D son:

$$D\left(7\left(1-\frac{k}{10}\right),k\right).$$

Para encontrar las coordenadas del punto E consideramos la ecuación de la recta CB:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{10}=1,$$

y procediendo de manera análoga a la anterior tenemos que las coordenadas de E son:

$$E\left(-4\left(1-\frac{k}{10}\right),k\right).$$

Los dos vértices del rectángulo que nos falta conocer se encuentran sobre el eje X; entonces, levantamos una perpendicular a este eje que pase por el punto E. Esta recta es vertical y corta el eje X en el punto:

$$F\left(-4\left(1-\frac{k}{10}\right),0\right).$$

De manera análoga, la recta perpendicular al eje X que pasa por D corta el eje X en el punto:

$$G\left(7\left(1-\frac{k}{10}\right),0\right).$$

El centro M del rectángulo es el punto donde se cortan las diagonales, es decir, donde se cortan las rectas FD y GE.

La abscisa de M es el punto medio de las abscisas de E y D, es decir,

$$x=\left(\frac{7-4}{2}\right)\left(1-\frac{k}{10}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{k}{10}\right)$$

y la ordenada es el punto medio de las ordenadas de E y F:

$$y=\frac{k+0}{2}=\frac{k}{2}.$$

De donde,

$$M\left(\frac{3}{2}\left(1-\frac{k}{10}\right),\frac{k}{2}\right).$$

Así, el punto medio depende sólo de la altura del rectángulo. En este caso, como la altura del triángulo es 10, entonces la ordenada de M será, a lo más, 5.

Ahora consideramos el sistema de ecuaciones:

$$x=\frac{3}{2}\left(1-\frac{k}{10}\right) \qquad\qquad y=\frac{k}{2},$$

despejamos k de la segunda ecuación y la sustituimos en la primera:

$$x=\frac{3}{2}\left(1-\frac{2y}{10}\right)=\frac{3}{2}\left(1-\frac{y}{5}\right).$$

Esta última expresión la podemos escribir como:

$$\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{5}=1,$$

Ejemplos

lo que representa una recta que corta el eje X en $\frac{3}{2}$ y el eje Y en 5.

El lugar geométrico buscado es el segmento de la recta $\frac{x}{\frac{3}{2}}+\frac{y}{5}=1$ con $y\in[0,5]$ (figura 2.97).

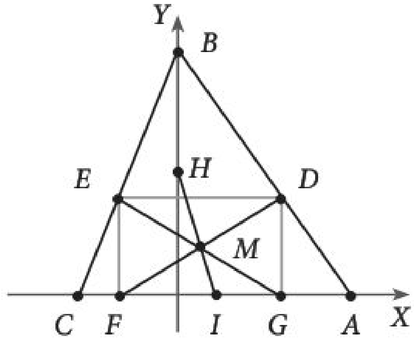


Figura 2.97

Ejercicios

1. Encuentra el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al eje X es seis veces su distancia al eje Y.
2. Encuentra el lugar geométrico de un punto tal que la pendiente de la recta que pasa por él y el punto $P(0,2)$ es cinco veces la pendiente de la recta que pasa por él y el punto $Q(0,-6)$.
3. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $A(3,9)$ y $B(5,2)$.
4. Encuentra el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia a la recta $5x+3y+7=0$ es tres veces su distancia a la recta $6y-8=0$.

Mundo virtual

Geolab

1. **Recta punto-pendiente.** Construye el punto $P(2,3)$ y el escalar $m=4$. Ahora construye la recta a que pasa por P y tiene pendiente m. Utiliza el constructor *Recta Punto-pendiente* del menú de rectas. En la pantalla de datos analíticos, oprime el botón *Datos cartesianos* para ver los valores de los objetos construidos. Observa la ecuación de la recta. Posiblemente no es la que esperabas. Si haces el ejercicio a mano, es probable que obtengas $4x-y-5=0$. Recuerda que si multiplicas la ecuación de una recta por una constante, obtienes la misma recta. De todas las ecuaciones dadas en la forma $Ax+By+C=0$ que representan una recta, Geolab elige aquella en la que $A^2+B^2=1$, es decir, la normalizada. Para normalizar una ecuación hay que dividir todos los coeficientes entre $\sqrt{A^2+B^2}$; en el ejemplo, si dividimos los coeficientes entre $\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$, obtenemos $0.970143x-0.242536y-1.21268=0$, que es el resultado que da Geolab.

En la pantalla gráfica, arrastra el punto P y observa que la recta se traslada con él, pero sigue teniendo la misma inclinación.

2. **Animación.** Generaremos la familia de rectas que pasa por P variando la pendiente de las mismas. Crea una animación que mueva el escalar m entre -10 y 10. En la pantalla de datos analíticos, pon el cursor en el renglón de la recta a y elige que deje traza. En la pantalla gráfica, enciende el botón de traza (T) y ejecuta la animación. Observa un abanico de rectas que pasan por P.
3. **Pendiente.** En una recta $Ax + By + C = 0$ obtenemos la pendiente despejando y y fijándonos en el coeficiente de x; así, $m = -\frac{A}{B}$. Utiliza la construcción del ejercicio 1. Geolab puede utilizar los elementos de un objeto para construir otros. Así, si a es una recta, $a.A$, $a.B$, $a.C$ son los coeficientes A, B y C de la recta. Construye el escalar calculado $n = -a.A \,/\, a.B$ y comprueba que $n = m$.
4. **Ángulo.** Usa la construcción del ejercicio anterior. El ángulo que forma una recta con el eje X es el ángulo cuya tangente es la pendiente de la recta. Usa el constructor *Medida de ángulos → Calculado* para construir el *ángulo calculado g*, poniendo la fórmula $atan(n)$. En el menú de herramientas puedes elegir la manera en que quieres que se muestre el valor del ángulo: radianes, grados:minutos:segundos, o grados con decimales.
5. **Recta por dos puntos.** Construye los puntos $P(4,-1)$ y $Q(8,3)$ y la recta r que pasa por ellos. Observa en la pantalla gráfica que los puntos P y Q aparecen en la lista que está a la derecha. Esto es porque fueron puntos construidos directamente. Puedes elegir cualquiera de ellos y arrastrarlo con el ratón. Observa que la recta también se mueve. Ve también cómo cambia su ecuación.
6. **Intersección de dos rectas.** Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye otros dos puntos $R(2,3)$, $S(-2,1)$ y la recta s que pasa por ellos. En el menú de construcción de puntos, elige *Intersección de rectas* y construye la intersección W de estas rectas; observa el resultado. Ahora cambia los valores de las coordenadas de R y S a $R(5,2)$ y $S(9,6)$. Observa cómo son las rectas. Si en la pantalla de datos analíticos oprimes el botón *Datos cartesianos*, en el renglón del punto W dice *no existe el objeto*. Ahora, pon los valores $R(5,0)$ y $S(9,4)$; en este caso, las dos rectas coinciden y nuevamente el punto W dice *no existe el objeto*.
7. **Rectas perpendiculares y paralelas.** Utiliza la construcción del ejercicio 5. Construye un punto arbitrario A. Ahora construye la recta p perpendicular a r que pasa por A. Observa los coeficientes de ambas rectas, ¿qué relación hay entre ellos? Construye una recta t paralela a r que pase por A. ¿Qué relación hay entre los coeficientes de t y r?
8. **Distancia de un punto a una recta.** Utiliza la construcción del ejercicio 5. Construye una recta que pase por P y Q (al construirla, elige los puntos en ese orden). Construye un punto arbitrario A y la distancia d del punto A a la recta r. Observa que $d < 0$ cuando A está arriba de la recta, y $d > 0$ cuando está debajo. Esto no coincide con lo expuesto en el apartado "Distancia de un punto a una recta". ¿Por qué? Si Geolab construye una recta por los puntos P y Q, la orienta como si fuera un río. Al ir de P a Q, el lado izquierdo es el negativo y el derecho es el positivo. Al calcular

la distancia del punto a la recta, no toma el valor absoluto del numerador de la ecuación (2.30), sino que pone un signo de acuerdo con la orientación de la recta. En la pantalla de datos analíticos, selecciona la recta, y en tipo de dibujo (a la derecha de donde se elige el color) selecciona *orientada* → *continua*. Observa que en el extremo de la recta aparece una flecha que muestra la orientación. Construye otra recta s que pase por Q y P (en ese orden). Observa que la ecuación de s es igual a la de r si multiplicamos todos los coeficientes por -1. La recta s está orientada en el otro sentido que r. Construye la distancia e del punto A a la recta s y observa que ahora s es positiva cuando A está arriba de la recta.

9. **Bisectriz de un ángulo.** Construye los puntos $P(4,-1)$, $Q(8,3)$ y $R(3,6)$. Construye las rectas r y s de P a Q y de P a R, respectivamente (los puntos en ese orden). Construye un punto arbitrario A y las distancias $d1$ y $d2$, de A a r y s, respectivamente. Las rectas dividen el plano en cuatro regiones. Mueve el punto A hacia cada una de las regiones y observa que los números $d1$ y $d2$ son positivos en una de ellas, negativos en la región opuesta por el vértice a la anterior, y que tienen signos opuestos en las otras dos regiones. Construye la bisectriz de las rectas r, s utilizando la opción *Interior* del menú *Bisectriz*. Observa que esta bisectriz pasa por las regiones donde $d1$ y $d2$ tienen el mismo signo. Construye la bisectriz de las rectas r, s utilizando la opción *Exterior* del menú *Bisectriz*. ¿Por qué regiones pasa? En ocasiones no deseamos que Geolab tome la decisión de cuál bisectriz dibujar, en ese caso, podemos construir la bisectriz que pase por la región en donde está cierto punto. Construye la bisectriz de las rectas r, s utilizando la opción *En la misma región que un punto*, y utiliza el punto A para determinar la región. Cámbiala de color para distinguirla de las otras bisectrices. Arrastra el punto A hacia las diferentes regiones y observa cómo lo "persigue" la bisectriz.

Geolab

Resumen de la unidad

- Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

- Forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta $y = mx + b$.
- Ecuación de la recta vertical que pasa por el punto (h, k), $x = h$.
- Forma general de la ecuación de una recta $Ax + By + C = 0$.
- Forma simétrica de la ecuación de una recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- Dos rectas distintas no verticales son paralelas si $m_1 = m_2$.
- Dos rectas no verticales son perpendiculares si $m_1 m_2 = -1$.

- La distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$ es $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.
- Si $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ son las ecuaciones de ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente, las bisectrices de los ángulos determinados por ellas están dadas por:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Ecuaciones paramétricas de la recta.

- Unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $R(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ son:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0).$$

- Unas ecuaciones paramétricas de la recta $y = mx + b$ son:

$$x = t, \quad y = mt + b.$$

- Unas ecuaciones paramétricas de la recta $Ax + By + C = 0$ con $A \neq 0$ son:

$$x = -\frac{B}{A}t - \frac{C}{A}, \quad y = t.$$

Ejercicios de repaso

En cada caso, encuentra la ecuación de la recta que tiene las propiedades dadas.

1. La pendiente es igual a $-\frac{1}{5}$ y pasa por el punto $P(2, 6)$.
2. Pasa por los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(4, -3)$.
3. La pendiente es 1 y la ordenada al origen es igual a -2.
4. Paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ y pasa por el punto $P(-5, -1)$.
5. Perpendicular a la recta $2x - 5y = 0$ y pasa por el punto $P(2, -1)$.
6. Perpendicular a la recta $x = 6$ y pasa por el punto $P(7, -1)$.
7. Paralela a la recta $y = -2$ y pasa por el punto $P(3, 4)$.
8. Pasa por el punto $P(1, -4)$ y forma un ángulo de $135°$ con el eje X.

En cada caso, encuentra lo que se pide.

9. Si dos vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-3, 2)$ y $B(1, 2)$, encuentra el tercer vértice.
10. Si el extremo de un segmento es el punto $A(5, 3)$ y el punto medio de dicho segmento es $B(6, 1)$, ¿cuál es el otro extremo del segmento?

11. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A(5,3)$ y $B(-1,6)$ es igual a 25.
12. Dado el triángulo con vértices $A(-3,7)$, $B(-7,-5)$ y $C(5,1)$ encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta que une los puntos medios de los lados AB y BC y pasa por el punto medio de AC.
13. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A(7,4)$, $B(11,4)$, $C(-3,-4)$, $D(4,2)$.
14. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos AB y CD, donde $A(3,7)$, $B(1,3)$, $C(3,4)$, $D(5,8)$.
15. Los lados de un triángulo están sobre las rectas $11x-3y-1=0$, $7x+4y+23=0$ y $2x-3y+19=0$. Encuentra sus vértices y la longitud de sus lados.
16. Dadas las rectas $20x-21y+6=0$ y $8x-6y-9=0$, encuentra la ecuación de la recta bisectriz del ángulo agudo.
17. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto donde se cortan las rectas $4x+9y+7=0$ y $x-6y-23=0$, y el punto $P(2,7)$.
18. Encuentra los valores de las constantes m y b en la ecuación de la recta $y=mx+b$ si la recta pasa por los puntos $P(-2,6)$ y $Q(3,-4)$.
19. Demuestra que la longitud de cualquier lado del triángulo cuyos vértices son $A(5,-2)$, $B(2,-2)$ y $C(5,-6)$ es menor que la suma de los otros dos lados.
20. Encuentra la ecuación de la recta que es paralela a la recta determinada por los puntos $A(-3,-5)$ y $B(2,-2)$ y que pasa por el punto $C(-3,0)$.
21. Dibuja la región que se encuentra arriba de la recta $2x-9y+5=0$, debajo de la recta $2x-y+10=0$ y debajo de la recta $2x+7y-22=0$. Escribe las desigualdades que describen la región.
22. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto donde se cortan las rectas $x+4y=0$ y $x-3y-7=0$, y que tiene pendiente igual a -6.
23. Encuentra la distancia entre las rectas $5x-3y+6=0$ y $5x-3y-24=0$.
24. Encuentra la distancia entre la recta $5x-8y+16=0$ y el punto $P(5,-2)$.
25. Dado el triángulo con vértices $A(1,7)$, $B(-3,0)$ y $C(6,-2)$, encuentra la distancia de cada uno de los vértices al lado opuesto del triángulo.
26. Considera el triángulo con vértices $A(0,4)$, $B(-2,0)$ y $C(2,0)$ y encuentra sus tres ángulos. ¿Es un triángulo isósceles?
27. Prueba que las rectas $2x+y-11=0$ y $4x+2y-3=0$ son paralelas y encuentra la distancia entre ellas.
28. Sean $A(-2,6)$, $B(1,6)$ y $C(-2,3)$ los vértices de un triángulo isósceles. Prueba que el punto $P(-1,4)$ está sobre la recta que une B y C. Prueba que la suma de las distancias de P a los lados del triángulo es igual a la distancia de C a la recta AB.
29. Repite el problema 28, pero ahora con $P(-3,2)$. ¿Podrías encontrar otro punto para el cual se obtenga el mismo resultado?
30. Encuentra la ecuación de la recta que cumpla que el área del paralelogramo formado por las rectas $x-y-2=0$, $3x-3y-1=0$ y el eje X sea 2. Recuerda que el área del paralelogramo se obtiene multiplicando la base por la altura. La solución no es única.
31. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ y forma en el primer cuadrante, con los ejes coordenados, un triángulo cuya área es 9.

32. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2,-2)$ y es tal que la suma de la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y, más la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje X, sea igual a 3.

33. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-30,8)$ y es tal que la suma de la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje X sea igual a 8 más la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje Y.

34. Considera la recta ℓ dada por la ecuación $7x-3y-63=0$ y el triángulo con vértices $A(-2,7)$, $B(-5,4)$ y $C(4,0)$. Cada lado del triángulo es la diagonal de un paralelogramo cuyos lados son paralelos a la recta ℓ y al eje X.

- **a.** Encuentra los vértices de cada uno de los paralelogramos.
- **b.** Para cada paralelogramo, encuentra la ecuación de la recta que contiene la otra diagonal.
- **c.** Encuentra las coordenadas del punto en el que se cortan las tres rectas del inciso anterior.

35. La cuota por consumo de agua durante el tercer bimestre de 1999 en la Ciudad de México es de \$25.10 —si el consumo fue de 20 m^3 al bimestre—, mientras que por un consumo de 30 m^3, también bimestral, la cuota es de \$40.86. Si la cuota se calculara de manera lineal, ¿cuál sería el monto a pagar por un consumo bimestral de 25 m^3?

36. Considera el triángulo cuyos vértices son el origen, $A(5,0)$ y $B(0,8)$.

- **a.** Encuentra la ecuación de la altura del triángulo que pasa por el origen.
- **b.** Construye un cuadrado en el segundo cuadrante que tenga a B como uno de sus vértices. Llamamos E al vértice opuesto al origen y F al que está sobre el eje X.
- **c.** Construye un cuadrado en el cuarto cuadrante que tenga a A como uno de sus vértices. Llamamos C al vértice opuesto al origen y D al que está sobre el eje Y. ¿Qué coordenadas tienen C y D?
- **d.** Encuentra las coordenadas del punto donde se cortan las rectas EA y BC y prueba que el punto está sobre la altura del inciso **a.**
- **e.** Encuentra la ecuación de la recta que pasa por D y por C. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por E y por F. Encuentra las coordenadas del punto donde se cortan estas rectas y prueba que el punto está sobre la altura del inciso **a.**

37. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,-3)$ y cuya distancia al origen es igual a 1. Sugerencia: Puedes suponer que la ecuación de la recta buscada es de la forma $x+By+C=0$.

Autoevaluación

1. Encuentra la pendiente de la recta que pasa por $(5,4)$ y $(8,-3)$.
   a. $m=-\frac{7}{3}$.
   b. $m=-\frac{3}{7}$.
   c. $m=\frac{1}{13}$.
   d. $m=\frac{7}{3}$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 36.

2. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,-3)$ y tiene pendiente -5.
   a. $y=-5x+13$.
   b. $y=5x-13$.
   c. $y=-5x+7$.
   d. $y=-5x-13$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 43.

3. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no representa la misma recta que las demás?
   a. $-7x+3+\frac{2}{3}y-\frac{1}{2}=0$.
   b. $14x+4y-1=0$.
   c. $-42x+4y-3=0$.
   d. $28x-\frac{8}{3}y+2=0$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 55.

4. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1,4)$ y tiene pendiente 2.
   a. $-x+2y-9=0$.
   b. $2x-y+2=0$.
   c. $2x+y+6=0$.
   d. $2x-y+6=0$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 43.

5. ¿Cuál de los siguientes puntos es colineal con los puntos $(1, 6)$ y $(-2, -3)$?
   a. $(5, 18)$.
   b. $(1, 0)$.
   c. $(2, -3)$.
   d. $(0, -3)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 98.

6. Encuentra la intersección de las rectas $3x-y+5=0$ y $2x+3y-4=0$.
   a. $(2,-1)$.
   b. $\left(-\frac{19}{11},-\frac{2}{11}\right)$.
   c. $(-1,2)$.
   d. $\left(-\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 62.

7. Encuentra la recta paralela a $-2x+8y-1=0$ que pasa por $(2, 3)$.
   a. $-4x+y+5=0$.
   b. $-x+4y-10=0$.
   c. $x+4y-10=0$.
   d. $-x+4y-5=0$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 73.

8. Encuentra la recta perpendicular a $5x-3y+2=0$ que pasa por el punto $(-1,-1)$.
   a. $3x+5y+8=0$.
   b. $3x-5y-2=0$.
   c. $5x-3y+2=0$.
   d. $3x-5y+2=0$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 43 y 73.

9. VEncuentra la distancia del punto $(2, 3)$ a la recta $3x-4y-9=0$.
   a. 27.
   b. $-\frac{27}{5}$.
   c. $\frac{27}{5}$.
   d. $\frac{27}{25}$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 88.

10. Encuentra la distancia entre las rectas $5x-12y-1=0$ y $5x-12y+8=0$.
    a. 9. c. $\frac{7}{13}$.
    d. $\frac{9}{13}$. b. $\frac{9}{169}$.

    En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 92.

Heteroevaluación

1. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-1,8)$ y $Q(-3,-5)$.

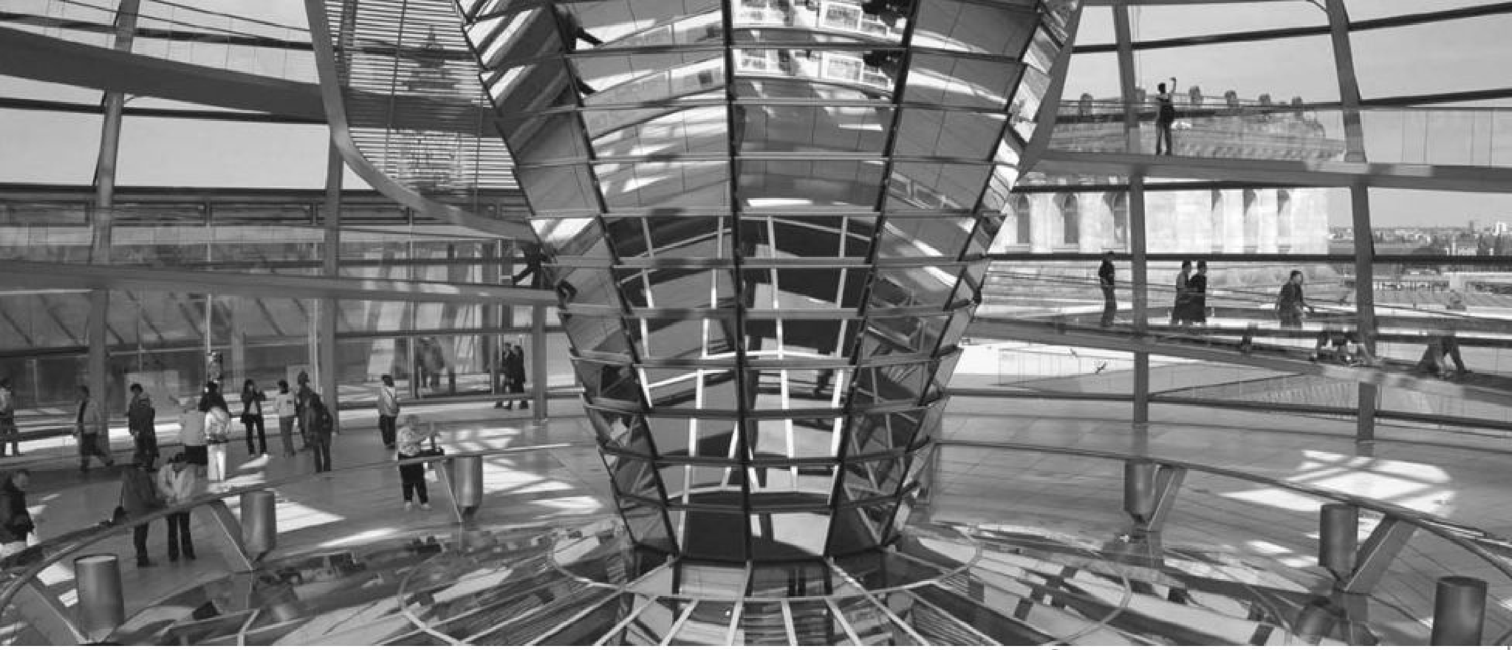
2. Encuentra la distancia del punto $P(-7,2)$ a la recta $y = -3x + 12$.

3. Encuentra la intersección de las rectas $5x - 6y - 7 = 0$ y $10x - 12y + 5 = 0$.

4. Determina la distancia entre las rectas paralelas $-x + 3y - 15 = 0$ y $6x - 18y + 2 = 0$.

5. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $P(3,-5)$ y es perpendicular a la recta $8x + 10y - 15 = 0$.

6. Encuentra las bisectrices de los ángulos formados por las rectas $6x - 8y + 3 = 0$ y $10x + 24y - 7 = 0$.



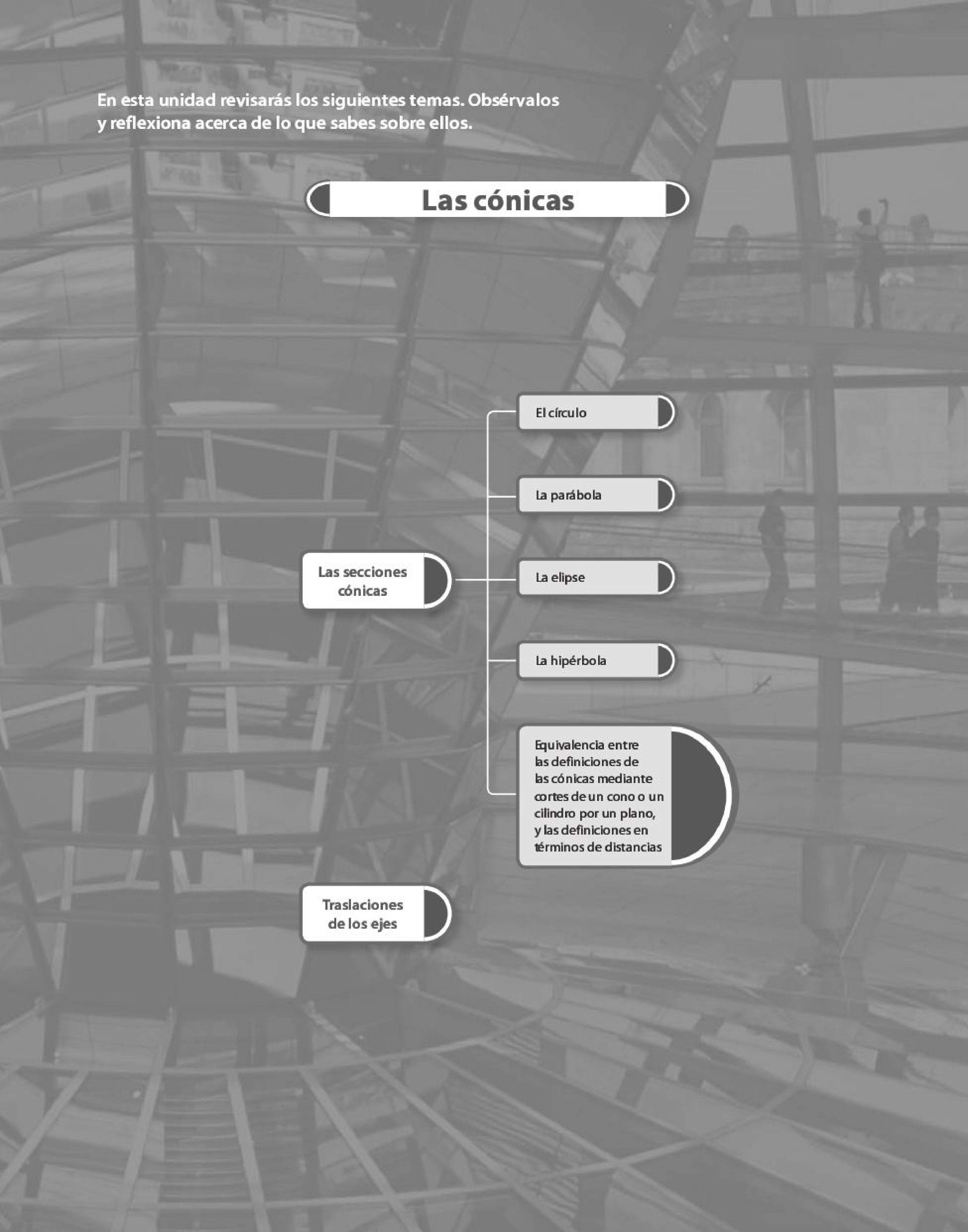
Edificio del Parlamento en Berlín.

Unidad 3 Las cónicas

Aquí se introducen las curvas que constituyen una de las partes centrales de los estudios que se hacen en este libro: las cónicas. Estas han sido profusamente tratadas por los matemáticos. Hay trabajos sobre ellas que se remontan a la época de los famosos geómetras griegos de la Antigüedad. Son muchas sus propiedades, varias de las cuales son aprovechadas en la ingeniería, arquitectura y elaboración de instrumentos ópticos y acústicos.

En esta introducción se les presenta resaltando su aparición como cortes planos de conos de dos mantos y, en ciertos casos, de cilindros. Sin embargo, rápidamente se les relaciona con ecuaciones de segundo grado, al reconocérseles como lugares geométricos de puntos que satisfacen condiciones que se refieren a distancias entre puntos o de puntos a rectas. Para establecer esta conexión, que las trae al ámbito de la geometría analítica, se dedica una sección donde, con argumentos geométricos, se llegan a establecer ecuaciones que relacionan distancias.

Para esta sección es conveniente recordar que el segmento que une el centro a todas las tangentes de un punto P de una esfera dada tienen la misma longitud; como también sucede en el caso del círculo. Son también usados otros argumentos geométricos intuitivamente claros, por ejemplo: una esfera inscrita en un cono (o cilindro) circular recto es tangente a este a lo largo de un círculo y el plano que contiene dicho círculo es paralelo a la base del cono (o cilindro).



En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

Las cónicas

- Las secciones cónicas
  - El círculo
  - La parábola
  - La elipse
  - La hipérbola
  - Equivalencia entre las definiciones de las cónicas mediante cortes de un cono o un cilindro por un plano, y las definiciones en términos de distancias
- Traslaciones de los ejes

Las secciones cónicas

Reloj solar del escultor polaco G. Kowalski.

Durante los Juegos Olímpicos de 1968 escultores de todo el mundo donaron algunas de sus obras, que hoy adornan el anillo periférico de la Ciudad de México. En la fotografía de la izquierda vemos la obra *Reloj solar* del escultor polaco G. Kowalski, que está formada por varios conos truncados.

Un cono circular recto de dos mantos es una superficie que se obtiene al girar una recta ℓ como se indica en la figura 3.1. En esta figura, C es un círculo con centro O. El punto V que queda fijo al girar ℓ es llamado el *vértice* del cono y cada recta que pasa por V y que está en la superficie se llama una *generatriz* del cono. La recta OV, que es perpendicular al plano que contiene el círculo C, es llamada el *eje del cono*.

El ángulo α formado por el eje del cono y cualquiera de las generatrices es llamado el *semiángulo central* del cono.

Para lo que sigue es conveniente recordar que el ángulo formado por un plano P y una recta ℓ que no es perpendicular a P es el ángulo β (figura 3.2).

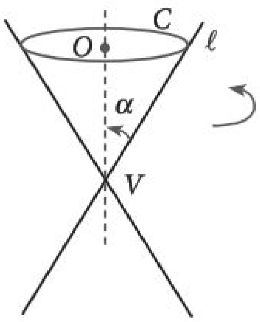


Figura 3.1

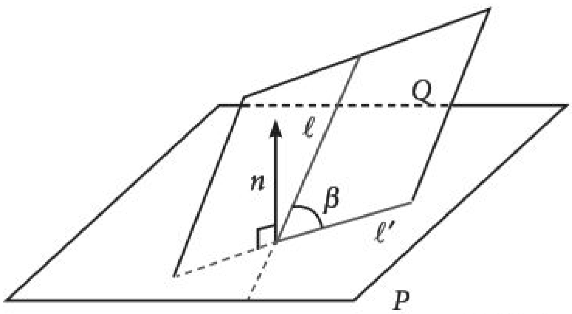
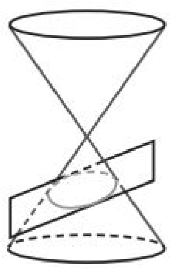


Figura 3.2

Dicho ángulo $0 \leq \beta < 90°$ es el ángulo entre la recta ℓ y la recta ℓ' que es la intersección del plano P y el plano Q que contiene las rectas ℓ y n, donde n es perpendicular al plano P. Cuando ℓ es perpendicular a P, definimos $\beta = 90°$.

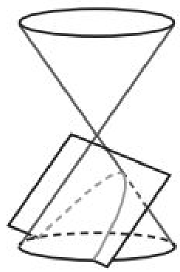
Así, el ángulo entre una recta y un plano varía entre 0° y 90°. Decimos que el plano y la recta son paralelos si $\beta = 0°$ y que son perpendiculares si $\beta = 90°$.

Se conocen como *secciones cónicas* aquellas curvas que pueden obtenerse al cortar un cono de dos mantos con un plano, como se muestra en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5.



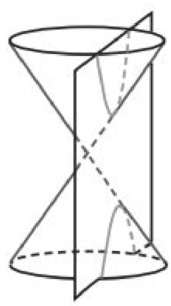
elipse

Figura 3.3



parábola

Figura 3.4



hipérbola

Figura 3.5

Supongamos que α es el semiángulo central del cono y que el plano forma un ángulo $0 \leq \beta < 90°$ con el eje del cono, entonces la cónica originada en el corte es:

- Una *elipse*, si $\alpha < \beta < 90°$.
- Una *parábola*, si $\beta = \alpha$.
- Una *hipérbola*, si $0 < \beta < \alpha$.

Los siguientes son casos particulares de cónicas:

- El *círculo*; caso particular de la elipse, cuando $\beta = 90°$, es decir, cuando el eje del cono es perpendicular al plano que hace el corte. O sea, el plano es horizontal (figura 3.6).
- *Dos rectas que se cortan*; caso particular de la hipérbola, es decir, el plano de corte es vertical, pasa por el vértice del cono (figura 3.7).
- *Un punto*, cuando el plano corta el cono únicamente en el vértice, caso especial en que $\beta = 90°$ y que el plano pasa por el vértice (figura 3.8).
- *Una recta*, cuando el plano es tangente al cono (caso especial de $\beta = \alpha$) (figura 3.9).

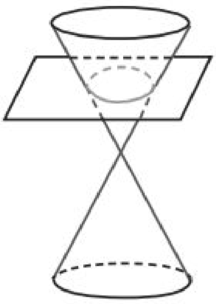


Figura 3.6

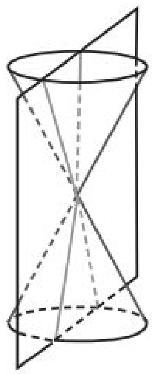


Figura 3.7

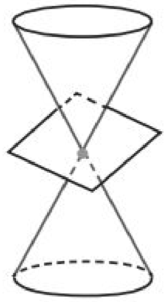


Figura 3.8

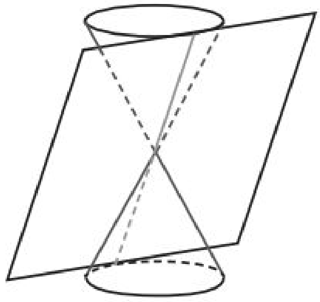


Figura 3.9

Los últimos tres casos se llaman *cónicas degeneradas*.

Cuando se corta un cilindro con un plano, también se obtienen cónicas, algunas de las cuales son cónicas degeneradas.

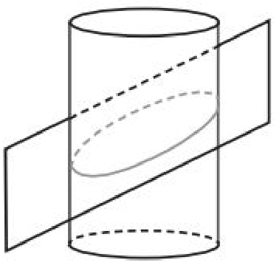


Figura 3.10

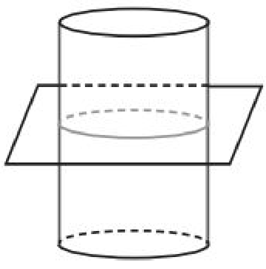


Figura 3.11

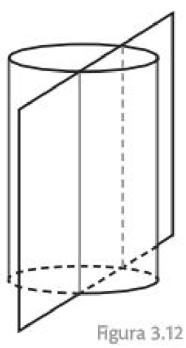


Figura 3.12

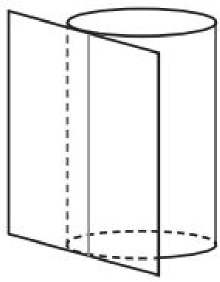


Figura 3.13

- Cuando el plano no es paralelo ni perpendicular al eje del cilindro, se obtiene una *elipse* (figura 3.10).
- Cuando el plano es perpendicular al eje del cilindro, se obtiene un *círculo* (figura 3.11).
- Cuando el plano es paralelo al eje del cilindro se pueden obtener: *dos rectas paralelas, una recta* o *el conjunto vacío* (figuras 3.12 y 3.13).

Las definiciones geométricas de las cónicas no resultan prácticas para muchas aplicaciones. Con el uso de la geometría sintética es posible probar que estas definiciones son equivalentes a otras que están dadas en términos de distancias y que permiten obtener propiedades y aplicaciones de ellas.

Veamos primero algunos ejemplos.

El círculo

Encontrar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen es 4 (figura 3.14).

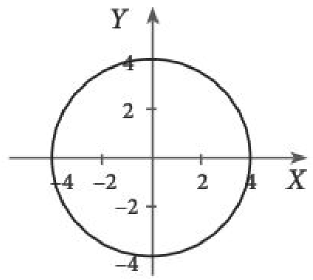


Figura 3.14

Solución:

En general, los puntos que equidistan de un punto dado describen un círculo con centro en dicho punto. Así, en este caso el lugar geométrico es un círculo de radio 4, con centro en el origen. Un punto $P(x, y)$ está sobre el círculo si:

Dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, la distancia de P a Q es $d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$$d(P,O)=4.$$

Sustituimos las coordenadas de P y O en la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1):

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=4.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$x^2+y^2=16,$$

o bien:

$$x^2+y^2-16=0,$$

que es la ecuación del círculo con centro en O y radio 4.

En la unidad 4 estudiaremos con detenimiento los círculos.

La parábola

Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $y+1=0$ y del punto $F(0,1)$.

Solución:
Llamamos ℓ a la recta (figura 3.15). Para que un punto $Q(x,y)$ pertenezca a este lugar geométrico, debe satisfacer:

$$d(Q,\ell)=d(Q,F).$$

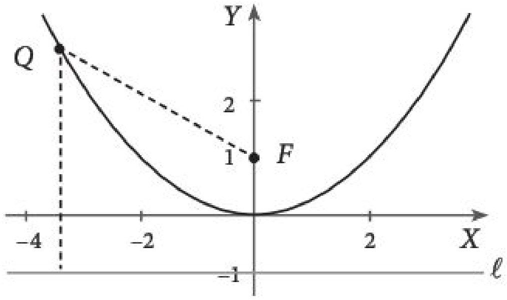


Figura 3.15

Sustituimos la ecuación de ℓ y las coordenadas de F y Q en las fórmulas de la distancia de un punto a una recta (2.19) y de la distancia entre dos puntos (1.1).

Obtenemos:

$$\frac{|y+1|}{\sqrt{1^2}}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}.$$

La distancia de un punto $P(x_1,y_1)$ a la recta $Ax+By+C=0$ es $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$(y+1)^2=x^2+(y-1)^2.$$

Pasamos todos los términos al mismo miembro, es decir, efectuamos las operaciones:

$$\begin{aligned}(y+1)^2-x^2-(y-1)^2&=0\\ y^2+2y+1-x^2-\left(y^2-2y+1\right)&=0\\ -x^2+4y&=0,\end{aligned}$$

que es la ecuación buscada.

Esta curva se denomina *parábola* y la estudiaremos con detenimiento en la unidad 5.

La elipse

Encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $F(12, 0)$ y $F'(-12, 0)$ sea igual a 26.

Solución:
Para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a este lugar geométrico (figura 3.16) debe satisfacer:

$$d(P,F)+d(P,F')=26.$$

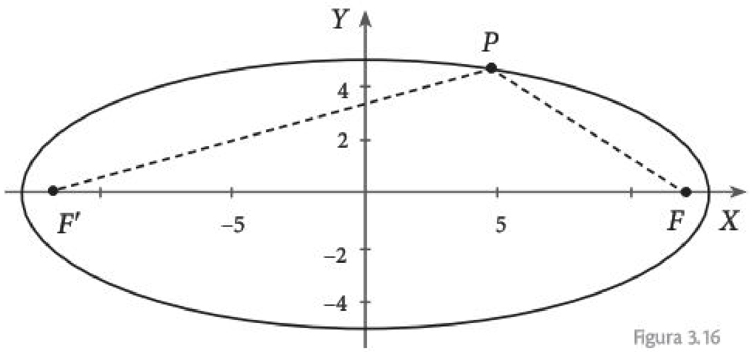


Figura 3.16

Sustituimos las coordenadas de los puntos $P(x, y)$, $F(12,0)$ y $F'(-12,0)$ en la ecuación anterior y utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1), obteniendo:

$$\sqrt{(x-12)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-(-12))^2+(y-0)^2}=26$$
$$\sqrt{(x-12)^2+y^2}+\sqrt{(x+12)^2+y^2}=26.$$

Para eliminar los radicales, realizamos el siguiente procedimiento, de manera que del lado izquierdo de la ecuación quede uno de los radicales:

$$\sqrt{(x-12)^2+y^2}=26-\sqrt{(x+12)^2+y^2},$$

después elevamos ambos miembros al cuadrado, teniendo cuidado de aplicar correctamente la fórmula del cuadrado de un binomio:

$$(x-12)^2+y^2=676-52\sqrt{(x+12)^2+y^2}+\left[(x+12)^2+y^2\right].$$

Efectuamos las operaciones indicadas y pasamos todos los términos al lado izquierdo, excepto el radical:

$$x^2-24x+144+y^2=676-52\sqrt{(x+12)^2+y^2}+x^2+24x+144+y^2$$
$$-48x-676=-52\sqrt{(x+12)^2+y^2}$$
$$12x+169=13\sqrt{(x+12)^2+y^2}.$$

Elevamos nuevamente al cuadrado, eliminando así el segundo radical:

$$(12x+169)^2 = 169\left[(x+12)^2 + y^2\right].$$

Efectuamos las operaciones:

$$144x^2 + 24(169)x + (169)^2 = 169\left(x^2 + 24x + 144 + y^2\right);$$

y finalmente:

$$25x^2 + 169y^2 - 4225 = 0,$$

que es la ecuación del lugar geométrico pedido.

El lugar geométrico formado por los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante se denomina *elipse*. En la unidad 6, estudiaremos las elipses con detenimiento.

La hipérbola

Encontrar el lugar geométrico que consta de todos los puntos tales que la diferencia entre las distancias de ellos a los puntos $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$ es igual a 2 (figura 3.17).

Solución:

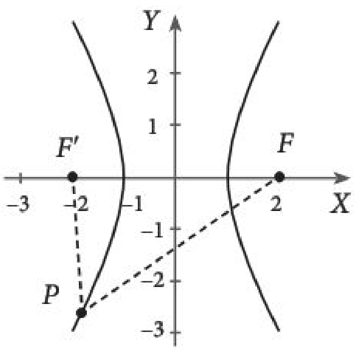


Figura 3.17

Para que un punto $P(x,y)$ pertenezca a este lugar geométrico, debe satisfacer:

$$\boxed{d(P,F') - d(P,F) = 2,} \tag{3.1}$$

o bien:

$$d(P,F) - d(P,F') = 2,$$

es decir,

$$\boxed{d(P,F') - d(P,F) = -2.} \tag{3.2}$$

Combinamos las ecuaciones (3.1) y (3.2), y obtenemos:

$$d(P,F)-d(P,F')=\pm 2.$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos $P(x,y)$, $F(2,0)$ y $F(-2,0)$ en la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1) y obtenemos:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-(-2))^2+(y-0)^2}=\pm 2$$
$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\pm 2.$$

Procedemos de manera similar al caso de la elipse, pasando un radical al otro lado de la ecuación y elevando al cuadrado:

$$(x-2)^2+y^2=\left[(x+2)^2+y^2\right]\pm 4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+4.$$

Simplificando y dejando solo al radical en un lado de la ecuación, tenemos:

$$x^2-4x+4+y^2=x^2+4x+4+y^2\pm 4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+4$$
$$2x+1=\pm\sqrt{(x+2)^2+y^2}.$$

Elevando al cuadrado nuevamente, deja de importar el signo $\pm$:

$$\left(2x+1\right)^2=(x+2)^2+y^2$$
$$4x^2+4x+1=x^2+4x+4+y^2.$$

Pasamos todos los términos a un lado de la ecuación y obtenemos:

$$3x^2-y^2-3=0,$$

que es la ecuación del lugar geométrico pedido.

El lugar geométrico formado por los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante se denomina *hipérbola*. En la unidad 7, estudiaremos las hipérbolas con detenimiento.

De acuerdo a los ejemplos anteriores, podemos definir las cónicas de la siguiente manera:

- Una *parábola* es el conjunto de los puntos del plano que equidistan de una recta fija y un punto fijo que no está en ella.
- Una *elipse* es el conjunto de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante.
- Una *hipérbola* es el conjunto de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos es constante.

Estas definiciones son similares a la ya conocida del *círculo*, como el conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto fijo es constante.

La geometría analítica toma estas definiciones y las combina con el álgebra; así todas las cónicas pueden representarse mediante ecuaciones de segundo grado en dos variables, y recíprocamente, toda ecuación de segundo grado describe una cónica o un caso degenerado de alguna de ellas.

Equivalencia entre las definiciones de las cónicas mediante cortes de un cono o un cilindro por un plano, y las definiciones en términos de distancias

La mayoría de los libros empiezan el estudio de las cónicas hablando de los diferentes cortes que puede hacer un plano a un cono, y posteriormente se definen dichas cónicas en términos de distancias de un punto a dos focos o a un foco y una directriz. Pero no es usual que se muestre que estos dos conceptos son equivalentes.

Dado que no es fácil encontrar las demostraciones de dichas equivalencias, hemos decidido incluirlas aquí, haciendo la aclaración de que este apartado es optativo en un primer curso de geometría analítica, ya que si bien no son difíciles, sí requieren de cierta madurez por parte del estudiante.

Cortes de un cilindro

Un cilindro circular recto es una superficie que se obtiene al hacer girar una recta ℓ como indicamos a continuación.

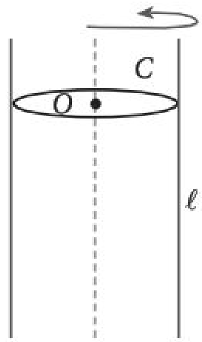


Figura 3.18

En la figura 3.18, C es un círculo con centro en O. Observemos que ℓ es perpendicular al plano que contiene a C. La recta que pasa por O y es perpendicular al plano que contiene a C se llama *eje del cilindro*.

Es claro que si un plano corta el eje del cilindro en un ángulo recto, se forma un círculo.

Cuando el plano corta el cilindro de manera que no sea paralelo ni perpendicular al eje, forma una curva E que parece elipse. Veremos que efectivamente es una elipse.

Consideremos una esfera del mismo radio que el cilindro; deslicémosla en el cilindro, como si fuera una pelota de tenis dentro de su envase, hasta que toque el plano. Tomemos otra esfera y hagamos lo mismo en el otro lado del plano. Las esferas tocan el plano en dos puntos F_1 y F_2 (figura 3.19). Veremos que estos son los focos de la elipse. (A la derecha aparece la misma figura vista de perfil, y puede ser más fácil seguir la construcción en ella).

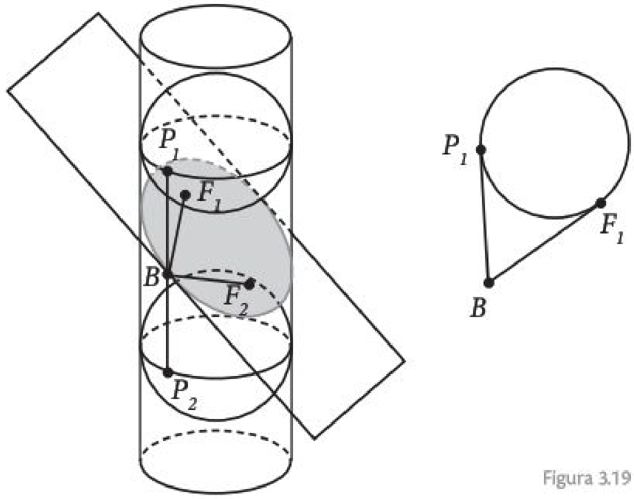


Figura 3.19

Sea B un punto de la curva E. La recta que está en el cilindro y pasa por B toca las esferas en dos puntos P_1 y P_2.

BF_1 y BP_1 son tangentes a la esfera desde B, así que por la simetría de la esfera tenemos:

$$BF_1 = BP_1;$$

de igual manera,

$$BF_2 = BP_2,$$

luego:

$$BF_1 + BF_2 = BP_1 + BP_2 = P_1P_2.$$

Sin embargo, la distancia P_1P_2 es independiente del punto B que se haya escogido en la curva E, ya que es la distancia entre los ecuadores de las esferas, por tanto, $BF_1 + BF_2$ es constante para todo punto B de la curva E, así que E es una elipse.

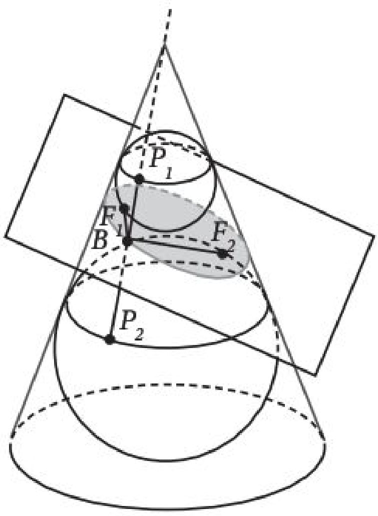


Figura 3.20

Cortes de un cono

El argumento anterior puede aplicarse también a la figura 3.20, por lo que un plano que corta un cono con un ángulo menor al formado por el eje y la generatriz genera una elipse.

Conforme se inclina el plano la elipse se alarga; y cuando es paralelo a la generatriz, la curva deja de ser cerrada y se vuelve una parábola, como veremos un poco más adelante.

Si inclinamos más el plano, este corta el cono dos veces; una vez en la parte inferior y otra en la superior. Llamemos H a la curva formada por la intersección del plano y el cono. Veamos que H es una hipérbola.

Coloquemos dos esferas dentro del cono de manera que sean tangentes al plano de corte, como se muestra en la figura 3.21.

Consideremos un punto B en la curva H. De manera similar a como lo hicimos con la elipse, si sobre el cono construimos una recta que pase por B, esta es tangente a las esferas en P_1 y P_2; entonces:

$$BF_1 = BP_1 \quad \text{y} \quad BF_2 = BP_2,$$

luego:

$$BF_2 - BF_1 = BP_2 - BP_1 = P_1P_2.$$

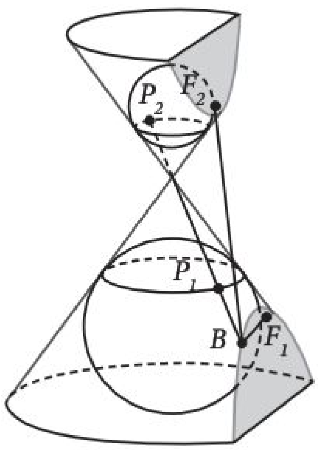


Figura 3.21

Como esta distancia es constante, entonces BF_2 BF_1 es constante y, por tanto, H es una hipérbola.

Por último, consideremos un plano γ paralelo a la generatriz del cono. Veremos que la curva formada por la intersección del plano y el cono es una parábola.

Consideremos dentro del cono una esfera que sea tangente al plano, como en la figura 3.22. La intersección de la esfera y el cono forma un círculo C. Este círculo está en un plano δ que es perpendicular al eje del cono.

Los planos γ y δ se cortan en una recta ℓ. Veremos que esta recta es la directriz de la parábola, y el punto F donde la esfera toca el plano γ es su foco.

Tomemos un punto B en la curva p. La recta que une B y el vértice del cono corta el círculo C en un punto R. Este punto está también en el plano δ.

La recta vertical que pasa por B corta el plano δ en un punto D.

En el plano γ, tracemos la recta perpendicular a ℓ que pasa por B. Esta recta corta ℓ en el punto S. La longitud del segmento BS es la distancia de B a ℓ.

$BF = BR$, ya que BF y BR son tangentes a la esfera, trazadas desde B.

Como el plano γ tiene la misma inclinación que una generatriz del cono, los ángulos RBD y DBS son iguales y los ángulos RDB y DSB son rectos, así que los triángulos RBD y DBS son congruentes y, por tanto,

$$BS = BR = BF;$$

es decir, la distancia de B a F es la misma que la distancia de B a ℓ. Como B era un punto arbitrario de la curva p, entonces p es una parábola.

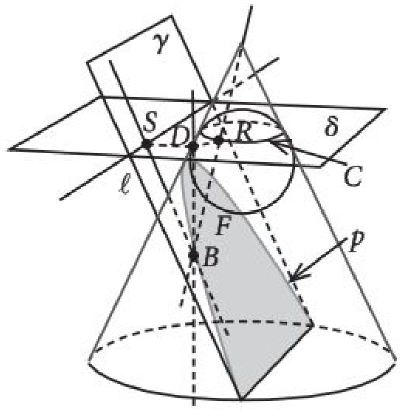


Figura 3.22

Traslaciones de los ejes

Consideremos los puntos $A(5,2)$, $B(0,0)$ y $C(4,6)$ con respecto a un sistema de coordenadas XY en el plano cartesiano. Si colocamos otros ejes cartesianos $X'Y'$, paralelos a los anteriores pero de manera que su origen esté en el punto $C(4,6)$ del sistema original, ¿cuáles serán las coordenadas de los puntos A, B y C respecto a los ejes $X'Y'$?

Solución:
Veamos primero la solución gráficamente.

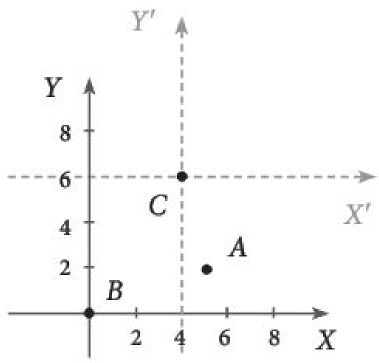


Figura 3.23

Dibujamos los ejes cartesianos XY y marcamos los puntos A, B y C, como en la figura 3.23. Ahora olvidémonos de los ejes originales y dibujemos un nuevo par de ejes $X'Y'$ utilizando la misma escala que la original, cuyo origen esté en C. Vemos que las coordenadas de los puntos A, B y C, respecto al nuevo sistema de coordenadas, son $A(1,-4)$, $B(-4,-6)$ y $C(0,0)$.

Observamos que lo que hicimos fue restar las coordenadas de C a las coordenadas de los puntos respecto al sistema XY para obtener las coordenadas de ellos, respecto al nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$:

$$(5,2) \to (5-4, 2-6) = (1,-4)$$
$$(0,0) \to (0-4, 0-6) = (-4,-6)$$
$$(4,6) \to (4-4, 6-6) = (0,0).$$

En el estudio de las cónicas, a veces es conveniente "mover" los ejes cartesianos para que la curva que estamos estudiando quede en una posición más "fácil" respecto a los ejes cartesianos y su ecuación sea más simple. Los movimientos que se pueden hacer con los ejes son *traslaciones*, que veremos a continuación, y *rotaciones*, que veremos en la unidad 8.

Consideremos un sistema coordenado XY en el plano cartesiano. Tomemos un punto $O'(h,k)$ distinto del origen, tracemos un nuevo par de ejes cartesianos $X'Y'$, con origen en O', paralelos a los ejes X y Y originales. Cada punto P del plano puede expresarse con coordenadas en términos de XY, o en términos de $X'Y'$.

Veamos cómo encontrar las coordenadas de un punto cualquiera P en el nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$.

Llamemos (x,y) a las coordenadas de P, respecto al sistema XY, y (x',y') a sus coordenadas respecto a $X'Y'$.

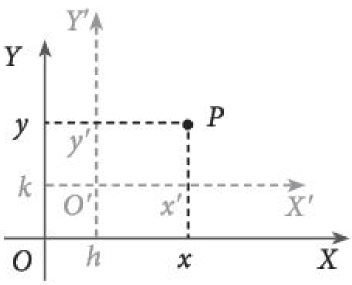


Figura 3.24

En la figura 3.24, trazamos desde P rectas perpendiculares a los ejes XY para encontrar sus coordenadas x, y. Observamos que estas rectas también cortan los ejes $X'Y'$ en x', y' respectivamente. De la misma manera, marcamos en los ejes XY las coordenadas h, k de O'.

Tenemos, entonces:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k,$$

con lo cual hemos encontrado la relación entre ambos sistemas de coordenadas de P:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{aligned}} \tag{3.3}$$

Esto es, para obtener las coordenadas de P respecto al nuevo sistema $X'Y'$, se deben restar, a las coordenadas originales de P, las coordenadas originales del nuevo origen O'. Estas fórmulas se conocen como *fórmulas de traslación de ejes* y relacionan las coordenadas de P, respecto al sistema original de coordenadas XY, con sus coordenadas respecto al nuevo sistema $X'Y'$.

Ejemplos

1. Encontrar las coordenadas de los puntos $A(3,-2)$, $B(-7,3)$ y $C(2.4,-8.6)$ si se traslada el origen de coordenadas al punto $O'(-4,3)$ (figura 3.25).

Solución:
Sustituimos las coordenadas de O' en las fórmulas de traslación (3.3):

$$x' = x - (-4) = x + 4$$
$$y' = y - 3.$$

Para trasladar el sistema de coordenadas XY al sistema $X'Y'$ con origen en el punto $O'(h,k)$ utilizamos las fórmulas
$$x' = x - h$$
$$y' = y - k.$$

Sustituimos las coordenadas x, y de los puntos A, B, C en las ecuaciones anteriores para obtener sus coordenadas x', y'.

Para el punto A: $x' = 3 + 4 = 7$
$y' = -2 - 3 = -5.$

Para el punto B: $x' = -7 + 4 = -3$
$y' = 3 - 3 = 0.$

Para el punto C: $x' = 2.4 + 4 = 6.4$
$y' = -8.6 - 3 = -11.6.$

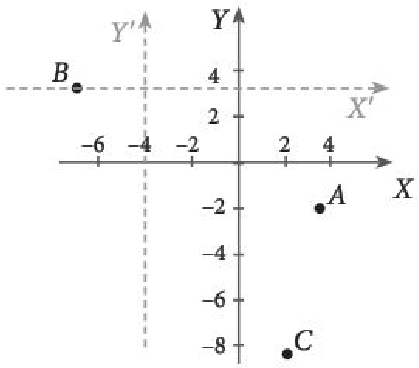


Figura 3.25

Así que, las nuevas coordenadas de los puntos son $A(7,-5)$, $B(-3,0)$, $C(6.4,-11.6)$.

2. Trasladar los ejes para tener un nuevo sistema de coordenadas con origen O en el punto medio del segmento delimitado por $A(5,5)$ y $B(11,-3)$ y dar las coordenadas de A y B respecto a este nuevo sistema de coordenadas.

Solución:
Encontramos primero el punto medio de A y B:

$$h = \frac{5+11}{2} = 8 \qquad k = \frac{5-3}{2} = 1,$$

así que las coordenadas del punto medio son $(8,1)$ (figura 3.26).

Entonces, las fórmulas de traslación de ejes están dadas, en este caso, por las fórmulas:

$$x' = x - 8$$
$$y' = y - 1.$$

Las nuevas coordenadas de A son:

$$x' = 5 - 8 = -3$$
$$y' = 5 - 1 = 4.$$

Ejemplos

Las nuevas coordenadas de B son:

$$x' = 11 - 8 = 3$$
$$y' = -3 - 1 = -4.$$

Observemos que el punto medio de $(-3,4)$ y $(3,-4)$ tiene coordenadas $\left(x', y'\right) = \left(0,0\right)$, como era de esperarse.

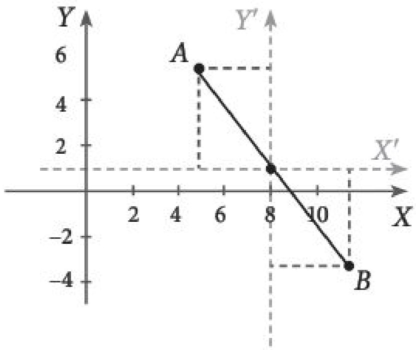


Figura 3.26

Supongamos que la recta ℓ tiene ecuación $5x - 3y - 15 = 0$. Encontrar la ecuación de la misma recta, con respecto al sistema de ejes $X'Y'$ paralelos a los originales y con origen en $O'(9,5)$.

Solución:
Resolvamos primero el problema geométricamente. Graficamos la recta; para ello, conviene escribir la ecuación en la forma de pendiente-ordenada al origen:

$$3y = 5x - 15$$
$$y = \frac{5}{3}x - 5.$$

Así, vemos que la recta tiene pendiente $\frac{5}{3}$ y corta el eje Y en $(0,-5)$.

Tracemos ahora los nuevos ejes X' y Y' con origen en $O'(9,5)$ (figura 3.27). Vemos que la recta corta el nuevo eje Y' en el punto $(0,5)$ y tiene la misma pendiente $\frac{5}{3}$. Si llamamos (x', y') a las coordenadas de los puntos, respecto al nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la recta es:

$$y' = \frac{5}{3}x' + 5,$$

que, en la forma general, es:

$$\boxed{5x' - 3y' + 15 = 0.} \qquad (3.4)$$

Pensamiento crítico

Si consideramos dos puntos $P\left(x_1, y_1\right)$ y $Q\left(x_2, y_2\right)$ en el plano cartesiano y aplicamos una traslación, ¿cómo es la distancia entre P' y Q' con respecto a la distancia entre P y Q?

Veamos ahora otra manera de obtener esta última ecuación, utilizando las fórmulas de traslación de ejes (3.3).

Tenemos una recta dada por una ecuación en x, y:

$$\boxed{5x - 3y - 15 = 0.} \qquad (3.5)$$

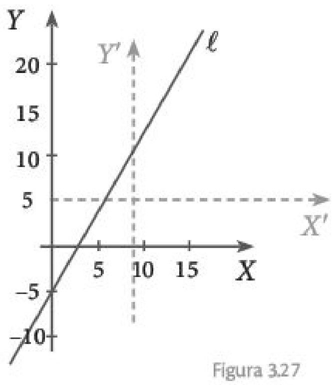


Figura 3.27

Queremos trasladar los ejes de manera que el nuevo origen quede en el punto $O'(9,5)$. Las fórmulas de la traslación de ejes:

$$x' = x - 9$$
$$y' = y - 5$$

nos dan los valores de x', y' en términos de x, y.

Lo que necesitamos ahora es conocer los valores de x, y en términos de x', y', para sustituirlos en la ecuación (3.5).

Despejamos x, y de las ecuaciones anteriores:

$$x = x' + 9$$
$$y = y' + 5,$$

y sustituimos estos valores en la ecuación de la recta ℓ (3.5):

$$5(x' + 9) - 3(y' + 5) - 15 = 0.$$

que es la misma ecuación que obtuvimos geométricamente.

Efectuando las operaciones, tenemos:

$$5x' - 3y' + 15 = 0'$$

En general, si tenemos un lugar geométrico que satisface una ecuación en x, y respecto a un sistema de coordenadas XY y trasladamos los ejes, de manera que el origen quede colocado en un punto $O'(h,k)$, mediante las fórmulas de traslación:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k,$$

para obtener la ecuación de dicho lugar geométrico respecto al nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$, debemos despejar x y y de las ecuaciones anteriores:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}} \qquad (3.6)$$

y sustituir estos valores en la fórmula del lugar geométrico dado.

Ejemplos

1. Dar la ecuación de la recta $4x - 7y - 6 = 0$ con respecto al sistema cuyo origen es $O'(-2,5)$ y encontrar el punto (x', y') donde corta el nuevo eje de las ordenadas.

Solución:

Sustituimos x y y de acuerdo con las fórmulas (3.6):

$$x = x' + (-2)$$
$$y = y' + 5;$$

en la ecuación de la recta:

$$4(x' - 2) - 7(y' + 5) - 6 = 0.$$

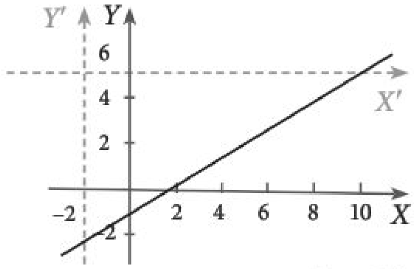


Figura 3.28

Efectuamos las operaciones y ponemos la ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y' = \frac{4}{7}x' - 7.$$

Así, la recta corta el nuevo eje de las ordenadas en el punto $(x', y') = (0, -7)$ (figura 3.28).

2. Encontrar la ecuación de la parábola formada por los puntos que equidistan del punto $P(5, 6)$ y de la recta ℓ cuya ecuación es $y = 4$.

Solución:
Si Q es un punto de la parábola, podemos igualar directamente las distancias:

$$d(\ell, Q) = d(P, Q),$$

sustituir los valores y simplificar la ecuación, o podemos pensar en trasladar los ejes de manera que el nuevo origen quede en el punto medio entre P y ℓ, que es $O'(5, 5)$, utilizando las fórmulas (3.3) (ver la figura 3.29):

$$x' = x - 5$$
$$y' = y - 5.$$

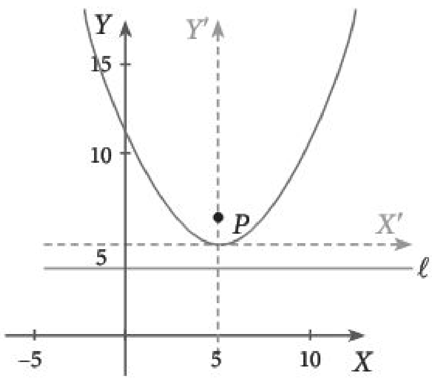


Figura 3.29

Las coordenadas de P en el nuevo sistema son:

$$(5-5, 6-5) = (0, 1).$$

Despejamos y de la segunda fórmula de traslación y la sustituimos en la ecuación de la recta obteniendo que su nueva ecuación es:

$$y' + 5 = 4,$$

es decir,

$$y' = -1.$$

Estos son los datos de la parábola de la sección anterior, así que la ecuación de la parábola respecto al sistema de coordenadas $X'Y'$ es:

$$(x')^2 - 4y' = 0.$$

Para ponerla en términos del sistema de coordenadas original, sustituimos x', y' usando las fórmulas de traslación de ejes y obtenemos:

$$(x-5)^2 - 4(y-5) = 0.$$

Efectuando las operaciones obtenemos:

$$x^2 - 10x - 4y + 45 = 0,$$

que es la ecuación buscada.

3. Encontrar la ecuación de la elipse formada por el conjunto de puntos cuyas distancias a los puntos $F'(-17,-3)$ y $F(7,-3)$ suman 26. Ver la figura 3.30.

Solución:
Colocamos un nuevo origen O' en el punto medio entre F' y F, que tiene coordenadas

$$O\left(\frac{-17+7}{2}, \frac{-3-3}{2}\right) = O(-5,-3).$$

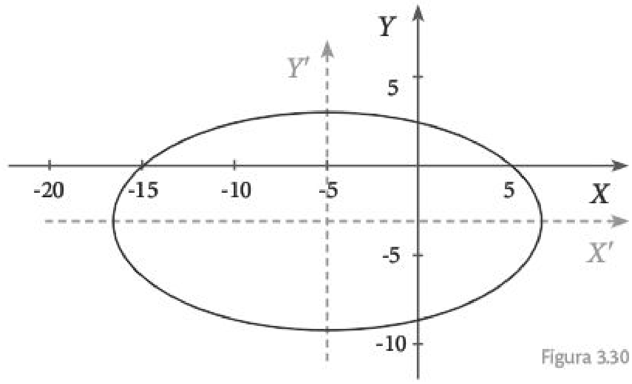


Figura 3.30

Usando las fórmulas de traslación (3.3):

$$x' = x - (-5) = x + 5$$
$$y' = y - (-3) = y + 3,$$

las coordenadas de F' y F respecto a este nuevo sistema de coordenadas son:

$$F': \quad (-17+5, -3+3) = (-12, 0)$$
$$F: \quad (7+5, -3+3) = (12, 0).$$

Estos son los datos de la elipse de la sección anterior, así que la ecuación de la elipse respecto al sistema $X'Y'$ es:

$$25(x')^2 + 169(y')^2 - 4225 = 0.$$

Para ponerla en términos del sistema de coordenadas original, sustituimos x', y' usando las fórmulas de traslación, y obtenemos:

$$25(x+5)^2 + 169(y+3)^2 - 4225 = 0.$$

Efectuando las operaciones, llegamos finalmente a la ecuación de la elipse relativa al sistema original:

$$25x^2 + 169y^2 + 250x + 1014y - 2079 = 0.$$

En estos dos últimos ejemplos vimos cómo utilizar las ecuaciones de cónicas con centro en el origen para encontrar la ecuación de otras cuyo centro no estaba en el origen. Esta es la técnica que utilizaremos en general a lo largo de las siguientes unidades.

Ejemplos

Pensamiento crítico

Si consideramos una recta ℓ en el plano cartesiano y aplicamos una traslación, ¿cómo es la pendiente de la recta trasladada ℓ' con respecto a la pendiente de ℓ?

Ejercicios

Encuentra en cada caso la ecuación de la cónica.

1. El círculo con centro en el origen y radio $\sqrt{3}$.
2. La parábola formada por los puntos que equidistan de la recta $y=3$ y del punto $P(0,-1)$.
3. La parábola formada por los puntos que equidistan de la recta $x+6=0$ y del punto $P(-2,0)$.
4. La elipse formada por los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $F(0,4)$ y $F'(0,-4)$ es igual a 10.
5. La hipérbola formada por los puntos tales que la diferencia entre las distancias de ellos a los puntos $F'\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ y $F\left(0,\frac{3}{2}\right)$ es igual a 2.

Escribe las coordenadas de $A(-6,2)$, $B(2,4)$ y $C(3,-1)$ respecto al sistema de coordenadas $X'Y'$ con origen en:

6. $O'(-2,-1)$.
7. $O'(3,-6)$.
8. $O'(5,2)$.
9. $O'(-1,4)$.
10. $O'(2,4)$.
11. $O'(-7,1)$.

Encuentra la ecuación de la recta $6x+2y+1=0$ con respecto al sistema de ejes $X'Y'$ paralelos a los originales y con origen en:

12. $O'(5,-8)$.
13. $O'(-4,7)$.
14. $O'(-3,6)$.

Encuentra la ecuación de cada recta con respecto al sistema de ejes $X'Y'$ paralelos a los originales y con origen en $O'\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)$.

15. $3x-y+5=0$.
16. $-x+3y=4$.
17. $x-y=6$.
18. $y=7x-9$.
19. $2x-y=5$.
20. $y=3$.
21. $x=9$.
22. $x=6y-1$.
23. $5x+2y-4=0$.

24. Encuentra la ecuación de la elipse formada por los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $F(5,-4)$ y $F'(5,-14)$ es igual a 20.
25. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(3,1)$ y $B(6,2)$ es igual a 14.
26. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ tales que la suma de sus distancias a los puntos $A(-2,1)$ y $B(1,-3)$ es igual a 6.

Mundo virtual

Geolab

1. **Elipse como lugar geométrico.** Construye un *círculo directo* y en la pantalla de datos analíticos, escribe C en el campo de nombre, luego llena los campos $a=0$, $b=0$ y $r=5$. Dibuja un punto directo P y colócalo dentro del círculo. Construye un punto Q sobre el círculo. Utiliza el constructor *Punto en círculo*. Construye la mediatriz m de P y Q. Arrastra el punto Q y observa cómo se mueve la mediatriz. Ahora indícale a la mediatriz que deje traza. Ve a la pantalla gráfica, prende el botón de traza y vuelve a mover el punto Q. ¿Qué figura envuelve la mediatriz? Crea una animación, animando el punto Q entre 0 y 1, y ejecútala.
2. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye un *Escalar calculado a*, poniendo en la fórmula: $C.r/2$ para indicar que a vale la mitad del radio de C. Construye una Cónica con focos en C y P, y con a como semieje mayor. Utiliza el constructor *Cónica*: *Focos y a*.
3. **Hipérbola como lugar geométrico.** Utiliza la construcción del ejercicio anterior. En la pantalla gráfica cierra la animación. Lleva el punto P fuera del círculo y ejecuta nuevamente la animación. Observa que la elipse construida en el ejercicio anterior se convierte en hipérbola y que la mediatriz de P y Q la envuelve.
4. Revisa, en las unidades 6 y 7, las construcciones de la elipse y la hipérbola doblando papel para entender las construcciones anteriores.
5. **Parábola como lugar geométrico.** Construye dos puntos A y B, y el segmento s que los une. Construye un punto directo P y un punto Q en el segmento AB. Traza la mediatriz m de P y Q. Arrastra el punto Q y observa cómo se mueve la mediatriz. Ahora indícale a la mediatriz que deje traza. Ve a la pantalla gráfica, prende el botón de traza y vuelve a mover el punto Q. ¿Qué figura envuelve la mediatriz? Crea una animación, animando el punto Q entre -1 y 2, y ejecútala.
6. Utiliza la construcción del ejercicio anterior. Construye una parábola con foco P y directriz m. Ejecuta nuevamente la animación.

Autoevaluación

1. Encuentra las coordenadas del punto $A(-1,6)$ si se traslada el origen de coordenadas al punto $O'(2,7)$.
   a. $A(-3,-1)$.
   b. $A(3,1)$.
   c. $A(0,0)$.
   d. $A(1,13)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 136.

2. Encuentra las coordenadas del punto $A(2,5)$ si se traslada el origen de coordenadas al punto $O'(-3,10)$.
   a. $A(-1,-5)$.
   b. $A(5,15)$.
   c. $A(5,-5)$.
   d. $A(-1,15)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 136.

3. Da la ecuación de la recta $5x - y + 8 = 0$ con respecto al sistema cuyo origen es $O'(-6,0)$.
   a. $5x' - y' + 38 = 0$.
   b. $5x' - y' + 14 = 0$.
   c. $5x' - y' + 2 = 0$.
   d. $5x' - y' - 22 = 0$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 139.

4. Encuentra el punto (x', y') donde la recta $-x + 9y - 2 = 0$ corta el eje X' del sistema cuyo origen es $O'(5,-6)$.
   a. $(57,0)$.
   b. $(-57,0)$.
   c. $(-51,0)$.
   d. $(-61,0)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 139.

5. Encuentra la ecuación de la recta $y = \frac{9}{4}x + 12$ respecto al sistema cuyo origen es $O'(4,-2)$.
   a. $y' = \frac{9}{4}x' + 19$.
   b. $y' = \frac{9}{4}x' + 23$.
   c. $y' = \frac{9}{4}x' + 1$.
   d. $y' = \frac{9}{4}x' + 5$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 139.

Heteroevaluación

1. Encuentra las coordenadas del punto $A\left(-6, \frac{5}{9}\right)$ si se traslada el origen de coordenadas al punto $O'(-\frac{3}{2}, 4)$.

2. Da la ecuación de la recta $7x + 2y - 20 = 0$ con respecto al sistema cuyo origen es $O'(-8, -1)$.

Monolito de la cultura mexica conocido como Piedra del Sol.

Unidad 4 El círculo

En este capítulo estudiamos una de las figuras planasmásco-nocidas:elcírculo.Enunciamos y demos-tramos una de sus pro-piedades básicas, mis-ma que se observa en figura 4.1:

Todo ángulo inscrito en un círculo que abarca un diámetro es un ángulo recto.

La demostración que damos al respecto usa herramientas de la geometría analítica; en particular, la ecuación de un círculo con centro en el origen. Este resultado es un caso especial del teorema siguiente, más general (figura 4.2):

Un ángulo α inscrito en un círculo es la mitad del ángulo central β que abarca el mismo arco.

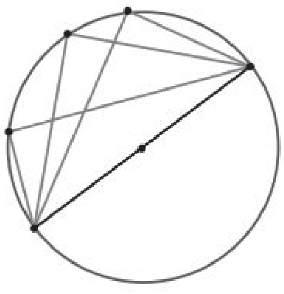


Figura 4.1

Muchas de las propiedades del círculo no dependen de su ubicación en el plano y, por consiguiente, para demostrarlas por medio de la geometría analítica podemos suponerlo colocado en el lugar que más nos convenga dentro de nuestro sistema cartesiano; por ejemplo, con su centro en el origen, en cuyo caso la ecuación del círculo se reduce a una ecuación cuadrática muy simple.

Mediante un ejemplo, vemos que a partir de tres puntos conocidos del círculo este queda deter-minado; es decir, hay un solo círculo que pasa por tres puntos dados no alineados y, con base en propiedades antes vistas, justificamos esta afirmación.

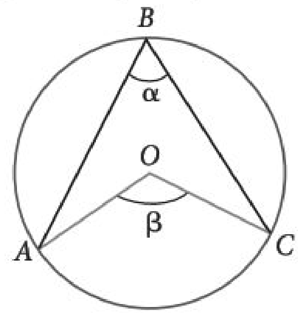


Figura 4.2

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

El círculo

- Definición del círculo
- Ecuación del círculo con centro en el origen
- Ecuaciones estándar y general del círculo
- Intersección de un círculo con una recta
  - Recta tangente a un círculo
- Intersección de dos círculos
- El círculo que pasa por tres puntos
- El círculo de los nueve puntos
- Ecuaciones paramétricas del círculo
- Desigualdades y el círculo
- Resolución de problemas
  - Lugares geométricos

Definición del círculo

Piedra del Sol.

El Calendario Azteca o Piedra del Sol está labrado sobre una piedra en forma circular con un diámetro de 3.60 m. En el centro aparece el rostro del dios del Sol, Tonatiuh, y está rodeado de cinco círculos concéntricos.

De un pedazo de tela, ¿cómo cortarías un mantel circular?

Solución:
La manera más sencilla es que, una vez elegido el radio deseado, tomemos una cinta con esa medida, fijemos sobre la tela uno de los extremos de la cinta, y la desplacemos estirada en cualquier dirección hasta volver al punto de partida. Ello determinará la orilla del mantel.

Observamos que la distancia desde el centro hasta cualquier punto de la orilla del mantel es siempre la misma: el radio que elegimos.

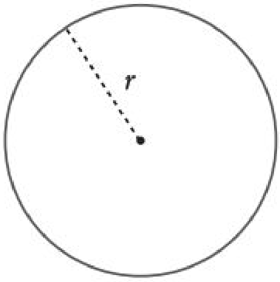


Figura 4.3

Un *círculo* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado *centro*.

Muchos libros de geometría hacen la distinción entre los términos *circunferencia* y *círculo* para nombrar el borde de un disco (circunferencia) y el borde junto con el interior (círculo). Y algunos utilizan la palabra *circunferencia* como sinónimo de *perímetro*, es decir, la longitud del borde del disco.

La tendencia moderna es utilizar la palabra *círculo* para referirse ya sea al borde, o al borde junto con el interior de la figura. De igual manera se procede con los polígonos. Por ejemplo, al hablar de *triángulo* nos referimos indistintamente al borde o a la figura llena delimitada por tres lados, y hacemos lo mismo con el *cuadrado*, *rectángulo*, *pentágono*, etcétera. Por ejemplo, hablamos tanto del perímetro de un cuadrado como de su área. Asimismo, podremos hablar del perímetro de un círculo o de su área.

Empecemos el estudio sistemático del círculo determinando la ecuación de los que tienen su centro en el origen.

Ecuación del círculo con centro en el origen

Encuentra el lugar geométrico de los puntos que distan del origen 4 unidades.

Solución:
Llamamos $P(x, y)$ a un punto de ese lugar geométrico.

Puesto que la distancia del origen a $P(x, y)$ debe ser 4, entonces, utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos que debe cumplirse la ecuación:

$$d(P, O) = 4.$$

Es decir,

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 4,$$

y si elevamos al cuadrado ambos miembros obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 16.$$

El lugar geométrico buscado tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 16$.

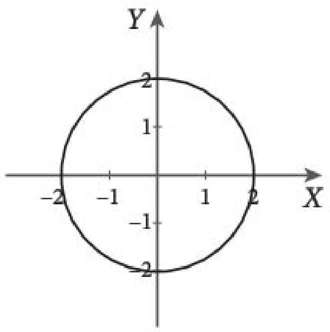


Figura 4.4

En general, si deseamos encontrar la ecuación que satisface los puntos $P(x, y)$ cuya distancia al origen $O(0, 0)$ es igual a r, donde r es cualquier número no negativo, entonces observamos que dichos puntos, y sólo ellos, deben satisfacer:

$$d(P, O) = r.$$

Al sustituir las coordenadas de P y O en la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, llegamos finalmente a:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \tag{4.1}$$

que es la *ecuación del círculo de radio r y centro en el origen* (figura 4.5).

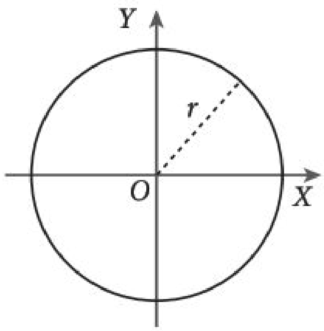


Figura 4.5

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación del círculo con centro en el origen y radio 5.

   Solución:
   En este caso, $r = 5$; sustituyendo este valor en la ecuación (4.1), obtenemos:

   $$x^2 + y^2 = 25.$$

2. Determinar el radio r del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 3$.

   Solución:
   De acuerdo con la ecuación (4.1), $r^2 = 3$, así que $r = \sqrt{3}$.
   Observa que como el radio debe ser un número no negativo, tomamos la raíz positiva de 3.

La ecuación de un círculo con centro en el origen y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$.

3. Comprobar si un ángulo inscrito en un círculo que subtiende (abarca) un diámetro es un ángulo recto (figura 4.6).

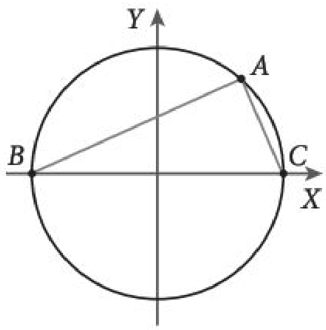


Figura 4.6

Solución:
Para facilitar los cálculos, podemos colocar el círculo con centro en el origen y el diámetro de referencia sobre el eje X.

Los puntos ABC forman un triángulo inscrito en el círculo. Las coordenadas de los vértices son $A(x_0, y_0)$, $B(-r, 0)$ y $C(r, 0)$.

Calculamos las pendientes m_1 y m_2 de los lados AB y AC del triángulo, respectivamente.

Entonces:

$$m_1 = \frac{y_0 - 0}{x_0 + r} = \frac{y_0}{x_0 + r}, \qquad m_2 = \frac{y_0 - 0}{x_0 - r} = \frac{y_0}{x_0 - r}.$$

Para probar que el ángulo es recto, debemos verificar si los lados AB y AC son perpendiculares, para lo cual debemos probar que:

$$m_1 m_2 = -1.$$

En efecto,

$$m_1 m_2 = \left(\frac{y_0}{x_0 + r}\right)\left(\frac{y_0}{x_0 - r}\right) = \frac{y_0^2}{x_0^2 - r^2}.$$

Como el punto $A(x_0, y_0)$ está sobre el círculo, entonces:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

de donde:

$$x_0^2 - r^2 = -y_0^2.$$

Entonces:

$$m_1 m_2 = \frac{y_0^2}{x_0^2 - r^2} = \frac{y_0^2}{-y_0^2} = -1.$$

Por tanto, los lados AB y AC son perpendiculares y el ángulo es recto.

La *mediatriz* de un segmento es la recta perpendicular a él que pasa por su punto medio.

4. Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son los extremos de una cuerda que no es diámetro del círculo $x^2 + y^2 = r^2$, entonces la recta que une el punto medio del segmento PQ con el centro del círculo es perpendicular a la cuerda dada. Es decir, el centro de un círculo pertenece a la mediatriz de cualquiera de sus cuerdas.

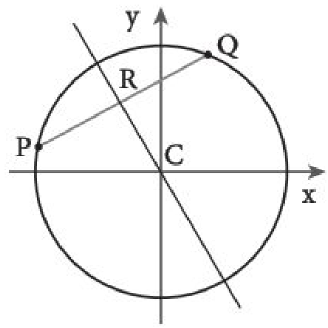


Figura 4.7

Solución:
Supongamos que la recta PQ no es vertical ni horizontal; es decir, $x_1 \neq x_2$ y $y_1 \neq y_2$.

El círculo $x^2 + y^2 = r^2$ tiene centro $C(0, 0)$ y radio r (figura 4.7). El punto medio del segmento PQ es:

$$R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Tenemos que $x_1 + x_2 \neq 0$ porque en otro caso PQ sería horizontal.

La pendiente de la recta que une $R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ con el centro $C(0, 0)$ del círculo es:

$$m_1 = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} - 0}{\frac{x_1 + x_2}{2} - 0} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}.$$

La pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q es:

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Para averiguar si las dos rectas son perpendiculares debemos probar que :

$$m_1 m_2 = -1.$$

Entonces:

$$m_1 m_2 = \left(\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}\right)\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2}.$$

Como P y Q están sobre el círculo, entonces:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$

de donde:

$$y_1^2 = r^2 - x_1^2 \qquad \text{y} \qquad y_2^2 = r^2 - x_2^2.$$

Así,

$$m_1 m_2 = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{r^2 - x_2^2 - \left(r^2 - x_1^2\right)}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{-x_2^2 + x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{-\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{x_2^2 - x_1^2} = -1.$$

El centro de un círculo pertenece a la mediatriz de cualquiera de sus cuerdas.

Ejemplos

Por tanto, la cuerda que pasa por P y Q, y la mediatriz de la cuerda PQ son perpendiculares.

Los casos en que la recta PQ es vertical u horizontal pueden probarse al observar que entonces RC es horizontal o vertical, respectivamente.

Ejercicios

Encuentra la ecuación del círculo con centro en el origen y el radio dado.

1. $r = 8$.
2. $r = 1$.
3. $r = 7$.
4. $r = \pi$.
5. $r = \frac{5}{2}$.
6. $r = \frac{4}{3}$.
7. $r = \frac{3}{7}$.
8. $r = \sqrt{16}$.

En cada caso, encuentra el radio del círculo.

9. $x^2 + y^2 - 7 = 0$.
10. $-x^2 - y^2 = -64$.
11. $x^2 + y^2 = 121$.
12. $x^2 + y^2 - 19 = 0$.
13. $x^2 + y^2 - 169 = 0$.
14. $x^2 + y^2 - 5 = 0$.
15. $x^2 + y^2 = 15$.
16. $x^2 + y^2 = 100$.
17. $x^2 + y^2 = \frac{64}{25}$.

Encuentra la ecuación del círculo cuyo diámetro es AB, donde:

18. $A(-2, -6)$ y $B(2, 6)$.
19. $A\left(0, -\sqrt{5}\right)$ y $B\left(0, \sqrt{5}\right)$.
20. $A\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ y $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$.
21. $A\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ y $B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.
22. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como centro el punto de intersección de las rectas $3x + y = 0$ y $x - 4y = 0$, y como radio la distancia de dicho punto a la recta $x - y - 4 = 0$.
23. Halla la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(-3, 4)$, $Q(0, -5)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $x - 5y = 0$.
24. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P\left(\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $Q\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $x + \sqrt{6}y = 0$.
25. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P\left(-2, \frac{16}{3}\right)$, $Q(3, 2)$ y cuyo centro se encuentra sobre la recta $3x - 2y + 1 = 0$.
26. Encuentra la ecuación de la recta que contiene el diámetro con pendiente igual a $\frac{4}{5}$ del círculo $x^2 + y^2 - 100 = 0$.
27. El punto $(-1, 3)$ divide en partes iguales una cuerda del círculo $x^2 + y^2 = 20$. Encuentra la ecuación de la recta que contiene la cuerda y la longitud de esta.
28. Demuestra que el ángulo que subtiende el diámetro del círculo $x^2 + y^2 = 10$ y tiene vértice en el punto $(-3, -1)$ es recto.

Ecuaciones estándar y general del círculo

Encuentra el lugar geométrico de los puntos que distan 5 unidades del punto $Q(4, 3)$.

Solución:
Llamamos $P(x, y)$ a un punto de ese lugar geométrico. Entonces tenemos que la distancia de P a Q debe ser 5, es decir,

$$d(P, Q) = 5,$$

o sea,

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

Esta ecuación representa un círculo.

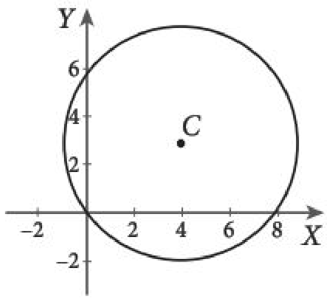


Figura 4.8

Los teatros griegos tenían forma de círculo. Uno de los más grandes y famosos fue el Teatro de Epidauro.

Teatro de Epidauro.

Para encontrar la ecuación de un círculo cuyo centro es el punto $C(h, k)$, distinto del origen, utilizamos la traslación de ejes como lo hicimos en la unidad anterior.

Construimos un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ con centro en C. Con respecto a este nuevo sistema de coordenadas, el círculo con centro en C y radio r tiene por ecuación:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2.$$

Para encontrar la ecuación del círculo con respecto al sistema de coordenadas original XY, hacemos la sustitución:

$$x' = x - h \qquad y' = y - k$$

y obtenemos:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,} \tag{4.2}$$

La ecuación estándar del círculo con centro en (h, k) y radio r es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

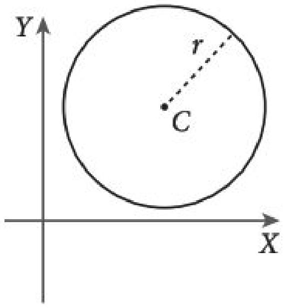


Figura 4.9

que es la *forma estándar* o *canónica del círculo de radio r y con centro en C(h, k)* (figura 4.9).

Si desarrollamos los términos que están al cuadrado, obtenemos:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$$
$$x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+h^2+k^2-r^2=0.$$

Si hacemos $D=-2h$, $E=-2k$ y $F=h^2+k^2-r^2$, entonces llegamos a una ecuación del tipo:

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,} \tag{4.3}$$

que se llama *forma general de la ecuación del círculo*. Observamos que los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales a 1.

Inversamente, si una ecuación de la forma (4.3) tiene al menos una solución (a, b), entonces es la ecuación general de un círculo, como ahora veremos.

En la ecuación:

$$\boxed{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,} \tag{4.4}$$

pasamos F al segundo miembro y completamos cuadrados en el primer miembro:

La ecuación general del círculo es del tipo $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. Si este no es degenerado, su centro se ubica en $\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right)$ y su radio se determina por $r=\frac{\sqrt{D^2-E^2-4F}}{2}$. A menos que la ecuación defina un círculo degenerado.

$$x^2+Dx+\frac{D^2}{4}+y^2+Ey+\frac{E^2}{4}=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$
$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

Definiendo G como:

$$G=\frac{D^2+E^2-4F}{4},$$

la última ecuación queda escrita así:

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=G.$$

Pensamiento crítico

¿Qué significa que la ecuación $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ sea satisfecha por un solo punto (a, b)?

Como (a, b) satisface (4.4) y la suma de dos cuadrados es mayor o igual que 0, tenemos:

$$0\le\left(a+\frac{D}{2}\right)^2+\left(b+\frac{E}{2}\right)^2=G.$$

Por lo que $G \geq 0$. Si definimos $r = \sqrt{G}$, entonces $r \geq 0$. Entonces la ecuación general se ha transformado en:

$$\left(x - \left(-\frac{D}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{E}{2}\right)\right)^2 = r^2,$$

que es la ecuación del círculo con centro en $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio r.

Cuando ningún punto satisface la ecuación general (4.3), por ejemplo:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

se dice, para evitar excepciones, que representa un círculo degenerado (el vacío).

El *arco de medio punto* en arquitectura es un semicírculo. Se originó en Mesopotamia 3000 años antes de nuestra era, pero fue difundido por los romanos.

Arco de medio punto.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación general del círculo con centro en $C(-4, 6)$ y radio 2.

   Solución:
   Sustituyendo directamente las coordenadas de C y el valor del radio en la ecuación (4.2), obtenemos:

   $$(x - (-4))^2 + (y - 6)^2 = 2^2,$$

   es decir,

   $$(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 4,$$

   si desarrollamos los binomios, efectuamos las operaciones y simplificamos, podemos obtener la ecuación en su forma general, la cual se escribe como:

   $$x^2 + y^2 + 8x - 12y + 48 = 0.$$

El perímetro de un círculo es $2\pi r$. La letra π usada para este número es la inicial de la palabra griega $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ (perímetro). Fue popularizada por Leonhard Euler en su obra *Introducción al cálculo infinitesimal* (1748).

2. Encontrar el perímetro del círculo cuya ecuación es
   $4x^2 + 4y^2 - 12x + 40y + 77 = 0.$

Solución:
Dividimos entre 4 la ecuación del círculo:

$$x^2 + y^2 - 3x + 10y + \frac{77}{4} = 0.$$

Como antes, agrupamos los términos en x y y, y despejamos el término independiente:

$$(x^2 - 3x) + (y^2 + 10y) = -\frac{77}{4}.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto, sumamos las mismas cantidades en el lado derecho para que la igualdad no se altere:

$$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + 10y + 25\right) = -\frac{77}{4} + \frac{9}{4} + 25.$$

Factorizando los términos entre paréntesis y simplificando el lado derecho, obtenemos:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+5)^2 = 8.$$

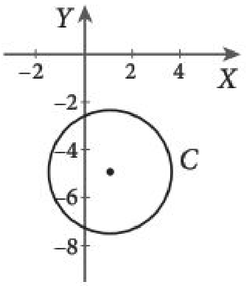


Figura 4.10

Si comparamos esta ecuación con la (4.2), reconocemos que el centro es $C(\frac{5}{2}, -5)$ y el radio es $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. El perímetro del círculo es:

$$P = 2\pi r = 2\pi\left(2\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}\pi \approx 17.77.$$

3. Encontrar el circuncírculo del triángulo con vértices $A(2, -1)$, $B(3, -4)$ y $C(6, -1)$.

El *circuncírculo* de un triángulo es el círculo que pasa por sus tres vértices. Tiene por centro el punto donde se cortan las mediatrices de los lados del triángulo y por radio la distancia de este punto a cualquiera de los vértices.

Solución:
Construimos las mediatrices de dos de los lados del triángulo. Para ello localizamos los puntos medios de los lados AB y CA:

$$\textbf{Punto medio de } AB\text{:} \quad \left(\frac{2+3}{2}, \frac{-1+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\textbf{Punto medio de } CA\text{:} \quad \left(\frac{2+6}{2}, \frac{-1+(-1)}{2}\right) = (4, -1).$$

Calculamos las pendientes de los lados AB y CA del triángulo:

Pendiente de AB: $m_1 = \dfrac{-4-(-1)}{3-2} = -3.$

Pendiente de CA: $m_3 = \dfrac{-1-(-1)}{6-2} = 0.$

Como la mediatriz es la recta que pasa por el punto medio de un lado y es perpendicular a él, entonces la mediatriz del lado AB es la que pasa por $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ y tiene pendiente $m = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} y - \left(-\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ y &= \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

La mediatriz del lado CA es la recta vertical que pasa por el punto $(4, -1)$:

$$x = 4.$$

Para encontrar el circuncentro, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las mediatrices:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \\ x &= 4. \end{aligned}$$

De donde:

$$y = \frac{1}{3}(4) - \frac{10}{3} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Entonces el circuncentro es $D(4, -2)$.

Para determinar el radio, calculamos la distancia de $D(4, -2)$ a cualquier vértice, por ejemplo a $B(3, -4)$:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(4-3)^2 + (-2-(-4))^2} \\ &= \sqrt{1+4} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Tres puntos no colineales A, B y C determinan un único círculo. Este es el circuncírculo del triángulo ABC.

La ecuación del círcuncírculo es:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 5.$$

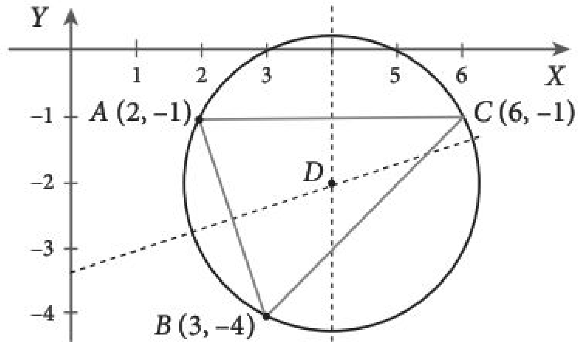


Figura 4.11

El *incírculo* o *círculo inscrito* de un triángulo es el que es tangente a los tres lados del mismo. Tiene por centro el punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo y por radio la distancia de este punto a cualquiera de los lados.

4. Encontrar el incírculo del triángulo con vértices $A\left(-\frac{11}{3},\frac{3}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{21},-\frac{10}{7}\right)$ y $C\left(\frac{35}{24},\frac{3}{2}\right)$.

Solución:
Determinamos las ecuaciones de los lados del triángulo, en su forma general.

a) Lado AB:

$$y-\frac{3}{2}=\frac{-\frac{10}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{5}{21}-\left(-\frac{11}{3}\right)}\left(x-\left(-\frac{11}{3}\right)\right)$$

$$3x+4y+5=0.$$

b) Lado BC:

$$y-\frac{3}{2}=\frac{-\frac{10}{7}-\frac{3}{2}}{\frac{5}{21}-\frac{35}{24}}\left(x-\frac{35}{24}\right)$$

$$12x-5y-10=0.$$

c) Lado CA:

$$y-\frac{3}{2}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{35}{24}-\left(-\frac{11}{3}\right)}\left(x-\frac{35}{24}\right)$$

$$2y-3=0.$$

Una vez que cada una de las tres ecuaciones está en su forma general $Ax+By+C=0$, realizamos los siguientes dos pasos:

a) Evaluamos $Ax+By+C$ en el vértice que no está en el lado correspondiente y comparamos el valor obtenido con 0.

Lado AB, evaluamos en C: $3\left(\frac{35}{24}\right)+4\left(\frac{3}{2}\right)+5=\frac{123}{8}>0.$

Lado BC, evaluamos en A: $12\left(-\frac{11}{3}\right)-5\left(\frac{3}{2}\right)-10=-\frac{123}{2}<0.$

Lado AC, evaluamos en B: $2\left(-\frac{10}{7}\right)-3=-\frac{41}{7}<0.$

Para cada evaluación que sea negativa cambiamos $Ax+By+C=0$ por $-Ax-By-C=0$, en otro caso dejamos la misma ecuación. En este ejemplo cambiamos las ecuaciones segunda y tercera, del lado AB y AC respectivamente:

$$\begin{aligned}&\text{Lado } AB: && 3x+4y+1=0.\\ &\text{Lado } BC: && -12x+5y+10=0.\\ &\text{Lado } AC: && -y+\frac{3}{2}=0.\end{aligned}$$

b) Para normalizar, dividimos cada ecuación entre $\sqrt{A^2+B^2}$, que en este caso toma los valores:

$$\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad \sqrt{(-12)^2+5^2}=13 \quad \text{y} \quad \sqrt{(-1)^2+3^2}=2,$$

respectivamente,

$$\begin{aligned}&\text{Lado } AB: && \frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=0.\\ &\text{Lado } BC: && \frac{12}{13}x-\frac{5}{13}y-\frac{10}{13}=0.\\ &\text{Lado } AC: && y-\frac{3}{2}=0.\end{aligned}$$

Para encontrar la bisectriz de cada ángulo, simplemente igualamos las ecuaciones anteriores, de los lados que lo forman, y simplificamos.

a) Bisectriz del ángulo A. Igualamos las ecuaciones de los lados AB y AC, y simplificamos:

$$\begin{aligned}&\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=-y+\frac{3}{2}\\ &6x+18y-5=0.\end{aligned}$$

b) Bisectriz del ángulo B. Igualamos las ecuaciones de los lados AB y BC, y simplificamos:

$$\begin{aligned}&\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y+\frac{10}{13}\\ &33x+9y+5=0.\end{aligned}$$

Para encontrar el incentro, resolvemos simultáneamente estas ecuaciones, ya que sabemos que se cortan en el incentro:

$$\boxed{\begin{aligned} 6x+18y-5 &= 0 \\ 33x+9y+5 &= 0. \end{aligned}} \tag{4.5}$$

Para despejar x, multiplicamos la segunda ecuación de (4.5) por -2 y la sumamos a la primera:

$$\begin{aligned} -60x-15 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación de (4.5), obtenemos el valor de y:

$$y=\frac{13}{36}.$$

De donde el incentro es el punto $I\left(-\frac{1}{4},\frac{13}{36}\right)$.

Para determinar el radio del círculo inscrito, calculamos la distancia del punto $I\left(-\frac{1}{4},\frac{13}{36}\right)$ al lado AC cuya ecuación es $y-\frac{3}{2}=0$:

$$\frac{\left|\frac{13}{36}-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1}}=\left|-\frac{41}{36}\right|=\frac{41}{36}\approx 1.14.$$

La ecuación del incírculo es:

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{13}{36}\right)^2=\left(\frac{41}{36}\right)^2.$$

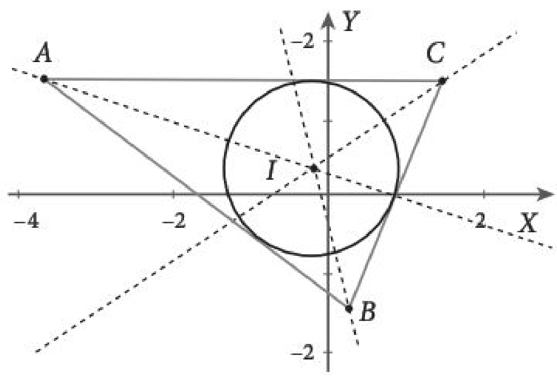


Figura 4.12

Ejemplos

Ejercicios

Encuentra la ecuación del círculo que satisface las condiciones dadas.

1. $C(1, 2)$, $r = 4$.
2. $C(-7, 4)$, pasa por $P(-2, -2)$.
3. $C(-3, 2)$, pasa por $P(-5, -1)$.
4. $C(5, -1)$, $r = 9$.
5. $C(-5, -2)$, pasa por $P(-8, 2)$.
6. $C(\frac{1}{2}, 3)$, pasa por $P(\frac{3}{2}, 3 + \sqrt{3})$.
7. $C(-4, 3)$, $r = 5$.
8. $C(3, -1)$, pasa por $P(6, 3)$.
9. $C(-4, -3)$, pasa por $P(-2, -4)$.

Encuentra la ecuación del círculo cuyo diámetro es AB y cuyos extremos tienen estas coordenadas:

10. $A(-1, -2)$ $B(5, 4)$.
11. $A(-5, -3)$ $B(-1, -1)$.
12. $A(-6, 7)$ $B(2, 3)$.

13. Dado el cuadrado con vértices $A(-3, 2)$, $B(-7, 2)$, $C(-7, -2)$ y $D(-3, -2)$, halla las ecuaciones del círculo inscrito y del círculo circunscrito.

Encuentra el centro y el radio de los siguientes círculos.

14. $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 30 = 0$.
15. $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$.
16. $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$.
17. $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$.
18. $9x^2 + 9y^2 - 24x + 12y + 11 = 0$.
19. $x^2 + y^2 - 4 = 0$.
20. $25x^2 + 25y^2 + 30x - 10y - 6 = 0$.
21. $4x^2 + 4y^2 + 12x - 12y + 14 = 0$.
22. $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 9 = 0$.
23. $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 11 = 0$.
24. $x^2 + y^2 + 14x - 6y = -30$.
25. $5x^2 + 5y^2 + 25x + 15y = -19$.

26. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(2, 2)$ y $Q(-6, 2)$, y cuyo centro está sobre la recta $6x + 5y - 18 = 0$.
27. Una cuerda del círculo $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$ se divide en partes iguales en el punto $(-4, -1)$. Encuentra la longitud de la cuerda y la ecuación de la recta que la contiene.
28. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(2, -1)$ y $Q(-9, 0)$, y cuyo centro está sobre la recta $3x - y + 6 = 0$.
29. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como centro el punto de intersección de las rectas $x - 2y + 13 = 0$ y $2x + 7y - 29 = 0$, y como radio la distancia desde dicho punto a la recta $3x - 4y + 4 = 0$.
30. Encuentra la ecuación del circuncírculo del triángulo con vértices en $A(4, -3)$, $B(-4, 11)$ y $C(-6, 1)$.
31. Los lados de un triángulo están en las rectas $5x - 12y + 48 = 0$, $12x + 9y - 15 = 0$ y $6x - 8y - 48 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo y las coordenadas del incentro.

Intersección de un círculo con una recta

Encontrar los puntos en los que la recta $y = 2x - 10$ corta el círculo con centro en el punto $(4, -2)$ y radio $\sqrt{20}$.

Solución:
La ecuación del círculo es:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20.$$

Debemos resolver simultáneamente ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y+2)^2 &= 20\\ y &= 2x - 10.\end{aligned}$$

Aprovechamos que en la ecuación de la recta ya está despejada la variable y, sustituimos su valor en la ecuación del círculo y despejamos x:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (2x-10+2)^2 &= 20\\ (x-4)^2 + (2x-8)^2 &= 20\\ 5x^2 - 40x + 80 &= 20\\ 5x^2 - 40x + 60 &= 0,\end{aligned}$$

de donde:

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4(5)(60)}}{10} = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{10} = \frac{40 \pm 20}{10}.$$

Entonces tenemos dos valores posibles para x, a saber, $x = 6$ o $x = 2$ (figura 4.13).
Ahora encontramos los valores de y. Si $x = 6$, entonces:

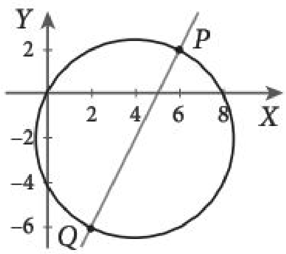


Figura 4.13

$$y = 2x - 10 = 2(6) - 10 = 2.$$

Así, el punto es $P(6, 2)$.
Si $x = 2$, entonces:

$$y = 2x - 10 = 2(2) - 10 = -6,$$

y el punto es $Q(2, -6)$.
Por tanto, la recta $y = 2x - 10$ corta el círculo en los puntos $(6, 2)$ y $(2, -6)$.

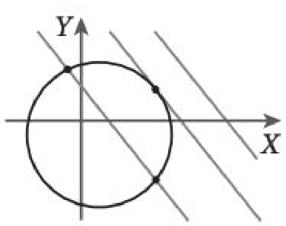


Figura 4.14

En la figura 4.14 observamos que, dados un círculo y una recta, puede suceder que:
- No se corten.
- La recta corte el círculo en un punto.
- La recta corte el círculo en dos puntos.

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de la recta y del círculo y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

- No hay solución (no se cortan).
- Hay una sola solución (se cortan en un solo punto).
- Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos).

Ejemplos

1. Encontrar la intersección de la recta cuya ecuación es $x + y + 5 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

Solución:
Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$x + y + 5 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

Para ello, despejamos una de las dos variables de la ecuación de la recta; por ejemplo y,

$$y = -x - 5,$$

y la sustituimos en la ecuación del círculo:

$$x^2 + (-x-5)^2 - 2x - 4(-x-5) - 4 = 0.$$

Simplificamos:

$$2x^2 + 12x + 41 = 0.$$

Al aplicar la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado obtenemos:

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - (4)(2)(41)}}{2(2)} = \frac{-12 \pm \sqrt{-184}}{4}.$$

Como el discriminante, es decir, el término dentro del radical, es negativo, la ecuación no tiene solución, lo cual significa que la recta y el círculo no se cortan (figura 4.15).

2. Encontrar la intersección del círculo cuya ecuación es $(x-6)^2 + (y-3)^2 = 20$ con la recta $2x - y + 1 = 0$.

Solución:
Debemos resolver simultáneamente las ecuaciones del círculo y la recta; para esto, despejamos y de la ecuación de la recta:

$$y = 2x + 1,$$

Una recta corta un círculo en a lo más dos puntos. Cuando lo corta sólo en uno, la recta es llamada una *tangente* del círculo.

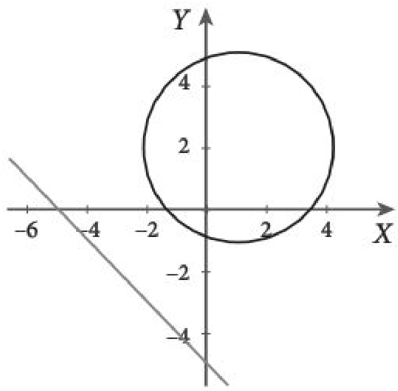


Figura 4.15

la sustituimos en la ecuación del círculo y simplificamos:

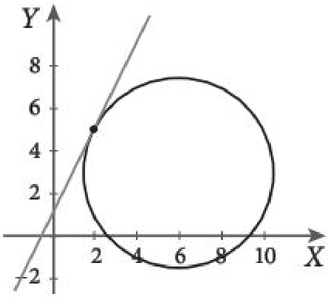


Figura 4.16

$$\begin{aligned}(x-6)^2+\left((2x+1)-3\right)^2&=20\\ x^2-4x+4&=0\\ (x-2)^2&=0.\end{aligned}$$

La única raíz de la última ecuación es $x = 2$; sustituimos este valor en la ecuación de la recta y obtenemos $y = 5$, así que el único punto donde se cortan la recta y el círculo es $P(2, 5)$, lo cual significa que la recta es tangente al círculo en este punto (figura 4.16).

3. Encontrar la intersección del círculo $x^2 + y^2 = 16$ y la recta $x - 2y + 2 = 0$.

Solución:
Resolvemos simultáneamente ambas ecuaciones. Despejamos x de la ecuación de la recta:

$$x = 2y - 2,$$

la sustituimos en la ecuación del círculo y simplificamos:

$$\begin{aligned}(2y-2)^2+y^2&=16\\ 5y^2-8y-12&=0.\end{aligned}$$

Usamos la fórmula general para la solución de la ecuación de segundo grado y obtenemos:

$$y=\frac{8\pm\sqrt{64+240}}{10}=\frac{4\pm2\sqrt{19}}{5},$$

es decir,

$$y_1=\frac{4+2\sqrt{19}}{5},\quad y_2=\frac{4-2\sqrt{19}}{5}.$$

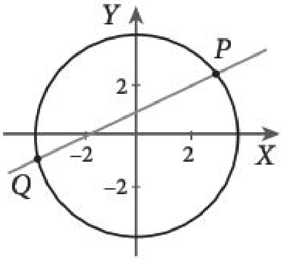


Figura 4.17

Sustituimos los dos valores de y en la ecuación de la recta y obtenemos:

$$x_1=\frac{-2+4\sqrt{19}}{5},\quad x_2=\frac{-2-4\sqrt{19}}{5},$$

es decir, los puntos donde se cortan la recta y el círculo son dos (figura 4.17):

$$P\left(\frac{-2+4\sqrt{19}}{5},\frac{4+2\sqrt{19}}{5}\right)\approx(3.1,2.5)\ \text{ y }\ Q\left(\frac{-2-4\sqrt{19}}{5},\frac{4-2\sqrt{19}}{5}\right)\approx(-3.9,-0.9).$$

4. Trazar una cuerda de longitud 8 del círculo $x^2 + y^2 = 25$ si uno de sus extremos es $A(4, 3)$.

Solución:
Como la longitud de la cuerda es 8, entonces trazamos un círculo con centro en $A(4, 3)$ y radio 8:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 64.$$

Para encontrar los puntos de intersección de una recta con un círculo se resuelve el sistema formado por sus ecuaciones.

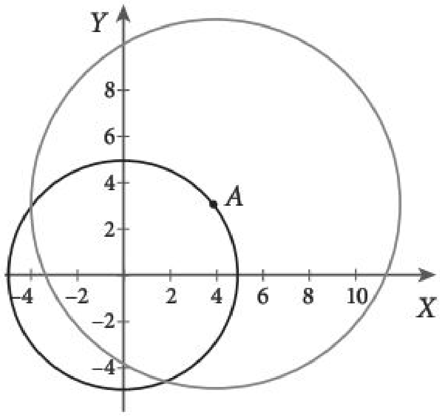


Figura 4.18

Encontramos las intersecciones de los dos círculos, para esto resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de los círculos:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 64.$$

Al desarrollar la segunda ecuación obtenemos el sistema:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 = 64.$$

Ahora, utilizando la ecuación del primer círculo, sustituimos $x^2 + y^2$ por 25 en la segunda y simplificamos:

$$25 - 8x - 6y + 25 = 64$$
$$-8x - 6y = 14$$

y despejamos y:

$$\boxed{y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}.} \qquad (4.6)$$

Sustituimos este valor de y en la ecuación del primer círculo:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 25 \\ x^2+\left(-\frac{7}{3}-\frac{4}{3}x\right)^2 &= 25 \\ \frac{25}{9}x^2+\frac{56}{9}x+\frac{49}{9} &= 25 \\ 25x^2+56x+49 &= 225 \\ 25x^2+56x-176 &= 0. \end{aligned}$$

Despejando x tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-56\pm\sqrt{56^2-4(25)(-176)}}{2(25)} \\ &= \frac{-56\pm\sqrt{20\,736}}{50} \\ &= \frac{-56\pm 144}{50}. \end{aligned}$$

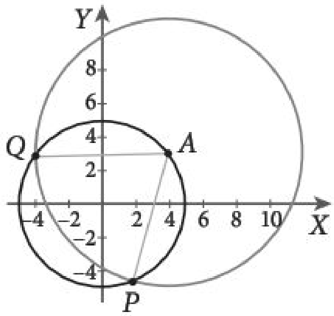


Figura 4.19

Así, las soluciones son:

$$x=\frac{-56+144}{50}=\frac{44}{25} \quad \text{o} \quad x=\frac{-56-144}{50}=-4.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (4.6).
Si $x=\frac{44}{25}$, entonces:

$$y=-\frac{4}{3}\left(\frac{44}{25}\right)-\frac{7}{3}=-\frac{117}{25}.$$

Si $x=-4$, entonces:

$$y=-\frac{4}{3}(-4)-\frac{7}{3}=3.$$

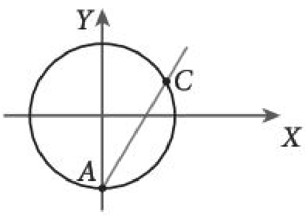


Figura 4.20

Los puntos son $P\left(\frac{44}{25},-\frac{117}{25}\right)$ y $Q(-4,3)$. Por tanto, las cuerdas AP y AQ tienen una longitud de 8 (figura 4.19).

5. El círculo unitario $x^2+y^2=1$ y la recta $y=mx-1$ con $m>1$ y m racional se cortan en los puntos $A(0,-1)$ y C (figura 4.20). Probar que las coordenadas de C son racionales.

Solución:
Para encontrar el punto C resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ y &= mx - 1, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x^2 + (mx-1)^2 &= 1 \\ x^2 + m^2x^2 - 2mx + 1 &= 1 \\ (1+m^2)x^2 - 2mx &= 0 \\ x\left((1+m^2)x - 2m\right) &= 0, \end{aligned}$$

de donde:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad (1+m^2)x - 2m = 0.$$

Así,

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Para encontrar el valor de y, sustituimos el segundo valor de x en la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned} y &= mx - 1 \\ &= m\left(\frac{2m}{1+m^2}\right) - 1 \\ &= \frac{m^2-1}{1+m^2}. \end{aligned}$$

Así, $C\left(\frac{2m}{1+m^2}, \frac{m^2-1}{1+m^2}\right)$. Como m es racional, entonces las dos coordenadas de C también lo son.

Como C es un punto del círculo unitario, entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{m^2-1}{1+m^2}\right)^2 &= 1 \\ (2m)^2 + (m^2-1)^2 &= (1+m^2)^2, \end{aligned}} \tag{4.7}$$

es decir, los números $2m$, $m^2 - 1$ y $1 + m^2$ satisfacen el teorema de Pitágoras.

Es decir, tenemos un modo geométrico de llegar a la fórmula (4.7) que nos permite obtener *ternas pitagóricas*, o sea, tres números naturales a, b, c tales que satisfacen:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Por ejemplo, si hacemos $m = \frac{10}{7}$, entonces, $(2m)^2 = (\frac{20}{7})^2$, $(m^2 - 1)^2 = (\frac{51}{49})^2$, $(1 + m)^2 = (\frac{149}{49})^2$. Al aplicar la fórmula (4.7) obtenemos:

$$\left(\frac{20}{7}\right)^2 + \left(\frac{51}{49}\right)^2 = \left(\frac{149}{49}\right)^2$$

$$\frac{(20)^2}{49} + \frac{(51)^2}{(49)^2} = \frac{(149)^2}{(49)^2}$$

$$(20)^2(49) + (51)^2 = (149)^2,$$

o sea,

$$(140)^2 + (51)^2 = (149)^2.$$

Hemos encontrado la terna pitagórica (140, 51, 149).

6. En economía se usa la llamada *curva de transformación de dos productos*, la cual relaciona las cantidades que pueden ser producidas de cada uno de ellos, durante un cierto lapso. En una granja se producen frijol y maíz. La curva de transformación de estos dos productos que indica la relación entre las toneladas x de maíz y las toneladas y de frijol que pueden producirse al año, tiene la siguiente ecuación:

$$x^2 + y^2 + 12x + 6y = 99.$$

¿Cuáles son las cantidades máximas que pueden producirse de cada uno de esos productos?

Solución:
Obtenemos la gráfica de la función para ver cuál de sus puntos está más a la derecha (x máxima) y cuál se encuentra más arriba (y máxima).

Determinamos el centro y el radio del círculo:

$$x^2 + y^2 + 12x + 6y = 99$$

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 + 6y + 9 = 99 + 36 + 9$$

$$(x+6)^2 + (y+3)^2 = 144,$$

entonces el círculo tiene centro en $C(-6, -3)$ y radio 12.

Ahora encontramos la intersección del círculo con los ejes coordenados. Si $x = 0$,

$$6^2 + (y+3)^2 = 144$$

$$(y+3)^2 = 144 - 36$$

$$|y+3| = \sqrt{108},$$

como sólo nos interesa cuando $y + 3$ es positivo, entonces:

$$y + 3 = \sqrt{108}$$
$$y = -3 + \sqrt{108} \approx 7.39.$$

Análogamente, si $y = 0$,

$$(x+6)^2 + 3^2 = 144$$
$$(x+6)^2 = 135$$
$$|x+6| = \sqrt{135}$$

como sólo nos interesa cuando $x + 6$ es positivo, entonces:

$$x + 6 = \sqrt{135}$$
$$x = -6 + \sqrt{135} \approx 5.61.$$

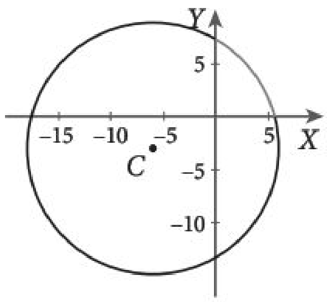


Figura 4.21

Ejemplos

Pueden producirse 5.61 toneladas de maíz y 7.39 de frijol.

Recta tangente a un círculo

Para arrojar una piedra con una honda, esta se hace girar y entonces la piedra describe un círculo. Al soltar uno de los extremos de la honda, la piedra sale despedida siguiendo una trayectoria recta que es tangente al círculo en el punto en que la abandonó. ¿Cómo determinar esa recta si conocemos el círculo? Supongamos que el círculo es $x^2 + y^2 = 4$ y el punto $T(1, \sqrt{3})$ es donde la piedra deja el círculo. Determinar la ecuación de la recta tangente en ese punto.

Solución:

El centro del círculo $x^2 + y^2 = 4$ es $C(0, 0)$. Encontramos la recta que pasa por $C(0, 0)$ y por $T(1, \sqrt{3})$. La pendiente es:

$$m = \frac{\sqrt{3} - 0}{1 - 0} = \sqrt{3}$$

y la ecuación de la recta es:

$$\boxed{y = \sqrt{3}x.} \qquad (4.8)$$

Ahora determinamos la ecuación de la recta perpendicular a (4.8) y que pasa por $T(1, \sqrt{3})$. Dicha recta tiene pendiente $\frac{-1}{\sqrt{3}}$, y su ecuación es:

$$y - \sqrt{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Esta es la recta tangente buscada.

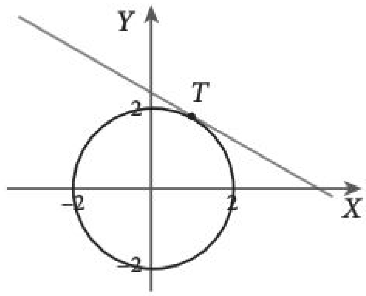


Figura 4.22

Una recta es *tangente* a un círculo si toca a este en un solo punto. La recta tangente a un círculo tiene la propiedad de que es perpendicular al radio que une el centro del círculo con el punto de tangencia. Esta propiedad nos permite encontrar la ecuación de la recta tangente, tal y como lo hicimos en el ejemplo introductorio.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente al círculo $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 100$ en el punto $P(-5, 6)$.

Solución:
Primero debemos encontrar la pendiente del radio que une P con el centro del círculo. El centro tiene coordenadas $(3, 12)$. La pendiente buscada es:

$$m = \frac{6-12}{-5-3} = \frac{3}{4},$$

de donde vemos que la pendiente de la recta tangente al círculo en P es igual a $-\frac{4}{3}$; por tanto, su ecuación es:

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - (-5)),$$

es decir (figura 4.23),

$$4x + 3y + 2 = 0.$$

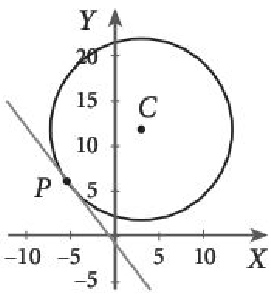


Figura 4.23

2. Encontrar la ecuación del círculo que pasa por $Q(12, 9)$ y es tangente a la recta $x - 2y + 2 = 0$ en el punto $P(8, 5)$.

Solución:

El centro $C(h, k)$ del círculo debe estar en la recta ℓ que es perpendicular a la recta dada y pasa por P (figura 4.24).

Determinamos la pendiente de la recta $x - 2y + 2 = 0$, es decir, la escribimos como:

$$y = \frac{1}{2}x + 1,$$

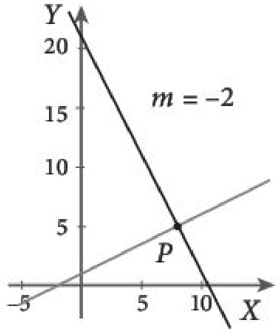


Figura 4.24

de donde la recta tiene pendiente igual a $\frac{1}{2}$.

Como la recta que buscamos es perpendicular a esta, entonces tiene pendiente $m = -2$; por tanto, su ecuación es:

$$y - 5 = -2(x - 8),$$

es decir,

$$2x + y - 21 = 0.$$

Por tanto, las coordenadas de C satisfacen:

$$\boxed{2h + k - 21 = 0.} \tag{4.9}$$

Como la distancia de $C(h, k)$ a $P(8, 5)$ debe ser igual a la distancia de $C(h, k)$ a $Q(12, 9)$, tenemos que (figura 4.25)

$$\sqrt{(h-8)^2 + (k-5)^2} = \sqrt{(h-12)^2 + (k-9)^2}.$$

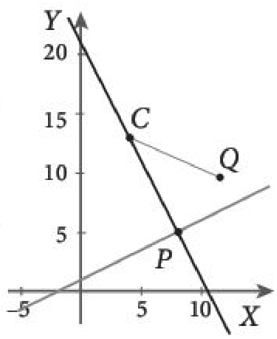


Figura 4.25

Si elevamos al cuadrado ambos miembros y simplificamos las expresiones obtenemos:

$$\boxed{h + k - 17 = 0.} \tag{4.10}$$

Resolvemos simultáneamente las ecuaciones (4.9) y (4.10):

$$\begin{aligned} 2h + k &= 21 \\ h + k &= 17. \end{aligned}$$

y encontramos que las coordenadas de C son $(4, 13)$. El radio es la distancia de C a P:

$$r = \sqrt{(4-8)^2 + (13-5)^2} = \sqrt{80}.$$

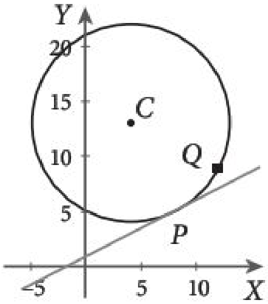


Figura 4.26

Así que la ecuación del círculo buscado es:

$$(x-4)^2+(y-13)^2=80,$$

la cual se escribe en la forma general como $x^2+y^2-8x-26y+105=0$ (figura 4.26).

3. Encontrar las rectas tangentes al círculo $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ desde el punto exterior $A(0,6)$.

Solución:
Si encontramos las coordenadas de los puntos de tangencia, entonces podremos obtener las ecuaciones de las rectas tangentes.

El centro del círculo es $C(3,-3)$ y su radio es 3. Calculamos la distancia de A a C:

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{3^2+(-3-6)^2}=\sqrt{9+81} \\ &= \sqrt{90}=3\sqrt{10}. \end{aligned}$$

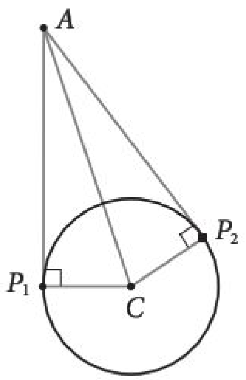


Figura 4.27

Llamemos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ a los puntos de tangencia de las rectas buscadas. Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\begin{aligned} AP_i^2+CP_i^2 &= AC^2 \\ AP_i^2+9 &= 90 \end{aligned}$$

para $i=1,2$.

Así las coordenadas de P_1 y P_2 deben ser soluciones de la ecuación:

$$x^2+(y-6)^2+9=90.$$

Al realizar operaciones esta ecuación se transforma en:

$$x^2+y^2-12y-45=0.$$

Además, por estar P_1 y P_2 en el círculo, sus coordenadas también deben satisfacer la ecuación:

$$(x-3)^2+(y+3)^2=9,$$

o lo que es lo mismo:

$$x^2+y^2-6x+6y+9=0.$$

Por tanto, debemos resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-12y-45&=0 \\ x^2+y^2-6x+6y+9&=0. \end{aligned}$$

Al restar la segunda a la primera, obtenemos:

$$6x-18y-54=0$$
$$x-3y-9=0.$$

De donde,

$$\boxed{x=3y+9.} \tag{4.11}$$

Al sustituir, este valor en la primera ecuación del sistema, obtenemos:

$$(3y+9)^2+y^2-12y-45=0$$
$$10y^2+42y+36=0$$
$$5y^2+21y+18=0.$$

Las soluciones de la última ecuación son:

$$y_1=\frac{-21+\sqrt{21^2-4(5)(18)}}{2(5)}$$
$$y_2=\frac{-21-\sqrt{21^2-4(5)(18)}}{2(5)}.$$

Es decir,

$$y_1=\frac{-21+9}{10}=\frac{-12}{10}=-\frac{6}{5}$$
$$y_2=\frac{-21-9}{10}=-3.$$

Al sustituir estos valores en (4.11) obtenemos:

$$x_1=3\left(-\frac{6}{5}\right)+9=\frac{27}{5}$$

y

$$x_2=3(-3)+9=0.$$

Por lo que tenemos que $P_1\left(\frac{27}{5},-\frac{6}{5}\right)$ y $P_2(0,-3)$ son los puntos en que las tangentes buscadas tocan el círculo.

La primera de las rectas tangentes es la que pasa por $A(0,6)$ y $P_1\left(\frac{27}{5},-\frac{6}{5}\right)$. Su ecuación es:

$$y-6=\frac{-\frac{6}{5}-6}{\frac{27}{5}}x$$
$$y-6=\frac{-4}{3}x$$
$$y=-\frac{4}{3}x+6.$$

La segunda recta tangente es la que pasa por $A(0, 6)$ y $P_2(0, -3)$. O sea, es la recta vertical :

$$x = 0.$$

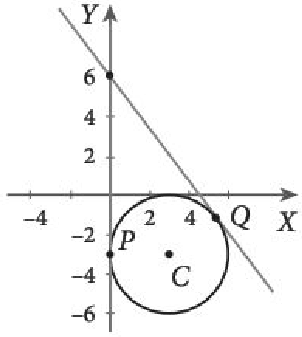


Figura 4.28

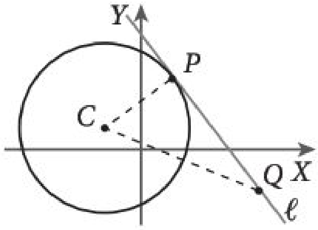


Figura 4.29

Si una recta ℓ es tangente a un círculo en el punto P, entonces el radio que pasa por P es perpendicular a ℓ. Además, con excepción de P, todos los puntos de ℓ están fuera del círculo.

Ahora veamos otra propiedad de la recta tangente que nos servirá también para definir las rectas tangentes de las otras cónicas.

Sea P un punto de un círculo y ℓ la recta tangente al círculo que pasa por P. Observemos en la figura 4.29 que todos los puntos de ℓ distintos de P están en una sola de las dos regiones determinadas por el círculo, esto es, en la región de afuera, ya que si Q es otro punto de ℓ,

$$d(C, Q) > d(C, P),$$

puesto que en el triángulo rectángulo CPQ el segmento CP es un cateto y el segmento CQ es la hipotenusa.

En general, diremos que una recta ℓ es tangente a una cónica en un punto P de ella si corta la cónica únicamente en P, y todos los demás puntos de ℓ están en una sola de las regiones determinadas por la cónica.

Una recta es normal a una cónica en un punto P de ella si es la perpendicular a la recta tangente a la cónica en ese punto P.

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso, encuentra la intersección de la recta y el círculo dados.

1. $x + y - 3 = 0$,
   $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$.
   $2x - y + 14 = 0$,
2. $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 25 = 0$.
   $x + y = 0$, círculo con centro
3. $C(-4, -2)$, r = 4.
4. $3x - y - 4 = 0$,
   $x^2 + y^2 - 16x + 24 = 0$.
5. $y = 2x - 5$,
   $x^2 + y^2 + 8x + 12y + 3 = 0$.
6. $y - 7 = 0$,
   $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 27 = 0$.

7. Halla con el método descrito la terna pitagórica correspondiente a los siguientes valores de m: $5, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}$.

Encuentra la ecuación de la recta tangente al círculo dado en el punto $P(x, y)$.

8. $P(3, 3)$ y el círculo con centro $C(-1, 1)$ y radio $\sqrt{20}$.
9. $P(0, 3)$ y el círculo $x^2 + y^2 - 10x - 2y - 3 = 0$.
10. $P(6, 1)$ y el círculo con centro en $C(12, 0)$ y radio $\sqrt{37}$.
11. $P(-\frac{1}{2}, -2)$ y el círculo $4x^2 + 4y^2 + 20x + 24y + 41 = 0$.
12. $P(13, 12)$ y el círculo con centro en $C(1, 7)$ y radio 13.
13. La recta $y = -x + 11$ es tangente a un círculo en el punto $P(4, 7)$. La recta $x = 3 - \sqrt{2}$ es tangente al mismo círculo en el punto $Q\,(3 - \sqrt{2}, 6)$.
    a) ¿Cuál es el centro del círculo?
    b) ¿Cuál es su ecuación?
14. La suma de dos números es 14 y la suma de sus cuadrados es 106. Encuentra los números e interpreta el problema geométricamente.
15. La suma de las áreas de dos cuadrados es 244 cm^2. Si el lado de uno de los cuadrados es $\frac{5}{6}$ del lado del otro, ¿cuánto mide el lado de cada cuadrado? Interpreta el problema geométricamente.
16. Una fábrica de ropa tiene un grupo de costureras que puede producir camisas de vestir o playeras deportivas. La curva de transformación de estos dos productos, que indica la relación entre el número x de camisas de vestir y y el número de playeras deportivas que puede fabricar en un día, tiene la siguiente ecuación:

$$(x + 500)^2 + (y + 200)^2 = 800^2.$$

¿Cuáles son las cantidades máximas que pueden producirse de cada una de estas prendas?

Ejercicios

Intersección de dos círculos

Encontrar los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 = 25$ y $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$.

Solución:
Debemos resolver el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x^2 + y^2 - 3x - 4y &= 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Restamos la segunda ecuación de (4.12) de la primera y despejamos y:

$$\boxed{\begin{aligned} 3x + 4y &= 25 \\ y &= -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}. \end{aligned}} \tag{4.13}$$

Sustituimos en la primera ecuación de (4.12):

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}\right)^2 &= 25 \\ \frac{25}{16}x^2 - \frac{75}{8}x + \frac{625}{16} &= 25 \\ x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x-3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

De donde $x = 3$. Sustituimos este valor en (4.13):

$$y = -\frac{3}{4}(3) + \frac{25}{4} = 4.$$

Por tanto, los dos círculos se cortan en el punto de coordenadas (3, 4) (figura 4.30).

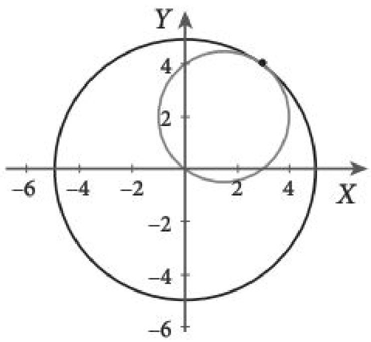
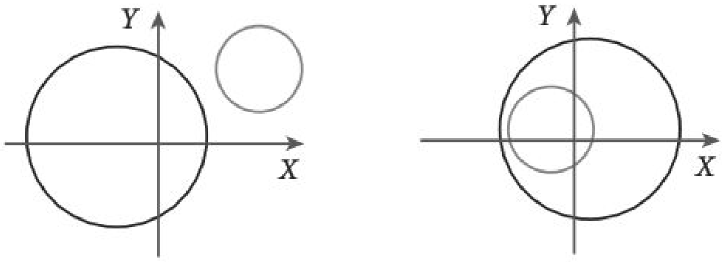


Figura 4.30

Si consideramos dos círculos, puede suceder que:

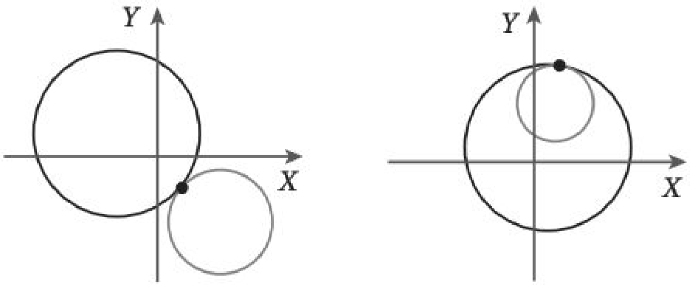
Dos círculos distintos se cortan en a lo más dos puntos. Para encontrar los puntos de intersección se resuelve el sistema compuesto por sus ecuaciones.

- No se corten (figuras 4.31).



Figuras 4.31

- Se corten en un solo punto (figuras 4.32).



Figuras 4.32

- Se corten en dos puntos (figura 4.33).

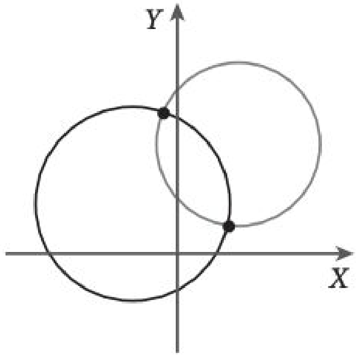


Figura 4.33

- Los círculos coincidan (figura 4.34).

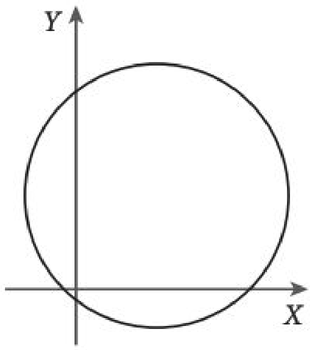


Figura 4.34

En términos algebraicos, estas situaciones se traducen de la siguiente manera. Si consideramos las ecuaciones de los dos círculos y las resolvemos simultáneamente, resulta que:

- No hay solución (no se cortan) (figura 4.31).
- Hay una sola solución (son tangentes en un punto) (figura 4.32).
- Hay dos soluciones (se cortan en dos puntos) (figura 4.33).
- Toda pareja (x, y) que es solución de una ecuación lo es de la otra (los círculos coinciden) (figura 4.34).

Pensamiento crítico

Si los círculos
$x^2 + y^2 + Dx + Ex + F = 0$ **y**
$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F' = 0$
no son degenerados, ¿qué puedes decir de los círculos?

Supongamos que las ecuaciones de dos círculos no concéntricos son:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0.$$

Al restar la segunda ecuación de la primera, obtenemos:

$$\boxed{(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0.} \tag{4.14}$$

Como los círculos no son concéntricos, entonces $D_1 \neq D_2$ o $E_1 \neq E_2$, de donde tenemos que la ecuación (4.14) es una recta llamada *eje radical* de los dos círculos.

Propiedades del eje radical

- Si los dos círculos se cortan en dos puntos, entonces el eje radical pasa por estos dos puntos.
- Si los dos círculos son tangentes, entonces el eje radical es tangente a ambos círculos en su punto común.
- Si los dos círculos no se cortan, entonces el eje radical no tiene puntos en común con ninguno de los círculos.
- El eje radical es perpendicular a la recta que une los centros de los dos círculos.

Al restar las ecuaciones generales de dos círculos no concéntricos obtenemos la ecuación del eje radical de dichos círculos.

Ejemplos

1. Encontrar los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

   Solución:
   Resolvemos el sistema:

$$x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0,$$

   restamos la segunda ecuación de la primera:

$$12x + 8y + 25 = 0.$$

   Despejamos y:

$$y = -\frac{12}{8}x - \frac{25}{8} = -\frac{3}{2}x - \frac{25}{8},$$

sustituimos el valor de y en la ecuación del segundo círculo:

$$x^2+y^2-4x-2y-4=0$$
$$x^2+\left(-\frac{3}{2}x-\frac{25}{8}\right)^2-4x-2\left(-\frac{3}{2}x-\frac{25}{8}\right)-4=0$$
$$\frac{13}{4}x^2+\frac{67}{8}x+\frac{769}{64}=0.$$

Encontramos los valores de x:

$$x=\frac{-\frac{67}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{67}{8}\right)^2-4\left(\frac{13}{4}\right)\left(\frac{769}{64}\right)}}{2\left(\frac{13}{4}\right)}=\frac{-\frac{67}{8}\pm\sqrt{-\frac{1377}{16}}}{2\left(\frac{13}{4}\right)}.$$

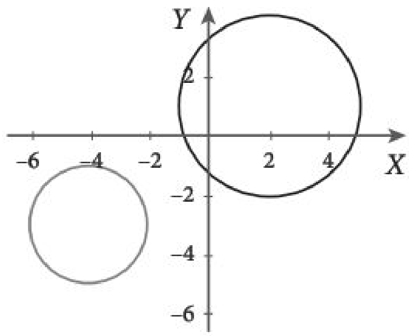


Figura 4.35

Como el discriminante es negativo, entonces no hay solución. Por tanto, los círculos no se cortan (figura 4.35) y el eje radical no corta ninguno de los círculos.

2. Encontrar el eje radical de los círculos $x^2+y^2-10x-16y+73=0$ y $x^2+y^2-2x-6y-15=0$ y demostrar que es perpendicular a la recta que une los centros de los círculos.

Solución:
En el sistema:

$$x^2+y^2-10x-16y+73=0$$
$$x^2+y^2-2x-6y-15=0,$$

restamos la segunda ecuación de la primera y obtenemos:

$$-8x-10y+88=0,$$

que es la ecuación del eje radical.

Para encontrar la pendiente del eje radical, escribimos la ecuación como:

$$y=-\frac{8}{10}x+\frac{88}{10}=-\frac{4}{5}x+\frac{44}{5},$$

de donde la pendiente es igual a $-\frac{4}{5}$.

Encontramos los centros de los círculos escribiendo sus ecuaciones en la forma estándar. La ecuación estándar del círculo $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 73 = 0$ es:

$$x^2 - 10x + y^2 - 16y = -73$$
$$\left(x^2 - 10x + 25\right) + \left(y^2 - 16y + 64\right) = -73 + 25 + 64$$
$$(x-5)^2 + (y-8)^2 = 16.$$

El centro del círculo $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 73 = 0$ es $(5, 8)$.

La ecuación estándar del círculo $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ es:

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y = 15$$
$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) = 15 + 1 + 9$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

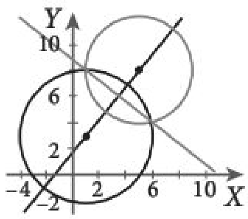


Figura 4.36

Así, su centro es $(1, 3)$. La recta que une los centros tiene por pendiente:

$$\frac{3-8}{1-5} = \frac{5}{4}.$$

Como la pendiente de la recta que une los centros es el recíproco negativo de la pendiente del eje radical, estas dos rectas son perpendiculares (figura 4.36).

Ejemplos

Ejercicios

1. Encuentra las rectas tangentes al círculo $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 36$ desde el punto $A(-10, 0)$.

Encuentra los puntos de intersección de los círculos dados.

2. $4x^2 + 4y^2 + 8x + 16y = 5$ y $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -\frac{19}{4}$.
3. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 3 = 0$ y $3x^2 + 3y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$.
4. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$ y $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 13 = 0$.
5. $x^2 + y^2 - 14x + 6y = 42$ y $x^2 + y^2 - 8x - 2y = 8$.
6. $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 9 = 0$ y $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$.
7. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 20y - 23 = 0$ y $16x^2 + 16y^2 - 16x - 80y + 23 = 0$.
8. $7x^2 + 7y^2 - 57x - 21y - 20 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - 36x - 16y + 12 = 0$.
9. $25x^2 + 25y^2 + 100x - 150y + 181 = 0$ y
   $50x^2 + 50y^2 - 50x + 250y + 37 = 0$.

Encuentra el eje radical de los círculos dados.

10. $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 15 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 17 = 0$.
11. $x^2 + y^2 + 16x + 2y + 16 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$.
12. $x^2 + y^2 + 14x - 6y + 22 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$.

El círculo que pasa por tres puntos

Encontrar la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(1, -1)$, $Q(5, 6)$ y $R(-2, 1)$.

Solución:
El centro $C(x, y)$ del círculo que buscamos equidista de los tres puntos dados; es decir,

$$d(P,C) = d(Q,C) = d(R,C).$$

Resolvemos la primera de las igualdades:

$$d(P, C) = d(Q, C)$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2}.$$

Elevamos al cuadrado y simplificamos:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y+1)^2 &= (x-5)^2 + (y-6)^2\\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 &= x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36\\ 8x + 14y - 59 &= 0.\end{aligned}$$

Ahora resolvemos la otra igualdad:

$$d(Q,C) = d(R,C)$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-1)^2}.$$

Si elevamos al cuadrado y simplificamos, tenemos:

$$\begin{aligned}(x-5)^2 + (y-6)^2 &= (x+2)^2 + (y-1)^2\\ x^2 - 10x + 25 + y^2 - 12y + 36 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1\\ -14x - 10y + 56 &= 0\\ -7x - 5y + 28 &= 0.\end{aligned}$$

Debemos resolver simultáneamente las dos ecuaciones obtenidas:

$$\boxed{\begin{aligned}8x + 14y - 59 &= 0\\ -7x - 5y + 28 &= 0.\end{aligned}} \qquad (4.15)$$

Multiplicamos la primera ecuación por 7, la segunda por 8, y las sumamos:

$$\begin{array}{rcl} 56x + 98y - 413 & = & 0\\ -56x - 40y + 224 & = & 0\\ \hline 58y - 189 & = & 0,\end{array}$$

de donde:

$$y = \frac{189}{58}.$$

Sustituimos este valor de y en la primera ecuación de (4.15) para obtener el valor de x:

$$\begin{aligned} 8x + 14y - 59 &= 0 \\ 8x + 14\left(\frac{189}{58}\right) - 59 &= 0 \\ 8x &= \frac{388}{29} \\ x &= \frac{388}{(29)8} = \frac{97}{58}. \end{aligned}$$

Así, el centro del círculo es $C\left(\frac{97}{58}, \frac{189}{58}\right)$.

Para encontrar su radio, calculamos la distancia de C a cualquiera de los puntos dados; por ejemplo,

$$d(R,C) = \sqrt{\left(-2 - \frac{97}{58}\right)^2 + \left(1 - \frac{189}{58}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{213}{58}\right)^2 + \left(-\frac{131}{58}\right)^2} = \frac{13}{58}\sqrt{370}.$$

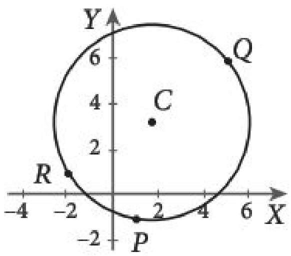


Figura 4.37

Por tanto, la ecuación del círculo (ver figura 4.37) es:

$$\left(x - \frac{97}{58}\right)^2 + \left(y - \frac{189}{58}\right)^2 = \left(\frac{13}{58}\sqrt{370}\right)^2.$$

Un problema interesante es saber cuál es la cantidad mínima de puntos que determinan una curva. Por ejemplo, sabemos que por un punto puede pasar una infinidad de rectas; en cambio, dados dos puntos, sólo hay una recta que pasa por ambos. En el caso del círculo, por uno y dos puntos puede pasar una infinidad de círculos. En cambio, por tres puntos no alineados sólo puede pasar uno. Los tres puntos determinan un triángulo y sabemos que el centro del *círculo circunscrito* a un triángulo es el punto donde se cortan sus *mediatrices*; este punto se llama *circuncentro*. Como las tres mediatrices se cortan en un punto, basta encontrar dos de ellas y determinar su punto de intersección para conocer el circuncentro.

Ejemplo

1. Encontrar el círculo que pasa por los puntos $A(2, 1)$, $B(-4, 3)$ y $C(-6, 5)$.

Solución:
El círculo buscado es el circuncírculo del triángulo ABC (ver página 150).

- Mediatriz de AB:

  Encontramos el punto medio P del segmento AB:

$$P\left(\frac{2-4}{2}\ \frac{1+3}{2}\right)=P(-1,2).$$

Encontramos la pendiente m del segmento AB:

$$m=\frac{3-1}{-4-2}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3},$$

entonces la mediatriz pasa por P y tiene pendiente igual a $-\frac{1}{m}=3$; así, su ecuación es:

$$\begin{aligned} y-2&=3(x+1)\\ y&=3x+5. \end{aligned}$$

- Mediatriz de AC:

  Encontramos el punto medio Q del segmento AC:

$$Q\left(\frac{2-6}{2},\frac{1+5}{2}\right)=Q(-2,3).$$

Encontramos la pendiente m del segmento AC:

$$m=\frac{5-1}{-6-2}=-\frac{1}{2},$$

entonces la mediatriz pasa por Q y tiene pendiente igual a $-\frac{1}{m}=2$; así, su ecuación es:

$$\begin{aligned} y-3&=2(x+2)\\ y&=2x+7. \end{aligned}$$

Ya que tenemos dos mediatrices, las resolvemos simultáneamente para encontrar su intersección. Como en ambas tenemos despejada la y, lo más fácil es resolverlas por igualación:

$$3x+5=2x+7,$$

de donde obtenemos $x=2$. Sustituyendo este valor en la ecuación de cualquiera de las dos mediatrices encontramos que $y=11$, así que el circuncentro es $M(2,11)$.

El radio del círculo es la distancia del circuncentro a cualquiera de los puntos A, B o C:

$$r=d(M,A)=\sqrt{(2-2)^2+(11-1)^2}=10;$$

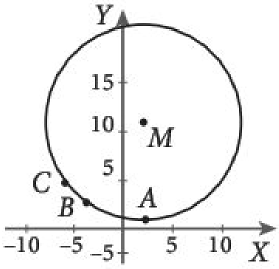


Figura 4.38

Ejemplo

así, la ecuación del círculo que pasa por A, B y C es el círculo con centro en M y radio r:

$$(x-2)^2+(y-11)^2=100.$$

Escrita en la forma general es (ver figura 4.38):

$$x^2+y^2-4x-22y+25=0.$$

El círculo de los nueve puntos

Consideremos el triángulo con vértices $A(0, 5)$, $B(-2, -3)$ y $C(4, 1)$. Comprobar que el círculo que pasa por los puntos medios de los lados también pasa por los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro del triángulo.

El *ortocentro* de un triángulo es el punto donde se cortan sus alturas.

Solución:
Encontramos los puntos medios de los lados:

$$\text{Lado } AB:\quad P\left(\frac{0-2}{2},\frac{5-3}{2}\right)=P(-1,1).$$

$$\text{Lado } BC:\quad Q\left(\frac{-2+4}{2},\frac{-3+1}{2}\right)=Q(1,-1).$$

$$\text{Lado } CA:\quad R\left(\frac{4+0}{2},\frac{1+5}{2}\right)=R(2,3).$$

Buscamos la ecuación del círculo que pasa por los puntos P, Q y R. Llamamos $D(x, y)$ al centro del círculo; entonces:

$$d(D,P)=d(D,Q)=d(D,R).$$

De la primera igualdad tenemos:

$$\begin{gathered}
d(D,P)=d(D,Q)\\
\sqrt{(x-(-1))^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-(-1))^2}\\
(x+1)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2\\
x^2+2x+1+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2+2y+1\\
4x-4y=0.
\end{gathered}$$

De la segunda igualdad:

$$
\begin{aligned}
d(D,Q) &= d(D,R)\\
\sqrt{(x-1)^2+(y-(-1))^2} &= \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\\
(x-1)^2+(y+1)^2 &= (x-2)^2+(y-3)^2\\
x^2-2x+1+y^2+2y+1 &= x^2-4x+4+y^2-6y+9\\
2x+8y-11 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ahora resolvemos el sistema:

$$
\begin{aligned}
4x-4y &= 0\\
2x+8y-11 &= 0.
\end{aligned}
$$

De la primera ecuación tenemos que:

$$x = y.$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación y despejando x tenemos:

$$
\begin{aligned}
2x+8x-11 &= 0\\
10x &= 11\\
x &= \frac{11}{10}.
\end{aligned}
$$

De donde $D\left(\frac{11}{10},\frac{11}{10}\right)$. Para encontrar el radio del círculo, calculamos la distancia de D a P:

$$d(D,P)=\sqrt{\left(\frac{11}{10}-(-1)\right)^2+\left(\frac{11}{10}-1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{21}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{442}}{10}.$$

La ecuación del círculo es:

$$\left(x-\frac{11}{10}\right)^2+\left(y-\frac{11}{10}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{442}}{10}\right)^2,$$

es decir,

$$\boxed{\left(x-\frac{11}{10}\right)^2+\left(y-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.} \tag{4.16}$$

Debemos encontrar los pies de las alturas. Para ello, calculamos primero las ecuaciones de las alturas. Como la altura es la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto, entonces veremos cuáles son las pendientes de los lados del triángulo:

$$\text{Pendiente de } AB: \quad m_1 = \frac{-3-5}{-2-0} = 4.$$

$$\text{Pendiente de } BC: \quad m_2 = \frac{1-(-3)}{4-(-2)} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Pendiente de } CA: \quad m_3 = \frac{5-1}{0-4} = -1.$$

La pendiente de la altura que pasa por A y es perpendicular al lado BC es igual a $-\frac{3}{2}$, y la ecuación es:

$$y-5 = -\frac{3}{2}(x-0)$$
$$y = -\frac{3}{2}x+5.$$

La pendiente de la altura que pasa por B y es perpendicular al lado CA es igual a 1, y la ecuación es:

$$y-(-3) = 1(x-(-2))$$
$$y = x-1.$$

La pendiente de la altura que pasa por C y es perpendicular al lado AB es igual a $-\frac{1}{4}$, y la ecuación es:

$$y-1 = -\frac{1}{4}(x-4)$$
$$y = -\frac{1}{4}x+2.$$

Para encontrar el ortocentro H, basta con resolver simultáneamente las ecuaciones de dos de las alturas:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= x-1 \\ y &= -\frac{1}{4}x+2. \end{aligned}} \tag{4.17}$$

De donde:

$$x-1 = -\frac{1}{4}x+2$$
$$x+\frac{1}{4}x = 2+1$$
$$\frac{5}{4}x = 3$$
$$x = \frac{12}{5}.$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación de (4.17) para encontrar el valor de y:

$$y = \frac{12}{5} - 1 = \frac{7}{5}.$$

Así, $H\left(\frac{12}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

Las ecuaciones de los lados del triángulo son:

Lado AB:

$$\begin{aligned} y - 5 &= 4(x - 0) \\ y &= 4x + 5. \end{aligned}$$

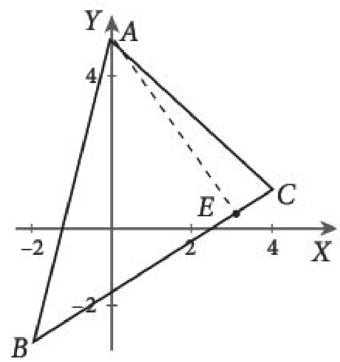


Figura 4.39

Lado BC:

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{2}{3}(x - 4) \\ y &= \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Lado CA:

$$\begin{aligned} y - 5 &= -1(x - 0) \\ y &= -x + 5. \end{aligned}$$

Finalmente, para encontrar el pie E de la altura que pasa por A, debemos encontrar el punto donde se cortan esta y el lado BC (figura 4.39).

Para ello, resolvemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\frac{3}{2}x + 5 \\ y &= \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}, \end{aligned}} \qquad (4.18)$$

es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x + 5 &= \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x &= -\frac{5}{3} - 5 \\ -\frac{13}{6}x &= -\frac{20}{3} \\ x &= \frac{40}{13}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (4.18) para obtener el valor de y:

$$y = -\frac{3}{2}\left(\frac{40}{13}\right) + 5 = \frac{5}{13}.$$

Así, $E\left(\frac{40}{13}, \frac{5}{13}\right)$.

Para encontrar el pie F de la altura que pasa por B, debemos encontrar el punto donde se cortan esta y el lado AC. Para ello, resolvemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= -x + 5, \end{aligned}} \tag{4.19}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x - 1 &= -x + 5 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la primera ecuación de (4.19) para obtener el valor de y:

$$y = 3 - 1 = 2.$$

Así, $F(3, 2)$.

Para encontrar el pie J de la altura que pasa por C, debemos encontrar el punto donde se cortan esta y el lado AB. Para ello, resolvemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\frac{1}{4}x + 2 \\ y &= 4x + 5, \end{aligned}} \tag{4.20}$$

es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x + 2 &= 4x + 5 \\ -\frac{1}{4}x - 4x &= 5 - 2 \\ -\frac{17}{4}x &= 3 \\ x &= -\frac{12}{17}. \end{aligned}$$

Sustituimos este valor de x en la segunda ecuación de (4.20) para obtener el valor de y:

$$y = 4\left(-\frac{12}{17}\right) + 5 = \frac{37}{17}.$$

Así, $J\left(-\frac{12}{17}, \frac{37}{17}\right)$.

Ahora debemos probar que los puntos E, F y J están en el círculo (4.16), es decir, que satisfacen la ecuación de este:

$$\left(x-\frac{11}{10}\right)^2+\left(y-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50},$$

es decir,

$$E\left(\frac{40}{13},\frac{5}{13}\right):\quad \left(\frac{40}{13}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{5}{13}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$F(3,2):\quad \left(3-\frac{11}{10}\right)^2+\left(2-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$J\left(-\frac{12}{17},\frac{37}{17}\right):\quad \left(-\frac{12}{17}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{37}{17}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

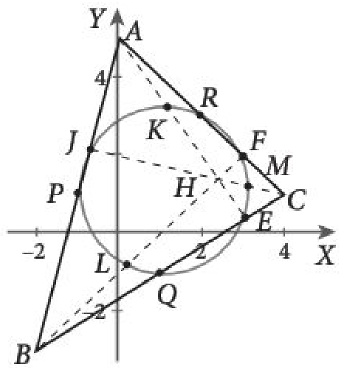


Figura 4.40

Encontramos el punto medio entre cada vértice y el ortocentro:

Punto medio de AH: $K\left(\frac{\frac{12}{5}+0}{2},\frac{\frac{7}{5}+5}{2}\right)=K\left(\frac{6}{5},\frac{16}{5}\right).$

Punto medio de BH: $L\left(\frac{\frac{12}{5}+(-2)}{2},\frac{\frac{7}{5}+(-3)}{2}\right)=L\left(\frac{1}{5},-\frac{4}{5}\right).$

Punto medio de CH: $M\left(\frac{\frac{12}{5}+4}{2},\frac{\frac{7}{5}+1}{2}\right)=M\left(\frac{16}{5},\frac{6}{5}\right).$

Veremos que los puntos K, L y M están en el círculo (4.16) (figura 4.40):

$$K\left(\frac{6}{5},\frac{16}{5}\right):\quad \left(\frac{6}{5}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{16}{5}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$L\left(\frac{1}{5},-\frac{4}{5}\right):\quad \left(\frac{1}{5}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

$$M\left(\frac{16}{5},\frac{6}{5}\right):\quad \left(\frac{16}{5}-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{6}{5}-\frac{11}{10}\right)^2=\frac{221}{50}.$$

Pensamiento crítico

¿Cómo debe ser un triángulo para que los puntos medios de sus lados coincidan con los pies de las alturas?

El círculo que pasa por los puntos medios de los lados, por los pies de las alturas y por los puntos medios de los segmentos que unen los vértices con el ortocentro de un triángulo cualquiera recibe el nombre de *círculo de los nueve puntos* del triángulo o *círculo de Euler*.

Ejemplo

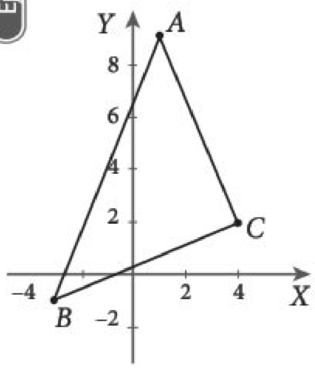


Figura 4.41

1. Encontrar los nueve puntos del círculo de Euler y su ecuación a partir del triángulo rectángulo cuyos vértices son $A(1,9)$, $B(-3,-1)$ y $C(4,2)$.

Solución:
Encontramos los puntos medios de los lados:

$$\textbf{Lado } AB\text{:}\quad P\left(\frac{1-3}{2},\frac{9-1}{2}\right)=P(-1,4).$$

$$\textbf{Lado } BC\text{:}\quad Q\left(\frac{-3+4}{2},\frac{-1+2}{2}\right)=Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

$$\textbf{Lado } CA\text{:}\quad R\left(\frac{4+1}{2},\frac{2+9}{2}\right)=R\left(\frac{5}{2},\frac{11}{2}\right).$$

Debemos encontrar los pies de las alturas. Puesto que el triángulo es rectángulo, observamos en la figura 4.41 que la recta que pasa por el vértice A y es perpendicular al lado BC es justamente el lado AC, es decir, el vértice C es el pie de una altura. Del mismo modo, C es el pie de la altura que pasa por B y es perpendicular al lado AC. Falta solamente encontrar el pie de la altura que pasa por C y es perpendicular al lado AB. Calculamos la pendiente del lado AB:

$$\textbf{Pendiente de } AB\text{:}\quad m_1=\frac{-1-9}{-3-1}=\frac{5}{2}.$$

La pendiente de la altura que pasa por C y es perpendicular al lado AB es igual a $-\frac{2}{5}$ y la ecuación es:

$$y-2=-\frac{2}{5}(x-4)$$
$$y=-\frac{2}{5}x+\frac{18}{5}.$$

Para encontrar el pie D de la altura que pasa por C, debemos encontrar el punto donde se cortan esta y el lado AB. Para ello, encontramos la ecuación del lado AB:

$$y-9=\frac{5}{2}(x-1)$$
$$y=\frac{5}{2}x+\frac{13}{2},$$

y resolvemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= -\frac{2}{5}x + \frac{18}{5} \\ y &= \frac{5}{2}x + \frac{13}{2}. \end{aligned}} \tag{4.21}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5}x + \frac{18}{5} &= \frac{5}{2}x + \frac{13}{2} \\ -\frac{2}{5}x - \frac{5}{2}x &= \frac{13}{2} - \frac{18}{5} \\ -\frac{29}{10}x &= \frac{29}{10} \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación de (4.21), obtenemos:

$$y = -\frac{2}{5}(-1) + \frac{18}{5} = 4.$$

Entonces el pie de la altura que pasa por C y es perpendicular a AB es $D(-1, 4)$, el cual coincide con P, el punto medio de AB. Como el ortocentro H es el punto de intersección de las alturas BC, CA y CD, entonces tenemos que $H = C$. Los tres puntos que faltan son los puntos medios entre los vértices y el ortocentro. Como el ortocentro es C, los tres puntos restantes son C mismo, Q y R. En resumen, en este caso los nueve puntos son P, Q, R y C. Ahora debemos encontrar la ecuación del círculo. Para ello, podemos tomar cualesquiera tres de los puntos.

Tomaremos $C(4, 2)$, $P(-1, 4)$ y $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Si llamamos $E(x, y)$ al centro del círculo, entonces:

$$d(E, C) = d(E, P) = d(E, Q).$$

De la primera igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} d(E,C) &= d(E,P) \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} &= \sqrt{(x-(-1))^2 + (y-4)^2} \\ (x-4)^2 + (y-2)^2 &= (x+1)^2 + (y-4)^2 \\ x^2 - 8x + y^2 - 4y + 20 &= x^2 + 2x + y^2 - 8y + 17 \\ 10x - 4y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

De la segunda igualdad:

$$d(E, P) = d(E, Q)$$

$$\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-4)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 8y + 17 = x^2 - x + y^2 - y + \frac{1}{2}$$

$$3x - 7y + \frac{33}{2} = 0.$$

Ahora resolvemos el sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} 10x - 4y - 3 &= 0 \\ 3x - 7y + \frac{33}{2} &= 0. \end{aligned}} \tag{4.22}$$

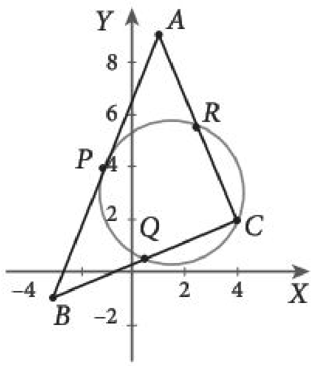


Figura 4.42

El círculo de los nueve puntos o círculo de Euler de un triángulo es el que pasa por los puntos medios de sus lados, por los pies de sus alturas y por los puntos medios de los segmentos que unen sus vértices con su ortocentro.

Multiplicando la primera ecuación por −3 y la segunda por 10, tenemos:

$$\begin{aligned} -30x + 12y + 9 &= 0 \\ 30x - 70y + 165 &= 0, \end{aligned}$$

sumando:

$$-58y + 174 = 0.$$

Despejando, $y = 3$. Sustituimos este valor en la primera ecuación de (4.22):

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}(3) + \frac{3}{10} = \frac{3}{2}.$$

De donde $E\left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Para encontrar el radio del círculo, encontramos la distancia de E a P:

$$d(E,P) = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - (-1)\right)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

La ecuación del círculo (figura 4.42) es:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2,$$

es decir,

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \frac{29}{4}.$$

Ejemplo

Ejercicios

Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los tres puntos dados.

1. $A(4,4)$, $B(-6,-6)$, $C(0,-4)$.
2. $A(1,-3)$, $B(5,1)$, $C(9,-3)$.
3. $A(8,8)$, $B(-1,5)$, $C(1,9)$.
4. $A(-8,-2)$, $B(-1,-6)$, $C(-1,2)$.
5. $A(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $B(-4,0)$, $C(0,-4)$.
6. $A(1,4)$, $B(1,2)$, $C(3,4)$.
7. Halla el círculo de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son $A(5,8)$, $B(-4,8)$ y $C(5,-2)$; utiliza los puntos medios de los lados.
8. Encuentra el círculo de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son $A(5,8)$, $B(-9,0)$ y $C(-3,-6)$; utiliza los puntos medios de los lados.
9. Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$y $C(0, \sqrt{3})$. Encuentra los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices. Da con la ecuación del círculo que pasa por todos ellos.
10. Considera el triángulo cuyos vértices son $A(2, 4)$, $B(5, 1)$y $C(6, 5)$. Encuentra los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices. Halla la ecuación del círculo que pasa por todos ellos.

Ecuaciones paramétricas del círculo

Un móvil recorre una curva de manera que, en cada tiempo t, su abscisa vale $\cos t$ y su ordenada vale $\operatorname{sen} t$. Supongamos que el tiempo se mide en segundos y que $0 \leq t \leq 2\pi$. Describir la curva recorrida por el móvil.

Solución:

Tenemos una función de un intervalo de tiempo al plano, es decir, a cada instante le corresponde un punto en el plano: el punto donde se encuentra el móvil en ese momento.

Para cada t, tenemos dos funciones:

$$x(t) = \cos t$$
$$y(t) = \operatorname{sen} t,$$

que describen la abscisa y la ordenada del punto donde está el móvil en el instante t.

Localizando algunos puntos para algunos valores de t, nos damos cuenta de que la curva parece ser un círculo de radio 1 (figura 4.43).

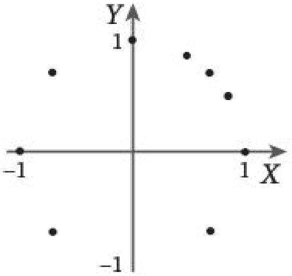


Figura 4.43

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
x	1	0.87	0.71	0.5	0	–0.71	–1	–0.71	0	0.71
y	0	0.5	0.71	0.87	1	0.71	0	–0.71	–1	–0.71

Este es en realidad el caso. De hecho, recordando la identidad trigonométrica:

Las trayectorias descritas por partículas cargadas en campos magnéticos uniformes son circulares.

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1,$$

podemos ver que todos los puntos de la forma:

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

están en el círculo de radio 1. Conforme t toma todos los valores entre 0 y 2π el móvil, cuya posición es $(\cos t, \operatorname{sen} t)$, da una vuelta completa al círculo.

Para parametrizar un círculo con centro en (h, k) y radio r partimos de la parametrización:

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

del círculo con radio 1 con centro en el origen.

Si multiplicamos por r ambas coordenadas, obtendremos un círculo de radio r con centro en el origen:

Podemos usar sen y cos para parametrizar cualquier círculo. Si este tiene centro en (h, k) y radio r, entonces:

$$x = h + r\cos t$$
$$y = h + r\operatorname{sen} t$$

con $t \in [0, 2\pi]$ son unas ecuaciones paramétricas.

$$(x(t), y(t)) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t).$$

Ahora, para obtener el círculo con centro en (h, k) sumamos h a la primera coordenada y k a la segunda, obteniendo:

$$(x(t), y(t)) = (h + r\cos t, k + r\operatorname{sen} t).$$

Así, conforme t recorre el intervalo $[0, 2\pi]$, el punto $(h + r\cos t, k + r\operatorname{sen} t)$ recorre el círculo de radio r con centro en (h, k).

De esta manera, hemos obtenido unas *ecuaciones paramétricas* del círculo:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= h + r\cos t \\ y(t) &= k + r\operatorname{sen} t. \end{aligned}} \tag{4.23}$$

Ejemplos

1. Parametrizar el círculo $(x-3)^2+(y-5)^2=16$.

Solución:
El círculo tiene radio 4 y centro en (3, 5) (figura 4.44); así que unas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t)=3+4\cos t$$
$$y(t)=5+4\operatorname{sen} t,$$

donde $t\in[0,2\pi]$.

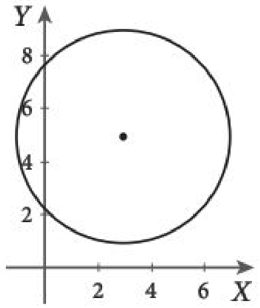


Figura 4.44

2. Parametrizar el círculo $x^2+y^2+2x-4y-4=0$.

Solución:
Completamos los cuadrados, para escribirla en la forma estándar:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9.$$

El centro del círculo es el punto $(-1,2)$. Su radio es 3 (figura 4.45); así, unas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t)=-1+3\cos t$$
$$y(t)=2+3\operatorname{sen} t.$$

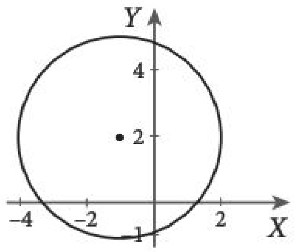


Figura 4.45

Pensamiento crítico

Un móvil se mueve de manera que sus coordenadas son:

$$x(t)=-1+3\cos t$$
$$y(t)=2+3\operatorname{sen} t.$$

Durante el intervalo de tiempo $[0, 3\pi]$, ¿cuántas veces pasa por el punto $(-1, 5)$ en el transcurso de ese lapso?

Las ecuaciones paramétricas son muy importantes en computación, ya que nos permiten trazar curvas en la pantalla de la computadora. De hecho, la mayor parte de las cónicas trazadas en este libro se realizaron utilizando ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la siguiente rutina en Visual Basic traza el círculo del ejemplo anterior:

```
Escala = 5000
PSet (2, 2)
For t = 0 To 360
x = Escala*(-1+3*cos(t))
y = Escala*(2+3*sin(t))
Line -(x, y)
Next
```

La variable *escala* permite trazar el círculo del tamaño deseado en la pantalla.

Las hojas de cálculo electrónicas como Excel y Open Office son muy útiles para trazar curvas, para lo cual es necesario usar las ecuaciones paramétricas. En este momento estudia el apartado "Ecuaciones paramétricas del círculo", que parece en el Apéndice.

Ejercicios

En cada caso, parametriza el círculo con el centro y radio dados.

1. $C(2, -5)$, $r = 6$.
2. $C(-3, 4)$, $r = 7$.
3. $C(\frac{1}{3}, -2)$, $r = 1$.
4. $C(4, 4)$ $r = \frac{1}{6}$.
5. $C(0, -\frac{5}{3})$, $r = \sqrt{2}$.
6. $C(-6, \frac{8}{9})$, $r = \frac{2}{9}$.

En cada caso, parametriza el círculo con la ecuación dada.

7. $9x^2 + 9y^2 + 72x - 12y + 103 = 0$.
8. $18x^2 + 18y^2 - 6x + 30y - 41 = 0$.
9. $25x^2 + 25y^2 + 10x - 100y - 49 = 0$.
10. $x^2 + y^2 - 10x - 22y + 142 = 0$.
11. $4x^2 + 4y^2 - 44y + 21 = 0$.
12. $x^2 + y^2 + 12x + 14y + 77 = 0$.

En cada caso, escribe la ecuación cartesiana del círculo que corresponde a las ecuaciones paramétricas dadas.

13. $x(t) = 2 + \cos t$, $y(t) = 5 + \operatorname{sen} t$.
14. $x(t) = 4 + 2\cos t$,
    $y(t) = -9 + 2\operatorname{sen} t$.
15. $x(t) = \frac{1}{6} + 8\cos t$, $y(t) = 8 \operatorname{sen} t$.
16. $x(t) = -2 + \frac{3}{5}\cos t$,
    $y(t) = 1 + \frac{3}{5}\operatorname{sen} t$.
17. $x(t) = 3 + \frac{7}{2}\cos t$,
    $y(t) = -4 + \frac{7}{2}\operatorname{sen} t$.
18. $x(t) = 5\cos t$, $y(t) = -\frac{1}{3} + 5\operatorname{sen} t$.

Desigualdades y el círculo

Encontrar la desigualdad que satisfacen los puntos que se encuentran dentro del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 8x - 10y = -25$.

Solución:
Escribimos la ecuación del círculo en la forma estándar:

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y = -25$$
$$\left(x^2 + 8x + 16\right) + \left(y^2 - 10y + 25\right) = -25 + 16 + 25$$
$$\left(x + 4\right)^2 + \left(y - 5\right)^2 = 16.$$

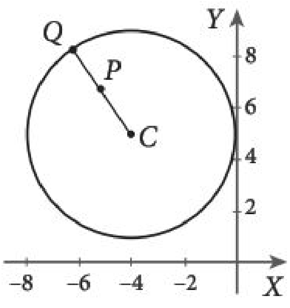


Figura 4.46

Tomamos un punto $P(x, y)$ dentro del círculo. Trazamos el radio que pasa por $P(x, y)$; este corta el círculo en el punto $Q(x_1, y_1)$ (figura 4.46).

Entonces, la distancia del centro del círculo a $Q(x_1, y_1)$ es 4, es decir,

$$d(C, Q) = 4.$$

Como $P(x, y)$ está dentro del círculo, tenemos que:

$$d(C, P) < d(C, Q),$$

es decir:

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-5)^2}<4.$$

Elevando al cuadrado:

$$(x+4)^2+(y-5)^2<16.$$

Así, cualquier punto que se encuentre dentro del círculo debe satisfacer la desigualdad:

$$(x+4)^2+(y-5)^2<16.$$

Consideremos un círculo en el plano. Este lo divide en tres conjuntos:

- Los puntos que están en el círculo (figura 4.47).
- Los puntos que están fuera del círculo (figura 4.48).
- Los puntos que están dentro del círculo (figura 4.49).

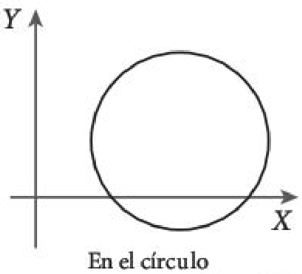


Figura 4.47

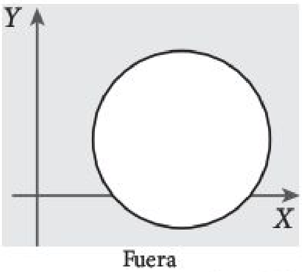


Figura 4.48

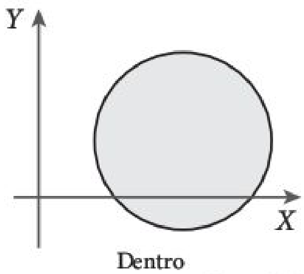


Figura 4.49

Si la ecuación del círculo es:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,} \tag{4.24}$$

los puntos que están en el círculo son los que satisfacen dicha ecuación, es decir, su distancia al centro $C(a, b)$ debe ser igual a r.

Sea $P(x, y)$ un punto dentro del círculo. Trazamos el radio que pasa por $P(x, y)$, el cual corta el círculo en el punto $Q(x_1, y_1)$ (figura 4.50).

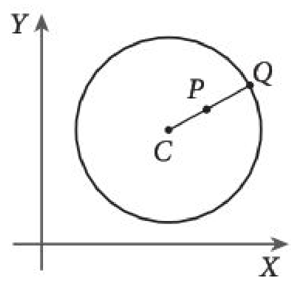


Figura 4.50

Así,

$$d(C, P) < d(C, Q),$$

o sea,

$$d(C, P)^2 < d(C, Q)^2,$$

es decir,

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2.$$

Los puntos que se encuentran dentro del círculo con centro en (a, b) y radio r satisfacen la desigualdad $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$.

Por tanto, los puntos que están dentro del círculo satisfacen:

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2.$$

Los puntos cuya distancia al centro es mayor que r están fuera del círculo y satisfacen:

$$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2.$$

Los puntos que se encuentran fuera del círculo con centro en (a, b) y radio r satisfacen la desigualdad $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$.

En resumen:

- Un punto $P(x, y)$ está en el círculo si satisface:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

- Un punto $P(x, y)$ está dentro del círculo si satisface:

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2.$$

- Un punto $P(x, y)$ está fuera del círculo si satisface:

$$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2.$$

Ejemplos

1. Trazar la región que consta de los puntos que satisfacen la desigualdad $x^2+y^2+6x+8y+21>0$.

Solución:
Escribimos la desigualdad como:

$$(x^2+6x)+(y^2+8y)+21>0$$
$$(x^2+6x+9)+(y^2+8y+16)>9+16-21$$
$$(x+3)^2+(y+4)^2>4.$$

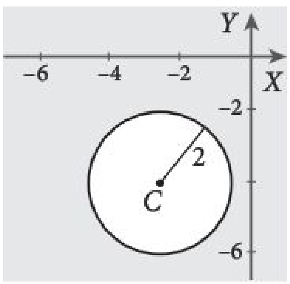


Figura 4.51

Entonces, los puntos que satisfacen la desigualdad son los que están afuera del círculo con centro en $C(-3, -4)$ de radio 2 (figura 4.51).

2. Trazar la región que satisface las desigualdades $x^2+y^2-10x+8y+32<0$ y $x-y-8>0$.

Solución:
Siguiendo el ejemplo anterior, las desigualdades pueden escribirse como:

$$(x-5)^2+(y+4)^2<9 \quad \text{y} \quad y<x-8,$$

respectivamente.

Entonces, la región buscada consta de los puntos que están dentro del círculo con centro en $C(5, -4)$ de radio 3 y debajo de la recta $y = x - 8$ (figura 4.52).

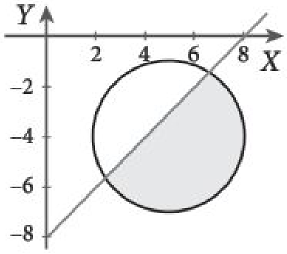


Figura 4.52

Pensamiento crítico

Si un punto $P(x, y)$ satisface la desigualdad $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$, ¿en qué región se encuentra?

Ejemplos

Ejercicios

1. Grafica la región que se encuentra debajo de las rectas $4x - 3y + 3 = 0$ y $5x + 3y - 30 = 0$ y dentro del círculo $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{239}{16} = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.
2. Grafica la región que se encuentra debajo de la recta $2x - y + 12 = 0$, arriba de la recta $x + y = -3$ y fuera del círculo $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.
3. Escribe la ecuación general del círculo con centro en $C(4, -6)$ y radio $\frac{3}{2}$. Considera el punto $P\left(4, -\frac{19}{4}\right)$. ¿Está el punto P dentro del círculo?
4. Grafica la región que se encuentra dentro del círculo $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$, fuera del círculo $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, arriba de la recta $x + 3y = 0$ y debajo de la recta $x - y + 5 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.
5. El segmento que une los puntos $A(1, 1)$ y $B(5, 3)$ es un diámetro de un círculo. Escribe la ecuación de dicho círculo. Grafica la región que se encuentra dentro del círculo y arriba de la recta $3x + y - 11 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.
6. Escribe las desigualdades que determinan que un punto esté dentro del círculo con centro en el origen y radio $\sqrt{17}$, fuera del círculo con centro $C(5, 0)$ y radio $\frac{3}{2}$ y debajo de la recta con pendiente $m = 2$ que pasa por el punto $Q(-1, 0)$.
7. Grafica la región que se encuentra dentro del círculo $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0$ y fuera del círculo $x^2 + y^2 + 12x + 4y + 36 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.
8. Grafica la región que se encuentra dentro del círculo $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 7 = 0$ y arriba de la recta que pasa por los puntos $P(2, 0)$ y $Q(0, 3)$. Escribe las desigualdades que describen la región.
9. Grafica la región que se encuentra dentro del triángulo cuyos vértices son $A(1, 7)$, $B(-2, 1)$, $C(9, 3)$ y dentro del círculo con centro en $D(4, 2)$ y radio $\sqrt{20}$. Escribe las desigualdades que describen la región.
10. ¿Qué puntos satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 19 < 0$, abajo de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1, arriba de la recta que pasa por los puntos $P(4, 7)$ y $Q(8, -4)$ y fuera del círculo con centro en $(4, -2)$ y radio $\sqrt{6}$?

Resolución de problemas

Lugares geométricos

En esta sección veremos dos problemas que involucran lugares geométricos relacionados con los círculos.

1. Encontrar el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A(5, 3)$ y $B(-1, 6)$ es igual a 25.

Solución:
La distancia de $P(x, y)$ a $A(5, 3)$ es:

$$d(P, A) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2},$$

entonces, el cuadrado de esta distancia es:

$$d(P, A)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2.$$

De manera análoga, el cuadrado de la distancia de $P(x, y)$ a $B(-1, 6)$ es:

$$d(P, B)^2 = (x+1)^2 + (y-6)^2.$$

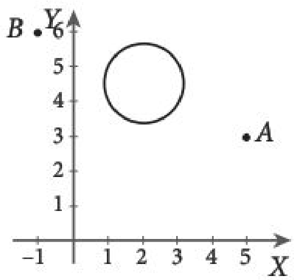


Figura 4.53

Como sabemos por hipótesis que la suma de los cuadrados de estas distancias es 25, entonces:

$$d(P, A)^2 + d(P, B)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 + (x+1)^2 + (y-6)^2 = 25.$$

Simplificando tenemos (figura 4.53):

$$\begin{aligned}(x-5)^2 + (y-3)^2 + (x+1)^2 + (y-6)^2 &= 25\\ x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 &= 25\\ 2x^2 - 8x + 71 + 2y^2 - 18y &= 25\\ 2(x^2 - 4x + 4) + 2\left(y^2 - 9y + \frac{81}{4}\right) &= 25 - 71 + 8 + \frac{81}{2}\\ (x-2)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

El lugar geométrico buscado es un círculo con centro en $C\left(2, \frac{9}{2}\right)$ y radio $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. Encontrar el lugar geométrico del vértice $P(x, y)$ de un ángulo recto si sus lados siempre pasan por los puntos $A(-5, -1)$ y $B(3, 5)$.

Solución:

Como el ángulo es recto y sus lados siempre pasan por los puntos $A(-5, -1)$ y $B(3, 5)$ entonces podemos considerar que el triángulo PAB es un triángulo rectángulo.

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\left(d(P,A)\right)^2 + \left(d(P,B)\right)^2 = \left(d(A,B)\right)^2.$$

Primero calculamos cada una de estas distancias:

$$\left(d(P,A)\right)^2 = \left(x-(-5)\right)^2 + \left(y-(-1)\right)^2$$
$$\left(d(P,B)\right)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$
$$\left(d(A,B)\right)^2 = (-5-3)^2 + (-1-5)^2 = 64 + 36 = 100.$$

De donde:

$$(x+5)^2 + (y+1)^2 + (x-3)^2 + (y-5)^2 = 100.$$

Simplificando tenemos (figura 4.54):

$$2x^2 + 4x + 2y^2 - 8y + 60 = 100$$
$$2\left(x^2 + 2x\right) + 2\left(y^2 - 4y\right) = 100 - 60$$
$$2\left(x^2 + 2x + 1\right) + 2\left(y^2 - 4y + 4\right) = 40 + 2 + 8$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{50}{2} = 25.$$

Por tanto, el lugar geométrico buscado es el círculo con centro en $(-1, 2)$ y radio 5. (Comparar con el ejemplo 3 de la página 150).

Encontrar un lugar geométrico significa determinar qué puntos satisfacen una cierta condición geométrica, generalmente expresada en palabras, y que hay que llevar a una expresión algebraica.

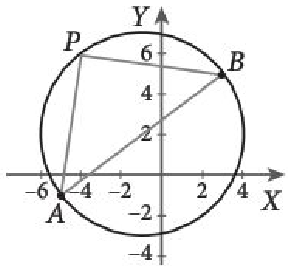


Figura 4.54

Ejercicios

1. Encuentra el lugar geométrico de un punto que se mueve manteniendo una distancia de 8 del punto $Q(7, -1)$.
2. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que su distancia al punto $A(2, 1)$ sea igual a 2 veces su distancia al punto $B(-3, 1)$. ¿Qué lugar geométrico es?
3. Encuentra el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-5, -2)$ y $B(-3, -4)$ sea 6.
4. Da con el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-2, 3)$ y $B(1, 6)$ sea 10.
5. Encuentra el lugar geométrico del tercer vértice de un triángulo cuyos vértices restantes son los puntos $A(-5, 2)$ y $B(3, 2)$ y la longitud de la mediana del vértice B es constante e igual a 4.
6. Halla el lugar geométrico de los puntos tales que el cuadrado de su distancia al punto $P(-3, 5)$ sea igual a su distancia al eje X.
7. Encuentra el lugar geométrico de los puntos tales que el cuadrado de su distancia al punto $Q(-2, -6)$ sea igual a su distancia al eje Y.

Mundo virtual

Geolab

Hay diversas maneras de trazar un círculo con Geolab, veamos algunas.

1. **Círculo directo.** En la pantalla de datos analíticos, construye un círculo utilizando el constructor *Círculo directo*. Después de dar el nombre, oprime la tecla Enter. Geolab construye el círculo con centro en $(0, 1)$ y radio 2. Una vez construido, cambia los valores de (a, b) y r. También puedes construirlo en la pantalla gráfica. Si después de darle nombre haces clic en la pantalla blanca, en ese lugar queda el centro; luego, arrastra el ratón con el botón izquierdo oprimido para determinar el radio. Dale al centro las coordenadas $(0, 0)$ y oprime el botón *Datos cartesianos* de la pantalla de datos analíticos para ver su ecuación. Mueve el centro a $(2, 3)$ y ve cómo cambia la ecuación.
2. **Círculo dados el centro y el radio.** En la pantalla de datos analíticos, construye el punto $P(2, 3)$ y el escalar $r = 5$. Ahora utiliza el constructor *Centro y radio* del menú de círculos. Después de darle nombre, haz doble clic en el nombre P y después en el nombre r. En lugar de doble clic en los nombres, puedes escribir P, r en el campo de datos que está a la derecha del nombre, en el panel superior. Si construyes en la pantalla gráfica, después de dar el nombre del círculo escribe los nombres P, r en el campo de datos que está a la derecha.
3. **Círculo dado su centro y uno de sus puntos.** Construye los puntos $Q(2, -3)$ y $R(5, 1)$. Ahora utiliza el constructor *Centro y punto* del menú de círculos para construir un círculo con centro en Q que pase por R.
4. **Circuncírculo.** Construye un triángulo ABC. Utiliza el constructor *Circuncírculo* para construir el circuncírculo de dicho triángulo. Construye las mediatrices de los lados y comprueba que se cortan en el centro del circuncírculo (circuncentro).
5. **Intersección de recta y círculo.** Construye la recta m: $2x - y - 10 = 0$ y el círculo c con centro en $O(4, -2)$ y radio $R = \sqrt{20}$. La recta y el centro los puedes construir como *Recta directa* y *Punto directo*. Para construir el radio r utiliza el constructor *Escalar calculado* y escribe **sqrt(20)** en el espacio para la fórmula. En la pantalla gráfica se ve que la recta es un diámetro del círculo, es decir, pasa por el centro y corta el círculo en dos puntos. Podemos encontrar las intersecciones por medio de las opciones *Por ratón*, *Del mismo lado de un punto* y *Del otro lado de un punto*. Construye una intersección **P1** usando el constructor *Por ratón*. Luego selecciona el punto en la lista de la derecha y arrastra el ratón. Observa como el punto **P1** persigue al cursor. Ahora construye un punto cualquiera **A** y otra intersección **P2** usando el constructor *Del mismo lado de un punto*.
6. **Intersección de círculos, eje radical.** Construye el círculo $c1$ con centro en $O1(-1, -1)$ y radio $r1 = 2$ y el círculo $c2$ con centro en $O2(2, 1)$ y $r2 = 3$. Observa que estos círculos se cortan en dos puntos. Construye el eje radical w de tales círculos. Utiliza el constructor *Eje radical* del menú de rectas. Observa que esta recta pasa por los puntos de intersección. Selecciona el

centro O1 y arrástralo para alejarlo del círculo c2. Mientras los círculos se corten, el eje radical pasará por los puntos de intersección. Cuando no se cortan, el eje radical existe a pesar de que los puntos de intersección no existan. Si esta recta la hubiéramos construido como la recta que pasa por los puntos de intersección, se hubiera perdido al alejar los círculos.

7. **Círculo de 9 puntos.** Construye el triángulo cuyos vértices son $A(0, 5)$, $B(-2, -3)$ y $C(4, 1)$. Construye las alturas *ha*, *hb*, *hc* y el ortocentro H, que es el punto de intersección de las alturas. Construye los puntos D, E y F como las intersecciones de las alturas con los lados. Construye el círculo *cir* que pasa por los puntos D, E y F. Ahora construye los puntos medios de los lados del triángulo, llámalos L, M y N, y observa que el círculo *cir* pasa por ellos. Para comprobar que estos puntos están en el círculo utiliza el constructor de *Define condiciones*, elige *Geométricas* en el submenú *Punto en* y por último *Círculo*. Construye el punto medio entre H y A. Llámalo P. De igual manera, construye los puntos Q y R como puntos medios entre H y B, y entre H y C. Comprueba que el círculo *cir* también pasa por estos tres puntos. Es por esta razón que este círculo se llama *círculo de 9 puntos*.

Geolab

Resumen de la unidad

- La *ecuación del círculo con centro en el origen* y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$.
- La *ecuación estándar o canónica del círculo* con centro $C(h, k)$ y radio r es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
- La *ecuación general del círculo* es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.
- La recta tangente a un círculo es perpendicular al radio que une el centro del círculo con el punto de tangencia.
- El eje radical de dos círculos no concéntricos con ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

es la recta con ecuación:

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0.$$

- Unas *ecuaciones paramétricas* del círculo con centro en $C(h, k)$ y radio r son:

$$(h + r\cos t, k + r\operatorname{sen} t).$$

- Un punto $P(x, y)$ está en el círculo con centro (a, b) y radio r si satisface:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

- Un punto $P(x, y)$ está dentro del círculo si satisface:

$$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2.$$

- Un punto $P(x, y)$ está fuera del círculo si satisface:

$$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2.$$

Ejercicios de repaso

1. Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-3, 1)$, $B(-1, 1)$ y $C\left(-2, 1+\sqrt{3}\right)$. Demuestra que la distancia del punto $P\left(-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ al vértice A es igual a la del punto P al vértice B más la distancia del punto P al vértice C. Construye el circuncírculo y demuestra que P se encuentra en dicho círculo.

2. Dados los círculos $x^2+y^2+6x-4y-51=0$ y $x^2+y^2-10x+14y+49=0$, encuentra la ecuación de la recta que une sus centros.

3. Dados los círculos $x^2+y^2-8x-2y+8=0$ y $x^2+y^2+4x+2y+1=0$, encuentra la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta que une sus centros y pasa por el centro del primer círculo.

4. Dados los círculos $x^2+y^2-4x-4y-28=0$, $x^2+y^2-14x+12y+76=0$ y $x^2+y^2-6x-20y+84=0$:
   a. Encuentra la ecuación de la recta que une los centros de los dos primeros.
   b. ¿El centro del tercer círculo está en la recta que encontraste en **a.**?

5. Encuentra o responde lo siguiente:
   a. Los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2+y^2+2x-4y-8=0$ y $x^2+y^2-2x-6y-10=0$.
   b. La ecuación de la recta que une los puntos de intersección de los círculos.
   c. La ecuación de la recta que une los centros de los círculos.
   d. ¿Cómo son las dos rectas que encontraste?
   e. Demuestra que la recta que pasa por los centros de los círculos es mediatriz del segmento que une los puntos donde se cortan los dos círculos.

6. Halla o responde lo siguiente:
   a. Los puntos de intersección de los círculos cuyas ecuaciones son $x^2+y^2-4x-8y-41=0$ y $x^2+y^2-40x-8y+247=0$.
   b. La ecuación de la recta que une los puntos de intersección de los círculos.
   c. La ecuación de la recta que une los centros de los círculos.
   d. ¿Cómo son las dos rectas que encontraste?
   e. Demuestra que la recta que pasa por los centros de los círculos es mediatriz del segmento que une los puntos donde se cortan los dos círculos.

7. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A(1, 3)$ y $B(-2, 4)$ sea igual a 20.

8. Dados los puntos $P(-3, 5)$, $Q(-1, 9)$ y $R(7, 5)$, encuentra el punto medio de PQ y de QR. Traza la perpendicular que pasa por el punto medio de cada segmento; después, encuentra el punto de intersección de las perpendiculares. Por último, encuentra la ecuación del círculo con centro en el punto de intersección de las perpendiculares cuyo radio es la distancia de dicho punto al punto R. ¿Los puntos P y Q están en ese círculo?

9. Halla la ecuación del círculo que pasa por los puntos $P(1, -4)$, $Q(5, 4)$ y $R(10, -11)$.

10. Encuentra la ecuación del círculo que es tangente a la recta $x + 2y - 10 = 0$ en el punto $P(-4, 7)$ y cuyo centro está en la recta $x + 3y - 3 = 0$.

11. Di si la recta $7x - 9y + 25 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 + 18x - 6y + 25 = 0$ se cortan. De ser así, proporciona las coordenadas de los puntos de intersección.

12. Si los lados de un triángulo están sobre las rectas $x + 3y - 5 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ y $x + y + 1 = 0$, encuentra la ecuación del círculo circunscrito en el triángulo.

13. Grafica la región que se encuentra dentro del círculo con centro en $(-3, 3)$ y radio 4, debajo de la recta que pasa por los puntos $P(-2, 4)$ y $Q(6, 0)$ debajo de la recta con pendiente $\frac{7}{5}$ que corta el eje Y en $\frac{43}{5}$ y arriba de la recta $x - 5y + 6 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.

14. Grafica la región que se encuentra fuera del círculo $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ dentro del círculo con centro en $C(-2, -4)$ y radio 4 y arriba de la recta $x + y + 9 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.

15. Encuentra la ecuación de la recta tangente al círculo con centro en $C(2, -1)$ y radio 5 en el punto $P(6, -4)$.

16. Halla, si los hay, los puntos donde se cortan la recta $x + y - 1 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$.

17. Las rectas $x - 7y + 35 = 0$, $7x + y - 5 = 0$, $7x + y - 55 = 0$ y $x - 7y - 15 = 0$ determinan un cuadrado. Encuentra la ecuación del círculo circunscrito en él.

18. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes al círculo $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 80 = 0$ en los puntos $P(4, -8)$ y $Q(2, 6)$. Después, encuentra el punto donde se cortan dichas tangentes.

19. Describe y grafica la región que satisface las siguientes desigualdades:
$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 31 < 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 5 > 0$,
$x^2 + y^2 + 6x - 12y + 20 > 0$ y $x - y + 10 > 0$.

Autoevaluación

1. Encuentra la ecuación del círculo con centro en el origen y radio 6.
   a. $x + y = 6$.
   b. $x^2 + y^2 = 36$.
   c. $x^2 + y^2 = 6$.
   d. $x^2 + y^2 + 36 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 149.

2. Halla la ecuación del círculo con centro en $(4, -2)$ y radio 3.
   a. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 29 = 0$.
   b. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$.
   c. $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$.
   d. $x^2 + y^2 - 9 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 155.

3. Encuentra el radio del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$.
   a. 16.
   b. –4.
   c. $\sqrt{6}$.
   d. 4.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 154.

4. Encuentra el centro del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 54 = 0$.
   a. $(-8, 3)$
   b. $(-2, 6)$
   c. $(1, -3)$
   d. $(2, -6)$
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 154.

5. Encuentra la ecuación del círculo con centro en $(6, -1)$ y que pasa por $(9, 3)$.
   a. $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 32 = 0$.
   b. $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$.
   c. $x^2 + y^2 - 18x - 6y + 65 = 0$.
   d. $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 62 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 155.

6. Halla la ecuación del círculo que pasa por los puntos $A(4, 0)$, $B(5, -3)$ y $C(8, 0)$.
   a. $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 32 = 0$.
   b. $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 32 = 0$.
   c. $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 32 = 0$.
   d. $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 32 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 182.

7. Encuentra las intersecciones de la recta $y = 2x - 18$ y el círculo con centro en $(7, -4)$ y radio $\sqrt{20}$.
   a. $(9, -8)$ y $(5, 0)$.
   b. $(0, 9)$ y $(-8, 5)$.
   c. $(9, 0)$ y $(5, -8)$.
   d. $(9, 5)$ y $(0, -8)$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 163.

8. Encuentra el eje radical de los círculos
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9 \text{ y}$$
$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0.$$
   a. $2x - 6y - 1 = 0$.
   b. $-4x - 12y + 2 = 0$.
   c. $2x^2 + 2y^2 = 0$.
   d. $12y + 2 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 178.

Heteroevaluación

1. Encuentra la ecuación del círculo con centro en $(-7, 1)$ y radio $\sqrt{2}$.

2. Halla el centro y el radio del círculo con ecuación $x^2 + y^2 - 12x + 10y + 58 = 0$.

3. Encuentra la ecuación del círculo con centro en $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y que pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

4. Encuentra las intersecciones de la recta $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$ y el círculo con ecuación $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 7 = 0$.

5. Halla el eje radical de los círculos $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 9$ y el que tiene centro en $C(3, -3)$ y radio 4.

6. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes al círculo $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ desde el punto exterior $Q\left(\frac{19}{3}, 3\right)$.

Trayectoria parabólica del agua en una fuente.

Unidad 5

La parábola

Con esta unidad iniciamos el estudio sistemático de las cónicas. Aquí presentamos la parábola como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta y un punto fijos, donde el punto no pertenece a la recta. A esta recta se le conoce como la *directriz* y al punto como el *foco*.

La ecuación de este tipo de curva se obtiene por medio de las fórmulas de distancia de un punto a una recta y distancia entre dos puntos.

Gran parte de los ejemplos y ejercicios que presentamos en los primeros apartados de esta unidad tratan sobre la determinación de la ecuación de la parábola a partir de sus elementos característicos o de algunos de ellos, o bien de encontrar todos esos elementos a partir de la propia ecuación de la parábola.

Podemos trazar parábolas mediante una regla y un compás o con ayuda de otros instrumentos como escuadra o hilo y clavo, o bien con papel encerado. Estas técnicas se describen aquí.

Conociendo las propiedades de la parábola podemos resolver problemas del mundo real. Un ejemplo es la propiedad de reflexión, la cual consiste en que cuando una onda viaja paralela al eje de la parábola y choca con esta, se refleja hacia el foco y, de manera inversa, si del foco emana una onda, cuando esta choca con la parábola, se refleja paralelamente al eje. Esta propiedad es demostrada una vez que se caracteriza cuál es la recta tangente a la parábola en un punto dado.

Gracias a esta propiedad se construyen faros, antenas y espejos con forma de paraboloide. Por ejemplo, estamos muy acostumbrados a oír de las antenas parabólicas.

En otro apartado, también veremos que la trayectoria que describe un proyectil es una parábola; asimismo, mostraremos que en un puente colgante hay cables que toman la forma parabólica debido al peso que soportan. En caso de que este peso desapareciera, los cables tomarían la forma de una catenaria.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

La parábola

- Definición de la parábola
- Las parábolas con vértice en el origen
  - Parábolas verticales
  - Parábolas horizontales
- Construcción de la parábola
  - Sugerencias para trazar una parábola conociendo su ecuación
  - Construcción de la parábola con el uso de instrumentos
- Ecuaciones estándar y general de la parábola
- Algunas aplicaciones de la parábola
  - Antenas parabólicas
  - Puentes colgantes
  - Tiro parabólico
  - Arquitectura
- Las funciones cuadráticas y las parábolas
- Desigualdades y la parábola
- La recta tangente a la parábola
- Ecuaciones paramétricas de la parábola
- Resolución de problemas
  - Lugares geométricos

Definición de la parábola

Horno solar de Odeillo.

El horno solar de Odeillo se encuentra en un centro de investigación francés localizado en los Pirineos Orientales. Es uno de los más grandes del mundo y puede alcanzar temperaturas mayores a los 3 400 °C. Es un paraboloide formado por espejos.

Encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $F(0,1)$ y la recta ℓ cuya ecuación es $y=-1$.

Solución:
Llamemos $P(x,y)$ a un punto de dicho lugar geométrico.

Debemos igualar la distancia de P a F con la distancia de P a ℓ:

$$d(P,F)=d(P,\ell).$$

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1) y la de la distancia de un punto a una recta (2.19), es decir,

$$\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Al sustituir los valores proporcionados obtenemos:

$$\sqrt{\left(x-0\right)^2+\left(y-1\right)^2}=|y+1|.$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(x-0\right)^2+\left(y-1\right)^2=\left(y+1\right)^2,$$

y simplificamos:

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2y+1&=y^2+2y+1\\ x^2&=4y. \end{aligned}$$

El lugar geométrico buscado es el conjunto de puntos del plano que satisfacen la ecuación $x^2=4y$ (figura 5.1).

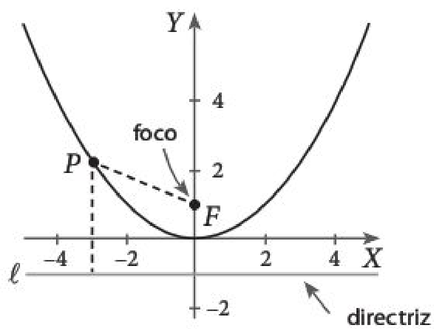


Figura 5.1

La parábola está formada por todos los puntos del plano que equidistan de una recta (directriz) y un punto (foco) fuera de la directriz. Su ecuación se obtiene igualando las distancias de un punto genérico (x,y) a la directriz y foco dados.

La recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz es llamada el *eje de simetría* de la parábola. El punto medio del segmento determinado por F y el punto D donde dicho eje corta la directriz es llamado el *vértice* de la parábola, usualmente denotado por V.

Las distancias del vértice al foco y del vértice a la directriz son iguales. Esa distancia común se acostumbra denotar con p y es, por supuesto, positiva. El número $4p$ es llamado el *ancho focal* de la parábola. Mientras p es más grande, la parábola es más abierta.

Una *parábola* es el conjunto de puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no está en dicha recta. La recta fija se llama la *directriz* de la parábola y el punto fijo se llama el *foco*. En el ejemplo anterior, la recta $y=-1$ es la directriz de la parábola y $F(0,1)$ es su foco.

Las parábolas con vértice en el origen

Parábolas verticales

De modo más general, consideremos una parábola que tiene su foco en el eje Y, digamos en el punto $F(0,p)$, donde $p>0$, cuya directriz es una recta horizontal ℓ con ecuación $y=-p$ (figura 5.2).

Para que un punto $P(x,y)$ pertenezca a esa parábola, debe satisfacer:

$$\boxed{d(P,F)=d(P,\ell)} \tag{5.1}$$

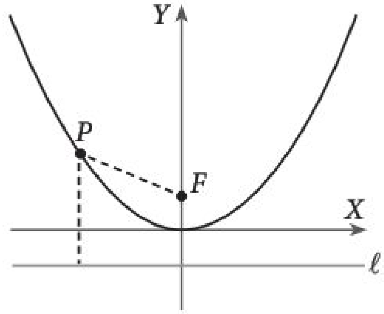


Figura 5.2

Sustituyendo las coordenadas de P y F, así como la ecuación de ℓ en las fórmulas para calcular la distancia entre dos puntos (1.1) y la distancia entre un punto y una recta (2.19), obtenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\frac{|y+p|}{\sqrt{1^2}}.$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

y simplificamos, obtenemos la ecuación de la parábola:

$$\boxed{x^2=4py.} \tag{5.2}$$

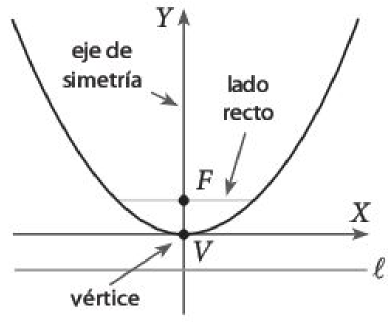


Figura 5.3

Ahora veamos algunos otros elementos característicos de la parábola. En la figura 5.3 observamos que la parábola pasa por el punto medio localizado entre el foco y el pie de la perpendicular que baja del foco a la directriz. Ese punto medio se llama el *vértice*, y dista p unidades tanto del foco como de la directriz.

La recta que une el vértice y el foco, que en este caso es el eje Y, es llamada el *eje de simetría* de la parábola, ya que si $P(x,y)$ está en la parábola, entonces su simétrico respecto a dicho eje, que en este caso es $P'(-x,y)$, también lo está, pues,

$$(-x)^2=x^2=4py.$$

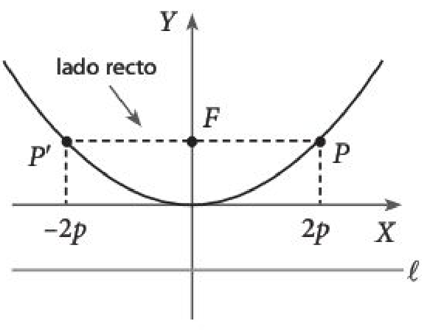


Figura 5.4

Un segmento de recta que une dos puntos de una parábola se conoce como *cuerda* de la parábola. La cuerda que pasa por el foco y es paralela a la directriz, y por tanto es perpendicular al eje de simetría, se llama *lado recto* y su longitud $4p$ es el *ancho focal* de la parábola (figura 5.4).

Comprobaremos que el ancho focal para la parábola $x^2 = 4py$ es $4p$.

Si P es el punto del semiplano derecho que está en la parábola y en el lado recto, entonces sus coordenadas son (x, p) y satisfacen la ecuación (5.2).

Así,

$$x^2 = 4pp = 4p^2.$$

Simplificando la ecuación tenemos:

$$x = 2p,$$

así que P tiene coordenadas $(2p, p)$. Por la simetría de la parábola, el punto P' tiene coordenadas $(-2p, p)$, de modo que el ancho focal es igual a la distancia entre P y P', es decir, $4p$.

La longitud del lado recto o ancho focal es igual a $4p$*; es decir,* 4 *veces la distancia del foco al vértice.*

Esta longitud nos dice qué tan abierta o cerrada es la parábola (figura 5.4).

En resumen, los elementos de la parábola son:

- El vértice.
- El foco.
- La directriz.
- La distancia p entre el foco y el vértice.
- El eje de simetría.
- El ancho focal $4p$.

Si el eje de simetría de una parábola es paralelo al eje Y, entonces es una *parábola vertical*. Se dice que abre hacia arriba o hacia abajo según se extienda indefinidamente hacia arriba o hacia abajo. Lo primero ocurre cuando el foco F está arriba del vértice V. El otro caso se tiene cuando F está debajo de V.

Ahora veamos el caso en que el vértice de la parábola está en el origen, el foco se encuentra en la parte negativa del eje Y y la directriz es paralela al eje X y corta al eje Y en su parte positiva (figura 5.5).

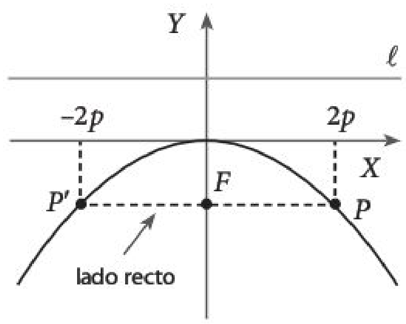


Figura 5.5

La ecuación de una parábola vertical con vértice en el origen es

$$x^2 = 4py$$

si abre hacia arriba, o bien

$$x^2 = -4py$$

si abre hacia abajo. Nótese el signo que precede a $4p$.

El foco es $F(0, -p)$ y la directriz es $y = p$. Si sustituimos estos valores en la ecuación de la parábola (5.1), ahora obtenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = \frac{|y-p|}{\sqrt{1^2}};$$

si elevamos al cuadrado y simplificamos la expresión, llegamos a:

$$\boxed{x^2 = -4py.} \tag{5.3}$$

Observemos entonces que el signo del coeficiente de y nos dice hacia dónde abre la parábola; si es positivo, se abre hacia arriba; si es negativo, hacia abajo.

Parábolas horizontales

Para continuar con el estudio de la parábola, consideremos aquellas con vértice en el origen, pero ahora con el foco situado sobre el eje X.

Si el foco es $F(p,0)$ con $p>0$ y la directriz es $x=-p$, al sustituir estos valores en (5.1) obtenemos la ecuación:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \frac{|x+p|}{\sqrt{1^2}},$$

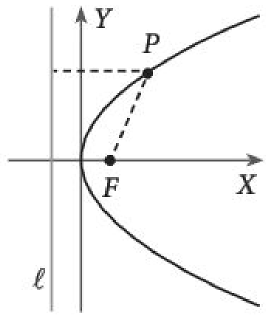


Figura 5.6

que al simplificarla se transforma en (figura 5.6):

$$\boxed{y^2 = 4px.} \tag{5.4}$$

Por último, si el foco es $F(-p,0)$ con $p>0$ y la directriz es $x=p$, y seguimos el procedimiento anterior, obtenemos (figura 5.7):

$$\boxed{y^2 = -4px} \tag{5.5}$$

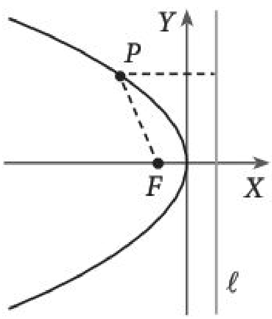


Figura 5.7

En la tabla siguiente resumimos los casos de la parábola con vértice en el origen y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos:

Posición	Abre hacia	Ecuación	Directriz	Vértice	Foco
Vertical	arriba	$x^2=4py$	$y=-p$	$V(0,0)$	$F(0,p)$
Vertical	abajo	$x^2=-4py$	$y=p$	$V(0,0)$	$F(0,-p)$
Horizontal	la derecha	$y^2=4px$	$x=-p$	$V(0,0)$	$F(p,0)$
Horizontal	la izquierda	$y^2=-4px$	$x=p$	$V(0,0)$	$F(-p,0)$

Observa que la parábola abre en dirección contraria a la directriz.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuya directriz es la recta con ecuación $y = -\frac{5}{2}$.

Solución:
Para tener toda la información que necesitamos sobre la parábola debemos completar el siguiente cuadro:

p	Directriz	Foco	Vértice	Eje de simetría	Horizontal o vertical	Abre hacia
	$y = -\frac{5}{2}$		$(0,0)$			

Como la directriz es una recta horizontal y el vértice es $(0,0)$, entonces el eje de simetría es el eje Y y la parábola es vertical. Además, la directriz está por debajo del eje X.

Entonces la ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py.$$

Puesto que p es la distancia de la directriz al vértice, en este caso $p = \frac{5}{2}$, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)y,$$

es decir (figura 5.8),

$$x^2 = 10y.$$

p	Directriz	Foco	Vértice	Eje de simetría	Horizontal o vertical	Abre hacia
$\frac{5}{2}$	$y = -\frac{5}{2}$	$\left(0, \frac{5}{2}\right)$	$(0,0)$	$x = 0$	vertical	arriba

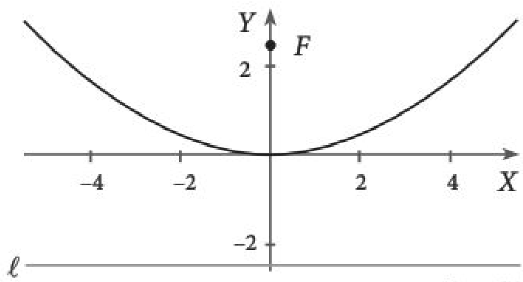


Figura 5.8

2. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice se encuentra en el origen y cuyo eje de simetría es paralelo a uno de los ejes y pasa por el punto $P(3,-2)$.

Solución:
De acuerdo con el enunciado, la parábola puede ser horizontal o vertical. Analizaremos los dos casos:

- Si la parábola es horizontal, como el vértice está en el origen y el punto $P(3,-2)$ tiene abscisa positiva, entonces abre a la derecha y su ecuación es de la forma:

$$y^2 = 4px.$$

Como P está en la parábola, debe satisfacer la ecuación anterior; así, al sustituir sus coordenadas podemos despejar p para encontrar su valor:

$$(-2)^2 = 4p(3)$$
$$\frac{4}{12} = p.$$

La ecuación de la parábola es (figura 5.9):

$$y^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)x.$$

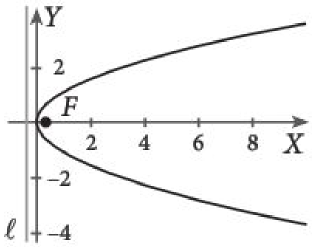


Figura 5.9

- Si la parábola es vertical, como el vértice está en el origen y el punto $P(3,-2)$ tiene ordenada negativa, entonces abre hacia abajo y su ecuación es de la forma:

$$x^2 = -4py$$

Como P está en la parábola, debe satisfacer la ecuación anterior; así, al sustituir sus coordenadas podemos despejar p para encontrar su valor:

$$3^2 = -4p(-2)$$
$$\frac{9}{8} = p.$$

La ecuación de la parábola (figura 5.10) es:

$$x^2 = -4\left(\frac{9}{8}\right)y = -\frac{9}{2}y.$$

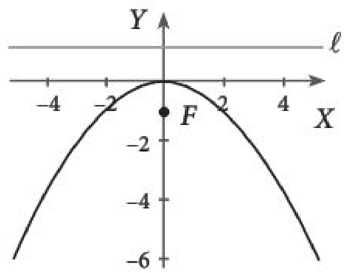


Figura 5.10

Si el eje de simetría de una parábola es paralelo al eje X, entonces es una parábola horizontal. Se dice que abre a la derecha o a la izquierda según se extienda indefinidamente a la derecha o a la izquierda. Lo primero ocurre si el foco F está a la derecha del vértice V. El segundo caso se tiene cuando F está a la izquierda de V.

Ejemplos

3. Encontrar la ecuación de la parábola horizontal que abre hacia la izquierda con vértice en el origen y cuyo lado recto mide 7 unidades.

Solución:
La parábola es de la forma:

$$y^2 = -4px.$$

Como el lado recto mide 7 unidades, tenemos que:

$$4p = 7;$$

sustituyendo el valor de p en la ecuación anterior, obtenemos (figura 5.11):

$$y^2 = -7x.$$

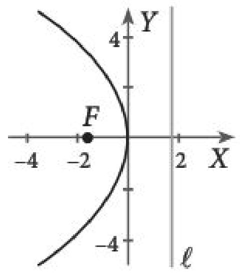


Figura 5.11

La ecuación de una parábola horizontal con vértice en el origen es $y^2 = 4px$ si abre a la derecha, o bien $y^2 = -4px$ si abre a la izquierda. Nótese el signo que precede a $4p$ y el cambio de papeles de x y y, respecto a las ecuaciones de las parábolas verticales.

Ejercicios

Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas.

1. $y^2 = 8x$.
2. $x^2 = -12y$.
3. $x^2 = -y$.
4. $y^2 = 4x$.
5. $y^2 + 2x = 0$.
6. $3x^2 - 20y = 0$.
7. $x^2 + 6y = 0$.
8. $y^2 - 24x = 0$.
9. $x^2 = 7y$.

En cada caso, halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen y con:

10. Directriz $x + \frac{2}{3} = 0$.
11. Foco en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
12. Directriz $x = \frac{4}{5}$.
13. Foco en $(4,0)$.
14. Foco en $(0,-5)$.
15. Directriz $x = 5$.
16. Directriz $y = 3$.
17. Directriz $y = -2$.
18. Foco en $(0,2)$.

19. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen si el foco está sobre el eje Y y la parábola pasa por el punto $P(2,3)$.
20. Da con la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen, que abre hacia abajo, cuyo lado recto mide 12.
21. Utiliza los mismos ejes coordenados para graficar las parábolas $y^2 = 4px$ con $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.
22. Usa los mismos ejes coordenados para graficar las parábolas $x^2 = -4py$ con $p = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.
23. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen cuyo eje es el eje X y pasa por el punto $P(-6,2)$.
24. Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que pasa por el punto $P(-3,5)$.

Ejercicios

25. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen cuyo lado recto es el diámetro vertical del círculo con ecuación $x^2 + y^2 - 5x - \frac{75}{4} = 0$.

26. Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen que pasa por el punto de intersección de la recta $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5} - \frac{15}{2}$ y el círculo con centro en $C(-2, -3)$ y radio $r = 3$.

27. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por el punto $P(0,2)$, por el vértice, y el foco de la parábola $y^2 = 6x$.

Construcción de la parábola

Podemos trazar parábolas mediante una regla y un compás, o bien con ayuda de otros instrumentos como escuadra, hilo y clavo o papel encerado. Estas técnicas se describen a continuación.

Sugerencias para trazar una parábola conociendo su ecuación

1. Localiza el vértice V. (Hasta este momento, únicamente hemos visto parábolas con vértice en el origen, pero más adelante veremos el caso general.)
2. Determina el valor de p, es decir, la distancia del vértice al foco.
3. Establece si la parábola es horizontal o vertical, de acuerdo con la variable que esté elevada al cuadrado.
4. Determina hacia qué lado abre la parábola de acuerdo con el coeficiente de $4p$.
5. Localiza el foco F que se encuentra a p unidades hacia arriba, abajo, la derecha o la izquierda del vértice, de acuerdo con la dirección hacia donde abre la parábola.
6. Dibuja el eje de la parábola, que es la recta que une el vértice y el foco.
7. Traza la recta que contiene el lado recto, la cual es la recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría.
8. Sobre esta recta, localiza los extremos del lado recto, los cuales se encuentran a $2p$ unidades del foco.
9. Localiza algunos otros puntos de la parábola asignando valores a la variable que se encuentra elevada al cuadrado y encuentra los valores correspondientes de la otra variable.

Ejemplos

1. Trazar la parábola $x^2 = -24y$.

Solución:

- El vértice es el origen $(0,0)$.
- Si factorizamos un 4 en el lado derecho de la ecuación, obtenemos $x^2 = -4(6)y$; así que $p = 6$.
- La parábola es vertical debido a que la variable elevada al cuadrado es x.
- La parábola abre hacia abajo, ya que el signo que precede a $4p = 24$ es negativo. El ancho focal es 24.

- El foco F está 6 unidades abajo del vértice; por tanto, $F(0,-6)$.
- El eje Y es el eje de la parábola.
- La recta horizontal que pasa por F contiene el lado recto.
- Los extremos del lado recto son $(-12,-6)$ y $(12,-6)$.
- Localizamos algunos otros puntos de la parábola. Para ello, despejamos y y damos varios valores de x (figura 5.12):

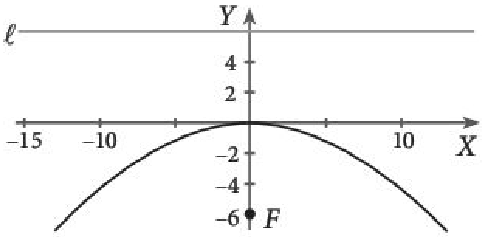


Figura 5.12

$$y=-\frac{x^2}{24}.$$

x	−10	−5	−1	0	1	5	10
y	−4.17	−1.04	−0.04	0	−0.04	−1.04	−4.17

2. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(-5,0)$ y cuya directriz es $x=5$.

Solución:
La directriz de la parábola es la recta vertical $x=5$, entonces la parábola es horizontal. La parábola tiene el vértice en el origen (porque este equidista del foco y de la directriz). La distancia del foco al vértice es $p=5$. Como el foco está a la izquierda del vértice y la directriz está a la derecha, la parábola abre hacia la izquierda, así que su ecuación es de la forma:

$$y^2=-4px,$$

de donde (figura 5.13):

$$y^2=-20x.$$

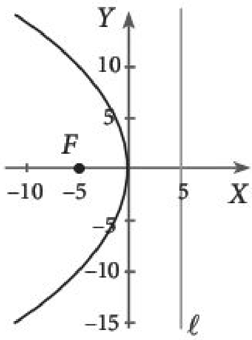


Figura 5.13

Los elementos de la parábola son el vértice, el foco, la directriz, el eje de simetría y el ancho focal $4p$. A partir de algunos de ellos se pueden conocer los otros.

3. Encontrar la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen, que abre hacia la derecha y pasa por el punto $Q(5,8)$.

Solución:
Los datos del problema nos indican que la ecuación es de la forma:

$$y^2=4px.$$

Sólo nos falta determinar el valor de p; para ello, sustituimos el punto $Q(5,8)$ en la ecuación de la parábola y despejamos p:

$$8^2=4p(5)$$
$$p=\frac{16}{5}.$$

Ejemplos

Así, la ecuación de la parábola (figura 5.14) es:

$$y^2 = 4\left(\frac{16}{5}\right)x$$
$$= \frac{64}{5}x.$$

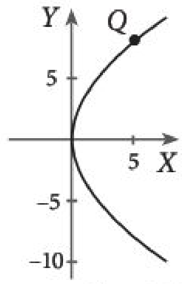


Figura 5.14

Si conocemos el vértice V y el foco F de una parábola podemos determinar:

- El eje de simetría: la recta que une V y F.
- La directriz: la recta ortogonal al eje de simetría que pasa por D, donde D está en el eje de simetría y es simétrico a F respecto al punto V.
- El ancho focal $4p = 4$ veces la distancia VF.

Construcción de la parábola con el uso de instrumentos

Aunque la parábola no se puede dibujar con un solo trazo por medio de una regla y un compás, estos instrumentos nos pueden ser útiles para localizar muchos de sus puntos.

Construcción con regla y compás

Supongamos que conocemos la directriz ℓ de la parábola y su foco F (figura 5.15).

1. Trazamos el eje $\overline{MF}$ de la parábola, el cual es la recta perpendicular a la directriz ℓ que pasa por el foco F.
2. Localizamos el vértice V de la parábola, que es el punto medio del segmento $\overline{MF}$.
3. Para cualquier punto M_1 localizado a la derecha de V sobre el eje de la parábola, trazamos una recta $\overline{AA'}$ perpendicular al eje $\overline{MF}$. Todos los puntos de $\overline{AA'}$ distan $\overline{MM_1}$ de ℓ.
4. Trazamos arcos con centro en F y radio $\overline{MM_1}$ que corten $\overline{AA'}$ en P_1 y Q_1.
5. Los puntos P_1, Q_1 pertenecen a la parábola, ya que las distancias de P_1 y Q_1 a la directriz son iguales a $\overline{MM_1}$ que, por construcción, es igual a las distancias de P_1 y Q_1 al foco F.

De esta manera, al variar el punto M_1 podemos localizar tantos puntos de la parábola como deseemos y trazarla de modo tan preciso como queramos (figura 5.16).

Pensamiento crítico

¿Cuál es el mínimo número de elementos que debemos conocer de una parábola para determinar todos?

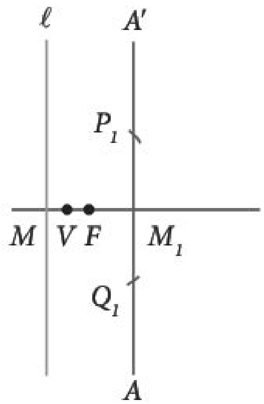


Figura 5.15

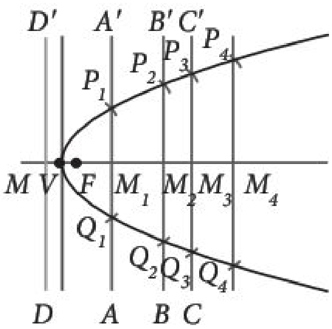


Figura 5.16

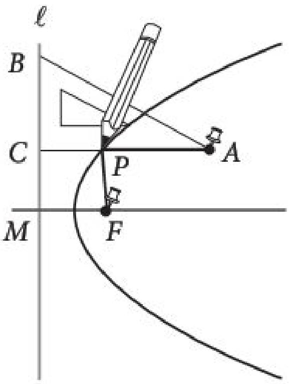


Figura 5.17

Construcción con hilo y escuadra

Supongamos que conocemos la directriz ℓ de la parábola y su foco F (figura 5.17).

1. Trazamos el eje $\overline{MF}$ de la parábola, el cual es la recta perpendicular a la directriz ℓ que pasa por el foco F.
2. Colocamos una escuadra con un cateto $\overline{CB}$ en la directriz.
3. Sujetamos un extremo de un hilo de longitud $\overline{CA}$ en el extremo A de la escuadra y el otro extremo en F.
4. Con un lápiz en P, mantenemos estirado el hilo y movemos la escuadra sobre la directriz. Entonces $FP = PC$ y, por tanto, P describe una parábola.

Construcción con papel doblado

Utilizamos una hoja rectangular de papel encerado.

1. Marcamos un punto F cerca de un lado, aproximadamente a la mitad de la hoja (figura 5.18).
2. Doblamos el papel de manera que un punto del lado inferior caiga sobre el punto F (figura 5.19).
3. Marcamos el doblez y desdoblamos (figura 5.20).
4. Seguimos haciendo dobleces de manera que los puntos del lado inferior caigan sobre F.

La ecuación estándar de una parábola vertical con vértice en el punto $V(h,k)$ es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

si abre hacia arriba, o

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

si abre hacia abajo. Nótese el signo que antecede a $4p$.

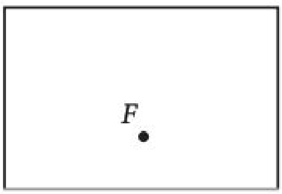


Figura 5.18

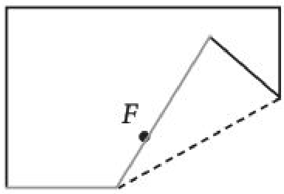


Figura 5.19

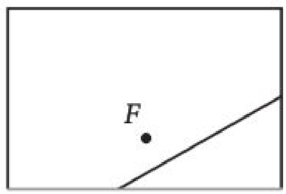


Figura 5.20

Si hacemos suficientes dobleces, nos daremos cuenta de que aparece una curva en forma de parábola. De hecho, cada doblez es tangente a la curva (figura 5.21).

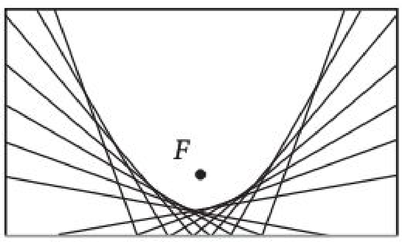


Figura 5.21

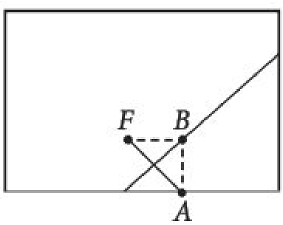


Figura 5.22

La figura 5.22 muestra que si doblamos la hoja de manera que el punto A del lado inferior coincida con F, la distancia de cada punto del doblez a F y a A es la misma, ya que el doblez determina la mediatriz del segmento $\overline{FA}$. En particular, el punto B, que es la intersección del doblez con la perpendicular al lado levantada en A, dista lo mismo de F y del lado, por lo que B está en la parábola que tiene por foco a F y directriz al lado inferior del rectángulo.

Sugerimos que con Geolab, abras la construcción *Parabolaenvuelve* y observes esta misma construcción.

Ecuaciones estándar y general de la parábola

Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3,4)$ y cuyo foco es $F(3,6)$.

Solución:
Como el vértice no está en el origen, no podemos utilizar directamente las fórmulas de parábolas con vértice en el origen, pero veremos que sí las podremos usar si primero hacemos un cambio de coordenadas trasladando el origen del sistema al vértice de la parábola, como lo hicimos en la unidad anterior. Utilizamos las fórmulas de traslación (3.3):

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k,$$

donde (h,k) son en este caso las coordenadas del vértice $V(3,4)$.

Así,

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - 3 \\ y' &= y - 4. \end{aligned}} \tag{5.6}$$

El vértice está en el origen O' del nuevo sistema de coordenadas, es decir, ahí sus coordenadas son $(0,0)$. Al sustituir las coordenadas de $F(3,6)$ en (5.6), obtenemos:

$$x' = 3 - 3 = 0$$
$$y' = 6 - 4 = 2,$$

así que las nuevas coordenadas de F son $(0,2)$ y, por tanto, está en el nuevo eje Y'.

Como el foco $(0,2)$ se encuentra arriba del vértice $(0,0)$, la parábola abre hacia arriba. La distancia entre el vértice y el foco es $p = 2$, así que la ecuación de la directriz es $y' = 2$.

Ahora sí podemos utilizar las fórmulas de (5.2). Como la parábola abre hacia arriba, su ecuación es:

$$(x')^2 = 4py'$$
$$(x')^2 = 8y'.$$

Para expresar esta ecuación en términos de x y y, sustituimos x' y y' de acuerdo con (5.6) y obtenemos:

$$(x-3)^2 = 8(y-4),$$

es decir (figura 5.23),

$$x^2 - 6x - 8y + 41 = 0.$$

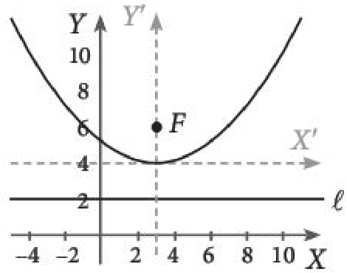


Figura 5.23

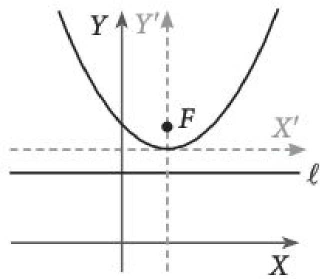


Figura 5.24

En general, cuando sabemos hacia dónde abre una parábola —horizontal o vertical— y la distancia p entre el vértice y el foco y las coordenadas (h,k) del vértice, entonces podemos concluir de manera similar al caso anterior que su ecuación es alguna de las siguientes:

1. $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ si la parábola es vertical y abre hacia arriba (figura 5.24).

2. $(x-h)^2=-4p(y-k)$ si la parábola es vertical y abre hacia abajo (figura 5.25).
3. $(y-k)^2=4p(x-h)$ si la parábola es horizontal y abre hacia la derecha (figura 5.26).
4. $(y-k)^2=-4p(x-h)$ si la parábola es horizontal y abre hacia la izquierda (figura 5.27).

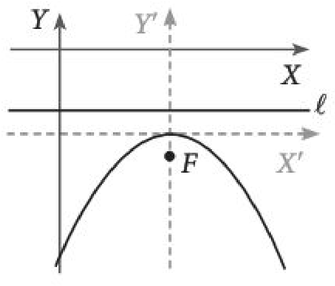


Figura 5.25

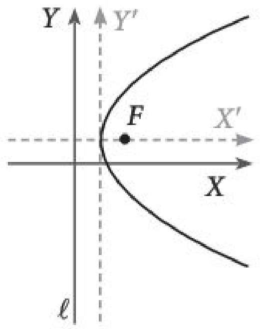


Figura 5.26

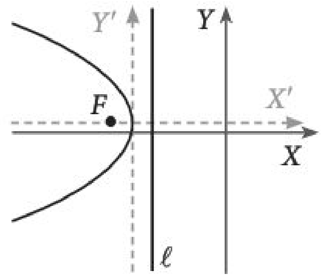


Figura 5.27

La ecuación estándar de una parábola horizontal con vértice en el punto $V(h,k)$ es: $(y-k)^2=4p(x-h)$, si abre a la derecha, o $(y-k)^2=-4p(x-h)$, si abre a la izquierda. Nótese el signo que antecede a $4p$ y el cambio de papeles de x y y y de h y k respecto a las ecuaciones de las parábolas verticales.

Cualquiera de estas ecuaciones se conoce como la *forma estándar* de la ecuación de la parábola.

Consideremos la forma correspondiente a una parábola horizontal que abre hacia la derecha:

$$(y-k)^2=4p(x-h),\ \text{con } p>0.$$

Al desarrollar el término que está al cuadrado, obtenemos:

$$y^2-2yk+k^2=4px-4ph$$
$$y^2-2yk+k^2-4px+4ph=0$$
$$y^2-4px-2ky+k^2+4ph=0.$$

Si hacemos $D=-4p, E=-2k$ y $F=k^2+4ph$ la ecuación toma la forma:

$$\boxed{y^2+Dx+Ey+F=0.} \tag{5.7}$$

Si partimos de la ecuación estándar de las parábolas horizontales que abren hacia la izquierda, llegamos a una ecuación del mismo tipo.

La ecuación (5.7) es llamada la *forma general de la ecuación de las parábolas horizontales*.

Si hacemos lo anterior a partir de la ecuación estándar de las parábolas verticales que abren hacia arriba:

$$(x-h)^2=4p(y-k),$$

o hacia abajo:

$$(x-h)^2=-4p(y-k),$$

obtenemos una ecuación de la forma:

$$\boxed{x^2 + Dx + Ey + F = 0,} \tag{5.8}$$

la cual es llamada *forma general de la ecuación de las parábolas verticales*.

Estas formas son casos particulares de la ecuación general de segundo grado que estudiaremos en la unidad 8.

Si nos dan la ecuación de una parábola horizontal o vertical en su forma general, podemos llevarla a la forma estándar. Por ejemplo, consideremos el caso de una parábola vertical:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Completamos el cuadrado en la variable x y despejamos el binomio cuadrado obtenido:

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + Ey + F - \left(\frac{D}{2}\right)^2 &= 0 \\ \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 &= -Ey + \frac{D^2 - 4F}{4}. \end{aligned}} \tag{5.9}$$

Si $E \neq 0$, entonces al factorizar E obtenemos:

$$\boxed{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 = -E\left(y - \left(\frac{D^2 - 4F}{4E}\right)\right).} \tag{5.10}$$

Si $E > 0$, entonces esta es la ecuación estándar de una parábola vertical que abre hacia abajo, con vértice $V\left(-\frac{D}{2}, \frac{D^2-4F}{4E}\right)$ y $4p = E$.

Si $E < 0$, entonces la ecuación (5.9) es la estándar de una parábola vertical que abre hacia arriba, con vértice $V\left(-\frac{D}{2}, \frac{D^2-4F}{4E}\right)$ y $4p = -E$.

Si $E = 0$, entonces debemos detenernos en la ecuación (5.8) la que se reduce a:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 = \frac{D^2 - 4F}{4},$$

que representa una parábola vertical degenerada:

1. Vacío, si $\dfrac{D^2 - 4F}{4} < 0.$
2. Dos rectas verticales, si $\dfrac{D^2 - 4F}{4} > 0$.
3. Una recta vertical, si $\dfrac{D^2 - 4F}{4} = 0$.

En resumen:

Posición	Abre hacia	Ecuación	Directriz	Vértice	Foco
Vertical	arriba	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$y = k - p$	$V(h,k)$	$F(h,k+p)$.
Vertical	abajo	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	$y = k + p$	$V(h,k)$	$F(h,k-p)$.
Horizontal	la derecha	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$x = h - p$	$V(h,k)$	$F(h+p,k)$.
Horizontal	la izquierda	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	$x = h + p$	$V(h,k)$	$F(h-p,k)$.

En el caso de la ecuación general:

Posición	Ecuación general
Horizontal	$y^2 + Dx + Ey + F = 0$
Vertical	$x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $V(5,-2)$ y cuyo foco está en $F(5,-4)$.

Solución:
Para tener toda la información que necesitamos sobre la parábola debemos completar el siguiente cuadro:

p	Directriz	Foco	Vértice	Eje de simetría	Horizontal o vertical	Abre hacia
		$F(5,-4)$	$V(5,-2)$			

La parábola es vertical, pues su eje de simetría es la recta $x = 5$. Como el foco está debajo del vértice, la parábola abre hacia abajo, la distancia del vértice al foco es $p = 2$ y, por tanto, su ecuación es:

$$(x-5)^2 = -4(2)(y-(-2));$$

es decir,

$$(x-5)^2 = -8(y+2).$$

Si queremos obtener la forma general, efectuamos las operaciones y pasamos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$x^2 - 10x + 8y + 41 = 0.$$

p	Directriz	Foco	Vértice	Eje de simetría	Horizontal o vertical	Abre hacia
2	$y = 0$	$F(5,-4)$	$V(5,-2)$	$x = 5$	vertical	abajo

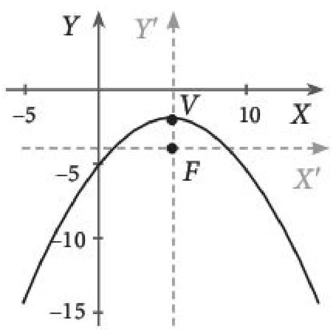


Figura 5.28

2. Encontrar los elementos de la parábola $12x - y^2 + 10y - 61 = 0$.

Solución:
Como la variable que está al cuadrado es y, la parábola es horizontal; pasemos todos los términos en y a un lado de la ecuación y los demás al otro:

$$y^2 - 10y = 12x - 61.$$

En el primer miembro completamos el trinomio cuadrado perfecto y sumamos el mismo término del otro lado de la ecuación para no alterar la igualdad:

$$y^2 - 10y + 25 = 12x - 61 + 25$$
$$(y-5)^2 = 12x - 36$$
$$(y-5)^2 = 12(x-3).$$

El vértice es $V(3,5)$. El ancho focal es:

$$4p = 12,$$

y la distancia del vértice al foco es:

$$p = \frac{12}{4} = 3.$$

La parábola abre hacia la derecha, así que el foco es:

$$F(3+3,5) = F(6,5).$$

La directriz es la recta (figura 5.29):

$$x = 3 - 3 = 0.$$

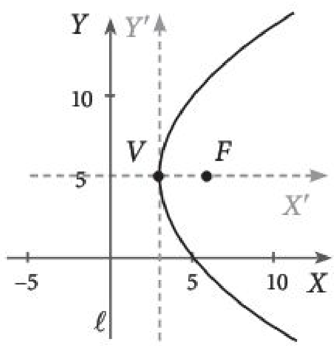


Figura 5.29

En resumen:

p	Directriz	Foco	Vértice	Eje de simetría	Horizontal o vertical	Abre hacia
2	$x = 0$	$F(6,5)$	$V(3,5)$	$y = 5$	horizontal	derecha

3. Encontrar los puntos de intersección de la parábola $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ con la recta $x + y - 1 = 0$.

Solución:
Escribimos la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = -x + 1,$$

y despejamos y en la ecuación de la parábola:

$$y = x^2 - 4x + 1.$$

Al igualar las ecuaciones tenemos que:

$$-x + 1 = x^2 - 4x + 1.$$

Si resolvemos esta última ecuación obtenemos:

$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0.$$

Para que el producto de dos factores sea cero, alguno de ellos debe ser cero; de donde:

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

Para encontrar las ordenadas correspondientes, sustituimos estos valores en la ecuación de la recta:

Si $x = 0$, entonces: $\quad y = -x + 1 = 0 + 1 = 1.$

Si $x = 3$, entonces: $\quad y = -x + 1 = -3 + 1 = -2.$

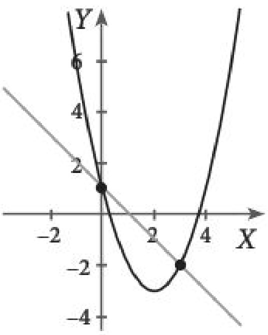


Figura 5.30

La recta y la parábola se cortan en los puntos $(0, 1)$ y $(3, -2)$ (figura 5.30).

4. Encontrar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de la parábola $(y - 4)^2 = 16(x + 10)$ si uno de los extremos de las cuerdas es $B(15, -16)$.

Solución:
Sea $A(x, y)$ un punto en la parábola. Sus coordenadas satisfacen la ecuación:

$$(y - 4)^2 = 16(x + 10).$$

Al despejar x obtenemos que:

$$x = \frac{(y - 4)^2}{16} - 10,$$

de donde:

$$A\left(\frac{(y - 4)^2}{16} - 10, y\right).$$

Llamamos C al punto medio de la cuerda que une $A\left(\frac{(y-4)^2}{16}-10, y\right)$ con $B(15,-16)$ de donde:

$$C\left(\frac{\frac{(y-4)^2}{16}-10+15}{2}, \frac{y-16}{2}\right) = C\left(\frac{\frac{(y-4)^2}{16}+5}{2}, \frac{y-16}{2}\right).$$

Veamos si podemos determinar en qué curva se encuentran estos puntos. Llamamos:

$$u = \frac{\frac{(y-4)^2}{16}+5}{2}$$
$$v = \frac{y-16}{2}.$$

Despejamos y de la segunda ecuación:

$$y = 2v + 16$$

y sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$u = \frac{\frac{(2v+16-4)^2}{16}+5}{2}$$
$$u = \frac{(2v+12)^2 + 5(16)}{2(16)}$$
$$u = \frac{2^2(v+6)^2 + 5(16)}{2(16)}$$
$$u = \frac{(v+6)^2 + 20}{8}$$
$$8u - 20 = (v+6)^2$$
$$8\left(u - \frac{5}{2}\right) = (v+6)^2,$$

es decir,

$$(v+6)^2 = 4(2)\left(u - \frac{5}{2}\right),$$

que es una parábola con vértice en $\left(\frac{5}{2}, -6\right)$ y $p = 2$.

El punto medio entre $B(15,-16)$ y el vértice $V(-10,4)$ de la parábola original es:

$$\left(\frac{15-10}{2}, \frac{-16+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -6\right),$$

de donde el vértice de la nueva parábola es el punto medio entre B y V y su parámetro p es la mitad del de la parábola original (figura 5.31).

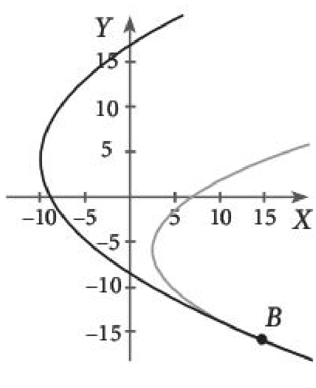


Figura 5.31

Ejemplos

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la parábola con los siguientes datos.

1. Foco $F(-3,-2)$; vértice $V(-3,-5)$.
2. Foco $F(4,-6)$; vértice $V(2,-6)$.
3. Foco $F(1,4)$; vértice $V(0,4)$.
4. Foco $F(-5,5)$; vértice $V(-5,8)$.
5. Foco $F(0,-2)$; directriz $x=5$.
6. Foco $F(5,1)$; directriz $y+7=0$.
7. Vértice $V\left(3,\frac{5}{3}\right)$; directriz $y=2$.
8. Vértice $V(3,0)$; directriz $x-10=0$.
9. Vértice $V(-4,-1)$; foco $F(-4,-3)$.
10. Vértice $V(1,6)$; foco $F(10,6)$.

11. Encuentra la ecuación de la parábola vertical con vértice en $V(-1,-1)$ y que pasa por el punto $P(1,6)$.
12. Halla la ecuación de la parábola horizontal con vértice en $V\left(-\frac{1}{2},1\right)$ y que pasa por el punto $P\left(\frac{7}{2},2\right)$.
13. Da con la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(-3,5)$, $p=\frac{5}{6}$ y eje paralelo al eje X.
14. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(2,7)$, ancho focal 6 y eje paralelo al eje Y.

Encuentra el foco, el vértice y la directriz de cada una de las siguientes parábolas.

15. $y^2-8y-8x+64=0$.
16. $x^2+10x+2y+29=0$.
17. $y^2+2y+20x-39=0$.
18. $x^2-y+7=0$.
19. $12x^2-72x+y+78=0$.
20. $4x^2+16x-3y+28=0$
21. $y^2+10y-24x+49=0$.
22. $4x^2-48x-y+147=0$.

23. Encuentra la ecuación del círculo de radio 5 con centro en el vértice de la parábola cuyo foco es $F(1,-1)$ y cuya directriz es la recta $x=-3$.
24. Halla la ecuación general de la recta con pendiente $m=-3$ que pasa por el foco de la parábola con vértice $V(-2,2)$ y directriz $y-\frac{1}{2}=0$.

En cada caso, encuentra la intersección de la recta y la parábola.

25. Recta $6x-y-2=0$; parábola $x^2+4x-y-5=0$.
26. Recta $x-6y-15=0$; parábola $y^2-x+9y-25=0$.
27. Recta $11x-2y+7=0$; parábola $-x^2+10x-y+6=0$.
28. Recta $x-y-21=0$; parábola $-y^2-x+8y+21=0$.
29. Recta $x-2y+7=0$; parábola $x^2-10x-8y+41=0$.
30. Recta $x+2y+9=0$; parábola $x^2+6x+4y+13=0$.
31. Recta $4x-7y+38=0$; parábola $y^2-2x-4=0$.
32. Recta $x+2y+14=0$; parábola $y^2+x+16y+63=0$.

33. Encuentra los puntos de intersección de la parábola $-y^2+6x+18=0$ y el círculo $x^2+y^2-9=0$.
34. Una parábola tiene ecuación $y^2+2x+Ey+F=0$ y vértice $V\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, encuentra los valores de E y F y la ecuación estándar de la parábola.

Algunas aplicaciones de la parábola

Una propiedad importante de la parábola es la de reflexión, la cual consiste en que cuando una onda viaja paralela al eje de la parábola y choca con esta, entonces se refleja hacia el foco y, de manera inversa, si del foco emana una onda, cuando esta choca con la parábola, se refleja paralelamente al eje. Esta propiedad es demostrada una vez que se caracteriza cuál es la recta tangente a la parábola en un punto dado.

Un paraboloide se obtiene al girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Si lo cortamos con planos que contienen el eje de simetría, obtenemos párabolas que comparten el foco y el vértice.

Gracias a esta propiedad es que se construyen faros, antenas y espejos con forma de paraboloide. Por ejemplo, estamos muy acostumbrados a escuchar sobre las antenas parabólicas.

La ecuación de la recta tangente a la parábola se obtiene mediante procedimientos de geometría analítica. En otros apartados, veremos que la trayectoria que describe un proyectil es una parábola; asimismo, mostraremos que en un puente colgante hay cables tendidos entre dos puntos, los cuales toman la forma parabólica debido al peso que soportan. En caso de que este peso desapareciera, el cable tomaría la forma de catenaria.

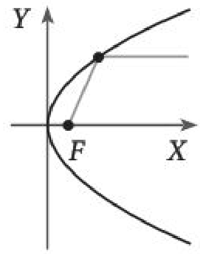


Figura 5.32

Antenas parabólicas

Al girar una parábola alrededor de su eje de simetría, obtenemos una superficie de revolución llamada *paraboloide*.

Estas superficies tienen muchas aplicaciones, principalmente en óptica y electrónica, ya que si un rayo de luz paralelo al eje choca contra el paraboloide, entonces se refleja hacia su foco, e inversamente, si un rayo sale del foco y choca contra el paraboloide, entonces se refleja en la dirección de su eje (figura 5.32).

Esta propiedad, conocida como la *propiedad de reflexión* o *propiedad óptica* de la parábola, tiene muchas aplicaciones; por ejemplo, en los faros de los automóviles, las antenas parabólicas, los telescopios, los micrófonos direccionales, etcétera.

Antena parabólica.

Ejemplos

1. Una antena parabólica tiene diámetro de 1 metro. Si tiene una profundidad de 20 centímetros, ¿a qué altura debemos colocar el receptor?; es decir, ¿a qué distancia está el foco del vértice?

Solución:

Colocamos los ejes cartesianos de manera que el vértice de la parábola esté en el origen y su eje coincida con el eje Y. Entonces la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4py.$$

Debemos determinar el valor de p, que es la distancia del foco al vértice.

William Hutchinson construyó (en 1752) el primer reflector parabólico de un faro de mar.

Una leyenda cuenta que Arquímedes construyó espejos parabólicos para incendiar las velas de las naves romanas que querían conquistar Siracusa.

Como el diámetro de la antena es de un metro y esta tiene una profundidad de 20 centímetros, los puntos $(0.5, 0.2)$ y $(-0.5, 0.2)$ están en la parábola. Sustituimos $(0.5, 0.2)$ en la ecuación de la parábola y despejamos p:

$$\begin{aligned}(0.5)^2 &= 4p(0.2)\\ 0.25 &= 0.8p\\ p &= 0.3125,\end{aligned}$$

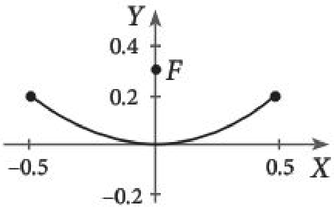


Figura 5.33

por lo que las coordenadas del foco son $F(0, 0.3125)$, así que debemos colocar el receptor a una altura de 31.25 centímetros sobre el vértice (figura 5.33).

2. En una cocina solar la fuente de calor se encuentra 30 cm por encima del fondo del paraboloide. ¿Cuánto debe medir la varilla que sostiene la parrilla?

Una cocina solar es un paraboloide de aluminio o de algún material altamente reflejante. En el foco del paraboloide, donde se concentra el calor, hay una parrilla para poder colocar la olla con la comida, esta parrilla se sostiene con una varilla que tiene la longitud del lado recto. Estas estufas pueden alcanzar temperaturas de 300 °C dependiendo del tamaño del paraboloide. Este tipo de estufas se utilizan en zonas rurales de India y de África.


Cocina solar.

Solución:
Colocamos los ejes cartesianos de manera que el vértice de la parábola esté en el origen y su eje coincida con el eje X. Entonces la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 4px.$$

Debemos determinar el valor de p, que es la distancia del foco al vértice. Como la fuente de calor se encuentra a 30 cm del fondo del paraboloide, entonces el foco es $F(30, 0)$, de donde:

$$p = 30.$$

Como la varilla que sostiene la parrilla está sobre el lado recto de la parábola, la varilla es igual al lado recto, es decir,

$$4p = 4(30) = 120.$$

Por tanto, la varilla mide 120 cm, o sea, 1.20 metros.

3. ¿Qué relación debe haber entre la profundidad h y el ancho a de una antena parabólica para que el receptor se encuentre:

a. Dentro de la antena.
b. Fuera de la antena.

Solución:
Supongamos que colocamos la antena con vértice en el origen y que su eje de simetría coincide con el eje Y. Como el ancho de la antena es a, entonces del origen al extremo de la antena hay $\frac{a}{2}$ (figura 5.34).

La ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4py.$$

El punto $\left(\frac{a}{2}, h\right)$ está en la parábola, entonces:

$$\frac{a^2}{4} = 4ph,$$

de donde:

$$p = \frac{a^2}{16h}.$$

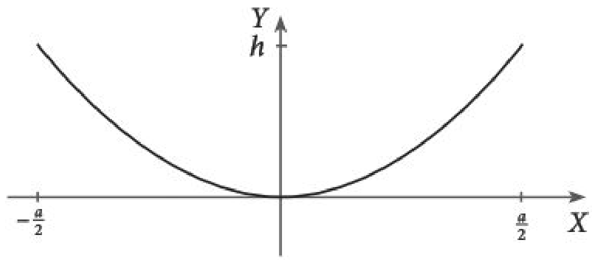


Figura 5.34

Como el foco es $F(0,p)$ entonces:

a. Si el foco está dentro de la antena,

$$p < h,$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{16h} &< h \\ a^2 &< 16h^2 \\ a^2 - 16h^2 &< 0 \\ (a-4h)(a+4h) &< 0. \end{aligned}$$

Para que el producto de dos factores sea negativo, deben tener signos opuestos y como $a + 4h > 0$, entonces:

$$a - 4h < 0$$

de donde:

$$a < 4h.$$

Por tanto, para que el foco se encuentre dentro de la antena, el ancho de esta debe ser menor que cuatro veces su profundidad.

b. Si el foco está fuera de la antena,

$$p > h$$

de donde:

$$(a-4h)(a+4h) > 0.$$

Para que el producto de dos factores sea positivo, deben tener signos iguales y como $a + 4h > 0$, entonces:

$$a - 4h > 0,$$

Determinar dónde está colocado el receptor de ondas en un paraboloide de revolución equivale a determinar el foco de la parábola que lo genera.

Ejemplos

de donde:

$$a > 4h.$$

Por tanto, para que el foco de la antena se encuentre fuera de esta el ancho debe ser mayor que cuatro veces su profundidad.

Puentes colgantes

Si un cable carga un peso homogéneo mucho mayor que el peso del propio cable, este toma la forma de una parábola (figura 5.35).

Puente Golden Gate, San Francisco, EUA.

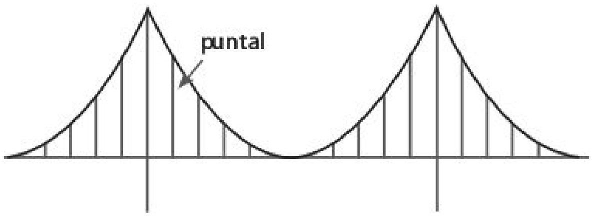


Figura 5.35

Esta propiedad se utiliza en puentes colgantes, como el Golden Gate de San Francisco, Estados Unidos, mostrado en la fotografía.

Ejemplo

1. Si las torres de un puente colgante tienen una separación de 400 metros y los cables están atados a ellas a 200 metros por arriba del piso del puente, ¿qué longitud debe tener el puntal que está a 50 metros de la torre izquierda? Supongamos que el cable toca el piso en el punto medio ubicado entre las dos torres.

Solución:
Si escogemos el sistema de coordenadas con origen en V que sugiere la figura 5.36, tenemos que la ecuación de la parábola es $x^2 = 4py$. Debemos encontrar p. Como el punto $(200, 200)$ está en la parábola, resolvemos:

$$200^2 = 4p(200),$$

y obtenemos que $p = 50$. Así, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 200y.$$

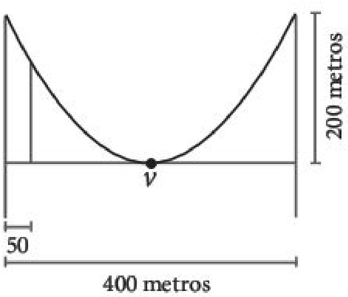


Figura 5.36

Ahora queremos encontrar la segunda coordenada del punto de la parábola cuya primera coordenada es $x = -150$.

Resolvemos:

$$(-150)^2 = 200y$$

y obtenemos:

$$y = \frac{225}{2} = 112.5.$$

Ejemplo

Así, la altura del puntal que está a 50 metros de la torre es de 112.5 m.

Cuando un cable cuelga por su propio peso toma la forma de una catenaria y no de una parábola.

El arco de San Luis, Missouri es una catenaria invertida.

Tiro parabólico

La trayectoria de un proyectil lanzado desde el nivel del suelo describe una parábola que abre hacia abajo (figura 5.37).

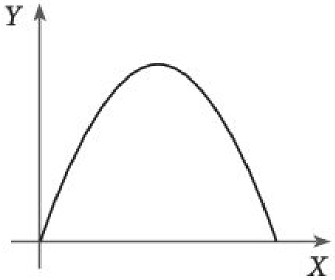


Figura 5.37

Esta propiedad fue descubierta por Galileo y publicada en 1632 en su libro *Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo*.

Ejemplo

1. Desde el origen de coordenadas, un jugador de béisbol lanza una pelota que sigue la trayectoria descrita por la parábola $3x^2 - 240x + 160y = 0$. Considerando que las unidades son metros, ¿cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota y a qué distancia cae esta del jugador?

Solución:
Llevamos la ecuación de la parábola a la forma estándar para conocer sus elementos principales.

El agua que sale de una manguera o de una fuente describe una parábola al caer.

$$3x^2 - 240x + 160y = 0$$
$$3\left(x^2 - 80x\right) = -160y$$
$$\left(x - 40\right)^2 = -\frac{160}{3}y + 1600$$
$$\left(x - 40\right)^2 = -4\left(\frac{40}{3}\right)\left(y - 30\right).$$

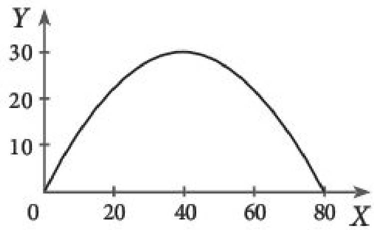


Figura 5.38

La parábola abre hacia abajo y tiene su vértice en $(40,30)$, así que la altura máxima alcanzada es de 30 m. El origen $(0,0)$ satisface la ecuación de la parábola. El punto en el que cae la pelota es el otro punto donde la parábola corta el eje X.

Por la simetría de la figura, como la primera coordenada del vértice es 40, el punto donde cae la pelota es $(80,0)$ (figura 5.38).

También podríamos haber encontrado este dato sustituyendo $y = 0$ en la ecuación de la parábola y resolviendo la ecuación resultante:

A

$$3x^2 + 240x = 0$$
$$3x\left(x - 80\right) = 0,$$

cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 80$.

Ejemplo

Para encontar el punto en que un proyectil alcanza su máxima altura, debe determinarse el vértice de la parábola que describe.

Arquitectura

Podemos encontrar arcos parabólicos en distintos tipos de construcciones, como son ventanas, puertas, puentes, etcétera.

Antonio Gaudí (1852-1926), arquitecto catalán de fama internacional, utilizó arcos parabólicos en muchas de sus obras. En el Colegio de Santa Teresa diseñó un sistema de corredores con arcos parabólicos que permiten aprovechar la luz solar y distribuirla hacia los patios interiores. Entre sus obras más conocidas se encuentra el parque Güell en Barcelona y la iglesia de la Sagrada Familia, esta última no la concluyó.

También se utilizan las parábolas en el diseño de cortinas de presas ya que su forma es eficiente para contener la presión del agua.

En las fotografías se muestra uno de los corredores diseñados por Gaudí y la presa Vistahermosa en Oaxaca, México.


Corredores interiores del Colegio de Santa Teresa, Barcelona.


Presa Vistahermosa, Oaxaca, México; cortesía del programa "Agua para siempre", de Alternativas y Procesos de Participación Social, A. C.

Ejemplo

1. Un puente tiene forma de arco parabólico. Tiene una extensión de 20 metros y una altura máxima de 2.5 metros. Determinar la ecuación de la parábola que genera este arco.

Solución:
Consideramos una parábola con vértice en el origen y que abre hacia abajo. Entonces su ecuación es de la forma:

$$x^2 = -4py.$$

Los extremos del arco tienen coordenadas $(10,-2.5)$ y $(-10,-2.5)$. Sustituimos cualquiera de estos puntos en la ecuación para obtener p:

$$\begin{aligned} 100 &= -4p(-2.5) \\ \frac{100}{10} &= p \\ 10 &= p. \end{aligned}$$

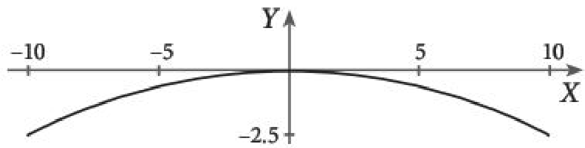


Figura 5.39

Por tanto, la ecuación buscada es (figura 5.39):

$$x^2 = -4(10)y.$$

Ejercicios

1. Un puente tiene una longitud de 160 metros. El cable que lo soporta tiene la forma de una parábola. Si el puntal ubicado en cada uno de los extremos tiene una altura de 25 metros, ¿cuál es la ecuación de la parábola?
2. En un puente colgante, la distancia entre sus torres es de 300 metros y la altura de las torres es de 100 metros. Describe la ecuación de la parábola formada por el cable que soporta el puente.
3. Con los datos del problema anterior, encuentra la altura del puntal que se encuentra a 50 metros del centro del puente.
4. El cable de un puente colgante está dado por la ecuación $x^2 = 400y$. Si los postes del puente tienen una altura de 50 metros, ¿cuál es la longitud del puente?
5. Con los datos del problema anterior, determina la longitud del puntal que se encuentra a 100 metros del centro del puente.
6. En un puente colgante, la distancia entre sus torres es de 200 metros y la altura de las torres es de 100 metros. Da la ecuación de la parábola que describe el cable que soporta el puente.
7. Con los datos del problema anterior, encuentra a qué distancia del centro está un puntal de 50 metros de longitud.
8. Un diseñador de automóviles desea diseñar un faro que tenga 16 centímetros de diámetro. La bombilla que va a utilizar en él tiene el filamento a 2 centímetros del cuello. ¿Qué profundidad debe tener el faro para que el filamento quede en el foco del faro si el cuello de la bombilla se coloca a la altura del vértice del faro?

9. Como el faro del ejercicio anterior resulta demasiado profundo, el diseñador decide recortarlo 2 centímetros de manera que la profundidad sea de 6 centímetros. ¿Cuál será el diámetro del nuevo diseño de faro?
10. La antena de un radiotelescopio en forma de paraboloide tiene un diámetro de 8 metros. Si la profundidad de la antena es de 0.5 metros, ¿a qué distancia del vértice debe colocarse el receptor?
11. Una antena parabólica para televisión tiene un diámetro de 1 metro y su receptor está colocado 25 centímetros por arriba de su vértice. ¿Qué profundidad tiene la antena?
12. Con un receptor más potente, es posible reducir a la mitad el diámetro de la antena parabólica del problema anterior. Si se coloca el receptor igual que antes, ¿cuál será la profundidad de la nueva antena?
13. Un niño acciona un juguete que dispara un proyectil. El proyectil describe en el aire una trayectoria parabólica con ecuación $h(t) = -4t^2 + 16t$, donde t es el tiempo en segundos y $h(t)$ es la altura que alcanza el proyectil, expresada en metros. ¿Cuántos segundos han pasado desde el lanzamiento hasta que el proyectil alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?
14. Juan se encuentra en la cima de una colina y dispara un dardo con una pistola. La trayectoria que sigue el dardo está dada por la ecuación $h(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 10t + 8$, donde t es el tiempo en segundos y $h(t)$ es la altura que alcanza el dardo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el dardo? ¿Cuántos segundos después del disparo el dardo toca el suelo?
15. Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo y sigue la trayectoria parabólica $(x-3)^2 = y - 9$; las unidades están dadas en kilómetros. ¿Cuál será la altura máxima del proyectil y a qué distancia del cañón caerá?
16. Una bala disparada desde el nivel del suelo sigue la trayectoria parabólica $x^2 - 100x + 25y = 0$. ¿Cuál será la altura máxima del proyectil y a qué distancia del tirador caerá si la distancia se expresa en metros?
17. Un artillero atina a un objetivo que está a 500 metros de su cañón. El cañón está en el origen de coordenadas. Encuentra la ecuación de la parábola que describió su disparo si este alcanzó una altura máxima de 100 metros.
18. Un puente con forma de arco parabólico tiene una extensión de 10 metros y una altura de 1.25 metros. Determina la ecuación de la parábola que genera este arco.

Ejercicios

Las funciones cuadráticas y las parábolas

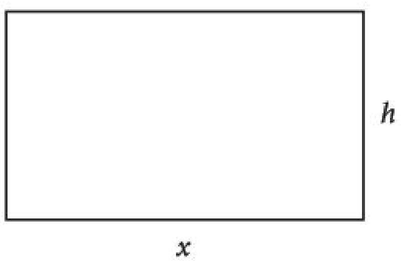


Figura 5.40

Un agricultor tiene 100 metros de alambrada. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo que puede formar con ella para limitar la máxima área posible? (Figura 5.40.)

Solución:
Llamemos x a la base del rectángulo y h a su altura. El área del rectángulo es:

$$A = xh.$$

El perímetro del rectángulo debe ser de 100 metros:

$$2x + 2h = 100.$$

Si despejamos h de esta última ecuación:

$$h = 50 - x$$

y la sustituimos en la fórmula del área, obtenemos:

$$A = x(50 - x) = 50x - x^2;$$

es decir, el área depende de x. Entonces podemos escribir:

$$A(x) = 50x - x^2.$$

La gráfica de esta función es la curva:

$$y = 50x - x^2.$$

Al completar el cuadrado del lado derecho, obtenemos:

$$y - 25^2 = -(x - 25)^2$$
$$-(y - 625) = (x - 25)^2,$$

que es una parábola que abre hacia abajo con vértice en $(25, 625)$. Por lo que la función alcanza su máximo en el vértice de la parábola; es decir, cuando $x = 25$. Para este valor de la base, la altura mide:

$$h = 50 - 25 = 25;$$

es decir, se trata de un cuadrado y su área es de 625 m^2 (figura 5.41).

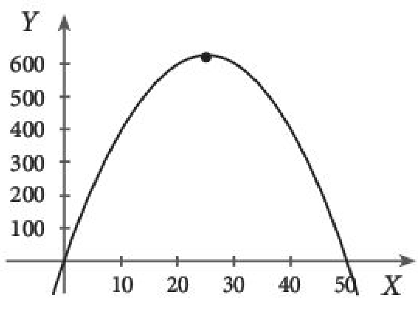


Figura 5.41

Una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{con } a \neq 0$$

se denomina *función cuadrática*. Su gráfica es la parábola vertical:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c.} \tag{5.11}$$

Cuando $b = c = 0$, se trata de la parábola:

$$y = ax^2$$

que tiene su vértice en el origen. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba; si $a < 0$, hacia abajo.

Para encontrar el vértice de la parábola (5.11) escribimos la ecuación de la parábola en su forma estándar.

Completamos el cuadrado del lado derecho:

$$y - c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$
$$\frac{y-c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$$
$$\frac{y-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\frac{y-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\frac{y}{a} + \frac{-4ac + b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\frac{1}{a}\left(y - \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)\right) = \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2.$$

Una función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, es llamada una función cuadrática. Su gráfica es una parábola vertical.

El coeficiente $\frac{1}{a}$ indica que la parábola abre hacia arriba cuando $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$.

El vértice de la parábola es:

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).} \tag{5.12}$$

En la práctica, para encontrar la segunda coordenada del vértice, suele ser más fácil evaluar la ecuación (5.10) en $-\frac{b}{2a}$ que recordar la expresión (5.12).

Ejemplos

1. Dibujar la parábola $y = 2x^2 - 4x + 3$ y encontrar el vértice.

Solución:
La parábola tiene la forma de (5.11) con $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$. De acuerdo con (5.12), la primera coordenada del vértice es:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(2)} = 1;$$

para encontrar la segunda coordenada, sustituimos $x = 1$ en la ecuación de la parábola:

$$y = 2(1)^2 - 4(1) + 3 = 1,$$

así que el vértice es $V(1,1)$, o bien podemos obtener las coordenadas del vértice de la siguiente manera:

$$y = 2x^2 - 4x + 3$$
$$y - 3 = 2\left(x^2 - 2x\right)$$
$$\frac{y-3}{2} + 1 = x^2 - 2x + 1$$
$$y - 1 = 2\left(x - 1\right)^2.$$

Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba y el vértice es el punto más bajo de ella.

Para dibujarla conviene hacer una tabla con algunos de sus puntos:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	19	9	3	1	3	9	19

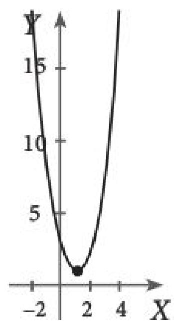


Figura 5.42

Observamos que como la parábola es simétrica con respecto a la vertical que pasa por el vértice, el valor de y para $x = 0$ y $x = 2$ es el mismo, ya que 0 y 2 distan lo mismo de 1. Pasa igual con -1 y 3 y con -2 y 4 (figura 5.42).

2. Un fabricante de juguetes vende cochecitos. Sabe que con un precio unitario de \$20 vendería 10 000 cochecitos en la temporada navideña, pero desea aumentar el precio. Por cada peso que aumente el precio, las ventas se reducirán en 400 cochecitos. ¿Qué precio les debe asignar para que sus ingresos sean máximos?

Solución:
Llamamos x al precio de un cochecito e I a la función ingreso. El ingreso es igual al producto de los cochecitos vendidos por su precio, es decir:

$$I(x) = xv(x),$$

donde $v(x)$ es el número de cochecitos que se venden al precio x.
Si el precio es de \$21, entonces logran venderse:

$$v(21) = 10\,000 - 400.$$

Si el precio es de \$22, el fabricante vende:

$$v(22) = 10\,000 - 400(2) = 10000 - 400(22 - 20),$$

en general,

$$v(x) = 10000 - 400(x - 20),$$

así que

$$I(x) = x(10\,000 - 400(x-20)) = -400x^2 + 18\,000x.$$

La parábola:

$$y = -400x^2 + 18\,000x$$

abre hacia abajo y su punto más alto es su vértice.

Al completar los cuadrados:

$$y = -400x^2 + 18\,000x$$
$$y = -400(x^2 - 45x)$$
$$\frac{y}{-400} + \left(\frac{45}{2}\right)^2 = x^2 - 45x + \left(\frac{45}{2}\right)^2$$
$$y - 202\,500 = -400\left(x - \frac{45}{2}\right)^2,$$

encontramos las coordenadas del vértice:

$$V(22.5, 202\,500),$$

así que el precio con el que se alcanza un ingreso máximo es de \$22.50, con lo que obtenemos un ingreso de:

$$-400(22.5)^2 + 18000(22.5) = \$202500.$$

Hay problemas en que hay que encontrar el valor máximo o mínimo de una cantidad. Cuando su planteamiento nos lleva a que debemos encontrar el máximo o mínimo valor de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, entonces lo que debemos hacer es encontar la coordenada y del vértice de su gráfica.

Ejemplos

Ejercicios

1. Halla las dimensiones que debe tener un rectángulo para que su perímetro sea igual a 7 centímetros y su área sea máxima.
2. Encuentra un número positivo tal que el producto de dicho número por el número que resulta de restarle dos unidades al número dado sea mínimo.
3. La suma del doble de un número más otro es igual a 8. Encuentra los números si el doble de su producto debe ser máximo.
4. Encuentra el número x cuya mitad menos la cuarta parte de su cuadrado sea máxima.
5. Los catetos de un triángulo rectángulo suman 50. Encuentra las dimensiones del triángulo que hagan que el cuadrado de su hipotenusa sea mínima.
6. La ganancia obtenida por un comerciante al vender x cepillos está dada por $g(x) = -x^2 + 1000x - 242000$. Encuentra el número de cepillos que debe vender el comerciante para obtener la mayor ganancia. ¿Cuál es la ganancia obtenida en ese caso?

Ejercicios

7. Encuentra dos números cuya diferencia sea 5 y sean tales que el cuadrado del mayor menos el doble del cuadrado del menor sea máximo.
8. Localiza las coordenadas del punto Q ubicado sobre la recta $y = \frac{3}{4}x - 6$ tal que el cuadrado de la distancia de Q al punto $P(-6, 2)$ sea mínimo.

Desigualdades y la parábola

Dibuja la región del plano determinada por la desigualdad $(y-6)^2 < 4(x+2)$.

Solución:
Primero dibujamos la parábola $(y-6)^2 = 4(x+2)$.

Como la variable y está al cuadrado, se trata de una parábola horizontal; el signo del coeficiente de $(x+2)$ indica que la parábola abre hacia la derecha. Su vértice es $V(-2, 6)$. Como $p = 1$, el foco es $F(-1, 6)$ y su lado recto mide 4.

La parábola divide el plano en tres conjuntos:

- El de los puntos que están en la parábola.
- El de los puntos que están a la derecha de la parábola (dentro de la parábola).
- El de los puntos que están a la izquierda de la parábola (fuera de la parábola).

Consideremos ahora cualquier punto $P(x, y)$ que esté dentro de la parábola. Si trazamos una recta horizontal por P, corta la parábola en un punto $Q(x_1, y)$.

Puesto que Q está en la parábola,

$$\boxed{(y-6)^2 = 4(x_1+2).} \tag{5.13}$$

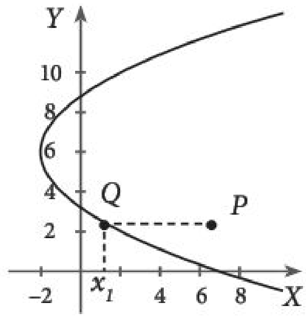


Figura 5.43

En la figura 5.43, tenemos:

$$x_1 < x,$$

entonces,

$$x_1 + 2 < x + 2$$
$$4(x_1+2) < 4(x+2),$$

y por medio de (5.13), obtenemos:

$$(y-6)^2 < 4(x+2),$$

así que los puntos que están dentro de la parábola satisfacen la desigualdad deseada (figura 5.44).

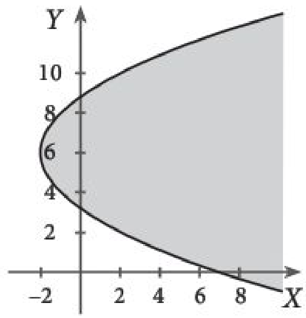


Figura 5.44

Observación:
Con el mismo argumento, podemos ver que los puntos que están fuera de la parábola (la parte no sombreada del plano sin incluir la parábola) satisfacen la desigualdad contraria:

$$(y-6)^2 > 4(x+2).$$

Una parábola divide el plano en tres conjuntos:

- El de los puntos que están dentro de la parábola (figura 5.45).
- El de los puntos que están sobre la parábola (figura 5.46).
- El de los puntos que están fuera de la parábola (figura 5.47).

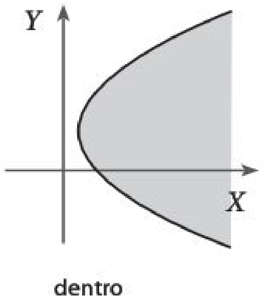


Figura 5.45

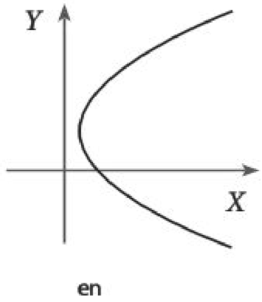


Figura 5.46

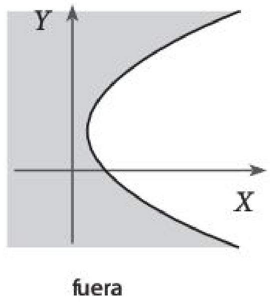


Figura 5.47

Primero consideremos una parábola horizontal que abre hacia la derecha, es decir, con ecuación:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h).$$

Los puntos que están en la parábola son los que satisfacen la igualdad.

Ahora veamos lo que pasa con los puntos que no están en ella. Tomemos un punto $P(x,y)$ dentro de la parábola como muestra la figura 5.48:

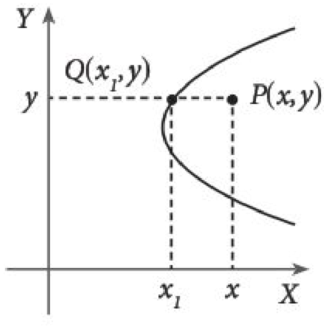


Figura 5.48

Trazamos una paralela al eje X que pase por el punto P. Esta recta corta la parábola en el punto $Q(x_1, y)$ que tiene la misma segunda coordenada que P. Como el punto Q está en la parábola, entonces satisface la ecuación:

$$\boxed{(y-k)^2 = 4p(x_1-h),} \tag{5.14}$$

ahora,

$$x_1 < x,$$

ya que x_1 está a la izquierda de x. Al sumar el número $-h$ a ambos lados de la desigualdad, obtenemos:

$$x_1 - h < x - h,$$

multiplicamos por $4p$, y la desigualdad no se altera, ya que $4p$ es positivo:

$$4p(x_1 - h) < 4p(x - h);$$

si combinamos lo anterior con (5.14), obtenemos que los puntos que están dentro de la parábola satisfacen:

$$(y-k)^2 < 4p(x-h)$$

y, mediante un argumento similar, podemos ver que los puntos que están fuera de la parábola satisfacen:

$$(y-k)^2 > 4p(x-h).$$

Analicemos ahora una parábola cuya ecuación sea (figura 5.49):

$$\boxed{(y-k)^2 = -4p(x-h).} \tag{5.15}$$

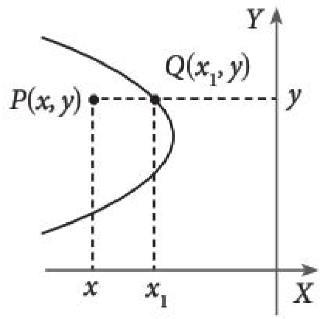


Figura 5.49

Tomamos nuevamente un punto $P(x,y)$ dentro de la parábola y construimos $Q(x_1, y)$ en la parábola, como se ve en la figura 5.49. Ahora tenemos:

$$x < x_1.$$

Si sumamos $-h$ a ambos lados de la desigualdad, obtenemos:

$$x - h < x_1 - h.$$

Al multiplicar la desigualdad por $-4p$, esta cambia de sentido por ser $-4p$ negativo:

$$-4p(x-h) > -4p(x_1 - h),$$

al combinar esta última desigualdad con (5.15), observamos que los puntos que están dentro de la parábola satisfacen:

$$(y-k)^2 < -4p(x-h).$$

Es decir, como en el caso anterior, el miembro cuadrático es menor que el término lineal.

Los casos de las parábolas verticales se analizan de manera similar, intercambiando los papeles de x y y.

En resumen:

- Un punto $P(x,y)$ está en la parábola si satisface:

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h) \text{ o } (x-h)^2 = \pm 4p(y-k), \text{ donde } p>0,$$

según sea el tipo de parábola.

- Un punto $P(x,y)$ está dentro de la parábola si satisface la desigualdad:

$$(y-k)^2 < \pm 4p(x-h) \text{ o } (x-h)^2 < \pm 4p(y-k), \text{donde } p>0,$$

según sea el tipo de parábola. Es decir, el miembro al cuadrado es menor que el miembro lineal.

- Un punto $P(x,y)$ está fuera de la parábola si satisface la desigualdad:

$$(y-k)^2 > \pm 4p(x-h) \text{ o } (x-h)^2 > \pm 4p(y-k), \text{ donde } p>0,$$

según sea el tipo de parábola. Es decir, el miembro al cuadrado es mayor que el miembro lineal.

Una parábola divide en tres conjuntos los puntos del plano: 1) los que están en la parábola,
2) los que están dentro de la parábola, por ejemplo el foco y 3) los que están fuera de la parábola, por ejemplo todos los puntos de la directriz.

Ejemplos

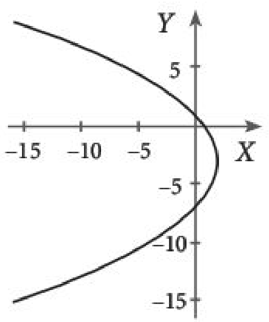


Figura 5.50

1. Describir los conjuntos de puntos determinados por la parábola $y^2 + 8x + 6y - 7 = 0$.

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma estándar (figura 5.50):

$$y^2 + 6y = -8x + 7$$
$$y^2 + 6y + 9 = -8x + 7 + 9$$
$$(y+3)^2 = -8(x-2).$$

La parábola tiene vértice en $V(2,-3)$, es horizontal y abre hacia la izquierda.
Los puntos que están en la parábola satisfacen la ecuación:

$$(y+3)^2 = -8(x-2),$$

los puntos que están dentro de la parábola, en este caso, a la izquierda de la parábola, satisfacen la desigualdad:

$$(y+3)^2 < -8(x-2),$$

y los puntos que están fuera de la parábola, es decir, a la derecha de ella, satisfacen:

$$(y+3)^2 > -8(x-2).$$

2. Graficar los conjuntos determinados por la parábola $x^2-10x-10y-35=0$ y describirlos analíticamente.

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma estándar:

$$\begin{aligned} x^2-10x-10y-35&=0\\ x^2-10x+25-25-10y-35&=0\\ (x-5)^2-10y-60&=0\\ (x-5)^2-10(y+6)&=0\\ (x-5)^2&=10(y+6)\\ (x-5)^2&=4\left(\frac{5}{2}\right)(y+6). \end{aligned}$$

Se trata de la parábola vertical que abre hacia arriba, con vértice en $V(5,-6)$ y parámetro $p=\frac{5}{2}$.

Los puntos que están en la parábola satisfacen la ecuación:

$$(x-5)^2=10(y+6).$$

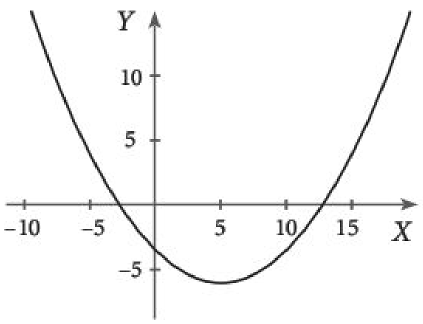


Figura 5.51

Los puntos que están dentro de la parábola, satisfacen la desigualdad:

$$(x-5)^2<10(y+6),$$

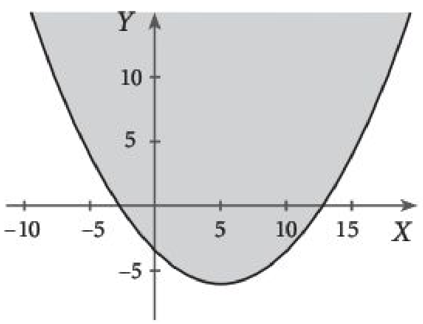


Figura 5.52

y los puntos que están fuera de la parábola satisfacen la desigualdad:

$$(x-5)^2 > 10(y+6).$$

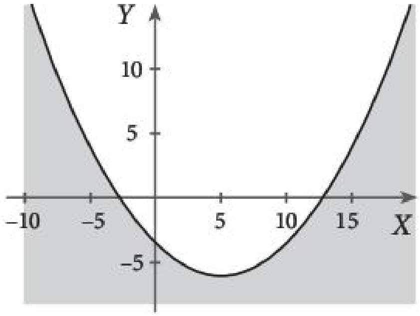


Figura 5.53

3. Graficar la región que se encuentra dentro de la parábola $x^2 - y + 2 = 0$ y del círculo $x^2 + y^2 - 36 = 0$ y arriba de la recta $x + y - 4 = 0$. Escribir las desigualdades que satisfacen los puntos que están en dicha región.

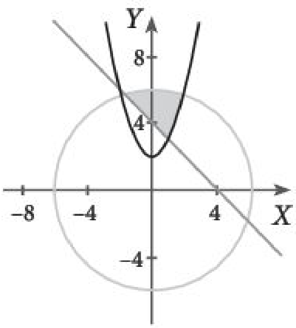


Figura 5.54

Solución:
Escribimos la ecuación de la parábola en la forma estándar:

$$x^2 = y - 2,$$

y vemos que la parábola es vertical y abre hacia arriba.
Escribimos la ecuación del círculo en la forma:

$$x^2 + y^2 = 36.$$

Escribimos la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada al origen:

$$y = -x + 4.$$

Entonces las desigualdades que describen la región (figura 5.54) son:

$$x^2 + y^2 < 36$$
$$y > -x + 4$$
$$x^2 < y - 2.$$

Los tres conjuntos en que una parábola divide el plano se pueden caracterizar algebraicamente por medio de una ecuación (los de la parábola) o una desigualdad (interior y exterior de la parábola).

Ejemplos

Ejercicios

1. Grafica la región que se encuentra dentro de los círculos $x^2 + y^2 - 4x = 0$ y $x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$ y de la parábola $x^2 + 2y = 0$ y escribe las desigualdades que satisfacen simultáneamente los puntos de dicha región.
2. Grafica la región que se encuentra dentro de la parábola $y^2 - 12y + 2x + 46 = 0$ y sobre la recta con pendiente 1 que pasa por el punto $(-7, 4)$. Escribe las desigualdades correspondientes.

3. Grafica la región determinada simultáneamente por las siguientes desigualdades:

$$y > 6(x-1)^2 + 4$$
$$y + 2x - 3 > 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 34 < 0.$$

4. Grafica la región que se encuentra dentro de la parábola $y^2 - 2x = 0$, fuera del círculo con centro en $(4,0)$ de radio 4 y arriba de la recta determinada por los puntos $(8,4)$ y $(5,0)$. Escribe las desigualdades correspondientes.
5. Grafica la región que se encuentra fuera de la parábola $y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ y dentro de la parábola $3y^2 + 4x - 30y + 67 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
6. Grafica la región que se encuentra fuera del círculo $x^2 + y^2 + 2x - 16y + 29 = 0$, dentro de la parábola $y^2 + 12x - 4y + 16 = 0$ y del círculo $x^2 + y^2 + 2x + 18y + 18 = 0$. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los centros de ambos círculos y el vértice de la parábola.
7. Grafica la región que se encuentra dentro del círculo $x^2 + y^2 = 4$, arriba de la recta $5x - y + 2 = 0$ y dentro de la parábola $8x^2 - y + 2 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
8. Escribe las desigualdades que determinan la siguiente región:

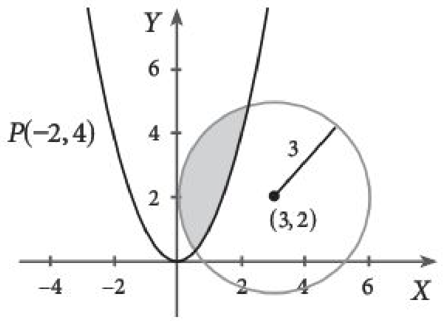


Figura 5.55

9. Grafica la región que se encuentra dentro de las parábolas $y^2 - 2x - 12y + 4 = 0$ y $x^2 + 6x - 10y - 31 = 0$ y fuera de la parábola $x^2 + 8x - 7y + 65 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
10. Grafica la región que se encuentra dentro de $x^2 - 2x - 8y + 17 = 0$, abajo de la recta $x - 2y + 3 = 0$ y dentro de $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
11. Grafica la región que se encuentra fuera de $y^2 + 16x - 10y + 73 = 0$ y de $y^2 - 16x - 10y + 9 = 0$ y dentro de $y^2 - 4x - 10y + 1 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.

Ejercicios

La recta tangente a la parábola

Recordemos que en el apartado de la tangente a un círculo dijimos que una recta ℓ es *tangente* a una cónica en un punto P si corta la cónica únicamente en P y todos los demás puntos de ℓ están en una misma de las regiones determinadas por la cónica.

En la figura 5.56, la recta corta la parábola en dos puntos; en la figura 5.57, en un punto, pero tiene una parte dentro y otra fuera de la parábola. En cambio, en la figura 5.58, la recta toca la parábola en un solo punto y el resto de sus puntos siempre están fuera de ella. Así, únicamente en este tercer caso la recta es tangente a la parábola.

Una recta ℓ es tangente a una parábola si la corta en sólo un punto (punto de tangencia) y todos sus otros puntos están en el exterior de la parábola.

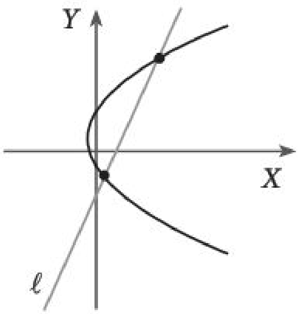


Figura 5.56

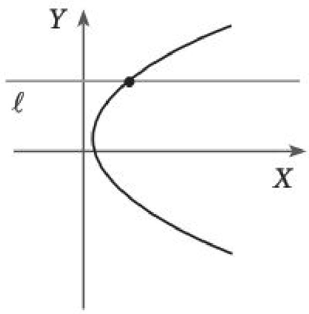


Figura 5.57

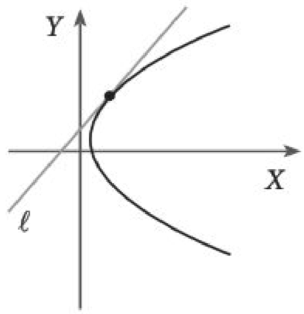


Figura 5.58

El siguiente resultado nos permitirá encontrar la ecuación de la recta tangente a una parábola en un punto.

Dado un punto P en la parábola:

$$\boxed{y^2 = 4px,} \tag{5.16}$$

la bisectriz del ángulo RPF formado por la recta FP, que une el foco F con P, y la recta horizontal RP (figura 5.59) es la recta tangente a la parábola en el punto P.

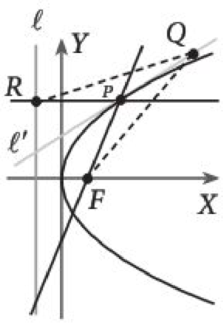


Figura 5.59

En la figura 5.59, ℓ es la directriz de la parábola; ℓ', la bisectriz del ángulo RPF; R, el punto donde la recta horizontal que pasa por P corta la directriz, y puesto que:

$$d(P,R) = d(P,F),$$

tenemos que el triángulo RPF es isósceles y, por tanto, ℓ' es la mediatriz de RF.

Así, para cualquier Q de ℓ' (figura 5.60), tenemos:

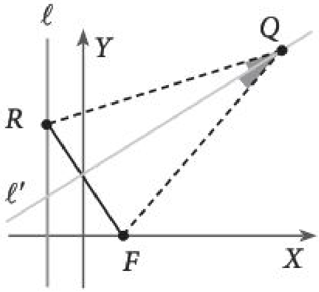


Figura 5.60

$$d(Q,R) = d(Q,F),$$

pero si $Q \neq P$, entonces la distancia de Q a la directriz es menor que la distancia de Q a R, así que:

$$d(Q,\ell) < d(Q,R),$$

luego,

$$d(Q,\ell) < d(Q,F)$$

y, por tanto, Q está fuera de la parábola. Como esto pasa para todo punto $Q \neq P$ de la bisectriz ℓ', entonces ℓ' es la recta tangente a la parábola en P, con lo que el teorema queda demostrado.

Entonces, para encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola:

$$y^2 = 4px$$

en el punto P, lo que debemos hacer es encontrar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por la recta FP y la recta horizontal RP; donde R es el punto en el que la recta horizontal que pasa por P corta la directriz.

La ecuación de la recta tangente a una parábola horizontal con vértice $V(0,0)$, en su punto $(x_1, y_1) \neq (0,0)$, es $y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1)$. En el vértice $V(0,0)$ la tangente es el eje Y.

Tangente a una parábola horizontal con vértice en el origen

La ecuación de la recta tangente a la parábola:

$$y^2 = 4px, \text{ con } p > 0,$$

en un punto $P(x_1, y_1)$ de la parábola, distinto del vértice, es:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1).} \tag{5.17}$$

En el vértice, la recta tangente es el eje Y, el cual tiene por ecuación $x = 0$.

Pensamiento crítico

El punto $P(9,6)$ pertenece a la parábola horizontal $y^2 = 4x$. El foco de esta es $F(1,0)$. La recta perpendicular a PF que pasa por F corta la directriz en $Q\left(-1, \frac{8}{3}\right)$. ¿Qué propiedad tiene la recta PQ respecto a la parábola?

Ejemplo

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 8x$ que pasa por el punto $Q(2,4)$ (figura 5.61).

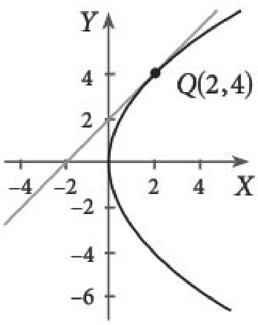


Figura 5.61

Solución:
Si sustituimos las coordenadas de Q en la ecuación (5.17) y simplificamos, obtenemos:

$$y - 4 = \frac{4}{2(2)}(x - 2)$$

$$x - y + 2 = 0.$$

La ecuación de la recta tangente a la parábola vertical con vértice $V(0,0)$, en su punto $(x_1, y_1) \neq (0,0)$, es $y - y_1 = \frac{2y_1}{x_1}(x - x_1)$. En el vértice $V(0,0)$ la tangente es el eje X.

Tangente a una parábola vertical con vértice en el origen

La recta tangente a una parábola vertical con vértice en el origen en un punto $Q(x_1, y_1)$ es:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{2y_1}{x_1}\left(x - x_1\right).} \tag{5.18}$$

Ejemplo

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $3x^2 + y = 0$ en el punto $Q(1, -3)$ (figura 5.62).

Solución:
Como la variable que está elevada al cuadrado es x la parábola es vertical; la ecuación de la recta tangente tiene la forma (5.18), y si sustituimos las coordenadas de Q en esta ecuación, obtenemos:

$$y - y_1 = \frac{2y_1}{x_1}\left(x - x_1\right)$$
$$y - (-3) = \frac{2(-3)}{1}(x - 1)$$
$$y + 3 = -6(x - 1),$$

al simplificar, obtenemos:

$$6x + y - 3 = 0.$$

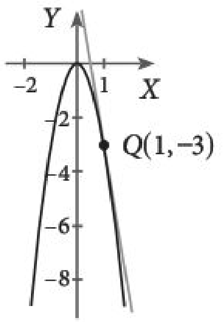


Figura 5.62

Pensamiento crítico

Las tangentes en $P(2,1)$ y el vértice $V(0,0)$ a la parábola vertical $x^2 = 4y$ se cortan en el punto $Q(1,0)$. El foco de la parábola es $F(0,1)$. ¿Cómo es la recta QF que une Q con el foco F?

Tangente a una parábola con vértice en $V(h,k)$

Ahora veamos cómo encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola horizontal con vértice en $V(h,k)$.

Trasladamos los ejes para que el origen quede en V mediante la sustitución:

$$\boxed{x' = x - h \quad \text{y} \quad y' = y - k.} \tag{5.19}$$

Las coordenadas de Q con respecto a los nuevos ejes son:

$$\boxed{x_1' = x_1 - h \quad \text{y} \quad y_1' = y_1 - k.} \tag{5.20}$$

Como la parábola es horizontal, entonces por (5.17) la ecuación de la recta tangente en el nuevo sistema es:

$$y' - y_1' = \frac{y_1'}{2x_1'}\left(x' - x_1'\right).$$

Al sustituir x', y', x_1', y_1' de acuerdo con (5.19) y (5.20), obtenemos que la recta tangente a la parábola horizontal en $Q(x_1, y_1)$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - x_1),$$

donde $Q(x_1, y_1)$ es el punto de tangencia y $V(h,k)$ es el vértice de la parábola.

Análogamente, la ecuación de la recta tangente a la parábola vertical con vértice en $V(h,k)$ en el punto $Q(x_1, y_1)$ es:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{2(y_1 - k)}{x_1 - h}(x - x_1).} \qquad (5.21)$$

La ecuación de la recta tangente a la parábola horizontal con vértice $V(h,k)$, en su punto $(x_1, y_1) \neq (h,k)$, es $y - y_1 = \frac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - x_1)$. En el vértice $V(h,k)$ la tangente es la recta vertical $x = h$.

La ecuación de la recta tangente a la parábola vertical $V(h,k)$, en su punto $(x_1, y_1) \neq (h,k)$, es $y - y_1 = \frac{2(y_1 - k)}{x_1 - h}(x - x_1)$. En el vértice $V(h,k)$ la tangente es la recta horizontal $y = k$.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 10y - 8x + 9 = 0$ en el punto $Q\left(-\frac{3}{2}, 7\right)$.

Solución:

Escribimos la ecuación de la parábola en la forma estándar:

$$\begin{aligned} y^2 - 10y - 8x + 9 &= 0 \\ y^2 - 10y &= 8x - 9 \\ (y-5)^2 &= 8x - 9 + 25 \\ (y-5)^2 &= 8x + 16 \\ (y-5)^2 &= 8(x+2). \end{aligned}$$

Observamos que la parábola es horizontal y su vértice es $V(-2, 5)$, así que la ecuación de la recta tangente en $Q\left(-\frac{3}{2}, 7\right)$ es:

$$y - 7 = \frac{7-5}{2\left(-\frac{3}{2} + 2\right)}\left(x + \frac{3}{2}\right);$$

después de simplificar, obtenemos (figura 5.63):

$$2x - y + 10 = 0$$

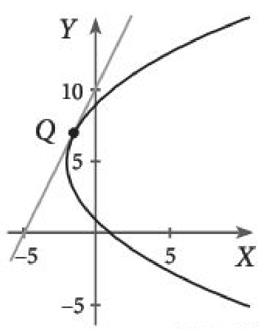


Figura 5.63

Una cuerda de la parábola es cualquier segmento que une dos puntos de la misma. El segmento de parábola determinado por una cuerda es la región limitada por esa cuerda y la propia parábola (parte sombreada de la figura 5.65).

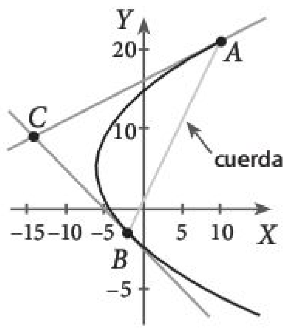


Figura 5.64

2. El área de un segmento parabólico es dos tercios del área del triángulo formado por la cuerda y las tangentes que pasan por los extremos de la cuerda (figura 5.64). Consideremos la parábola $y^2-16x-10y-71=0$ y los puntos $A(10,21)$ y $B(-2,-3)$. Encontrar el área del segmento parabólico determinado por la parábola y la cuerda que pasa por A y B.

Solución:

Escribimos la ecuación de la parábola en la forma estándar:

$$y^2-16x-10y-71=0$$
$$y^2-10y+25=16x+71+25$$
$$(y-5)^2=16x+96$$
$$(y-5)^2=16(x+6),$$

La ecuación de la cuerda que une A con B es:

$$y+3=\frac{-3-21}{-2-10}(x+2)$$
$$y+3=2(x+2).$$

Encontramos las rectas tangentes a la parábola en $A(10,21)$ y en $B(-2,-3)$. El vértice de la parábola es $V(-6,5)$.

Como la parábola es horizontal utilizamos la fórmula:

$$y-y_1=\frac{y_1-k}{2(x_1-h)}(x-x_1)$$
$$y-y_1=\frac{y_1-5}{2(x_1+6)}(x-x_1).$$

- En $A(10,21)$:

$$y-21=\frac{21-5}{2(10+6)}(x-10)$$
$$y-21=\frac{1}{2}(x-10)$$
$$y=\frac{x}{2}+16.$$

- En $B(-2,-3)$:

$$y+3=\frac{-3-5}{2(-2+6)}(x+2)$$
$$y+3=-(x+2)$$
$$y=-x-5.$$

Ahora, para encontrar el tercer vértice C del triángulo que nos interesa, hallamos el punto de intersección de las dos tangentes. Para esto resolvemos el sistema:

$$y = \frac{x}{2} + 16$$
$$y = -x - 5,$$

de donde:

$$\frac{x}{2} + 16 = -x - 5$$
$$\frac{x}{2} + x = -16 - 5$$
$$x = -14.$$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación del sistema:

$$y = -(-14) - 5 = 9.$$

Por tanto, el punto de intersección de las tangentes es $C(-14, 9)$ (figura 5.65).

Para calcular el área del triángulo ABC utilizamos la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3\right),$$

donde $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ están enumerados en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

En este caso consideramos el triángulo orientado $A(10, 21)$, $C(-14, 9)$, $B(-2, -3)$:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left(10(9) - (-14)21 + (-14)(-3) - (-2)9 + (-2)21 - 10(-3)\right)$$
$$= 216.$$

Por tanto, el área del segmento parabólico es (figura 5.65):

$$\frac{2}{3}(216) = 144.$$

El área de un segmento parabólico es dos tercios del área del triángulo formado por la cuerda y las tangentes que pasan por los extremos de la cuerda. Ese triángulo es llamado de Arquímedes.

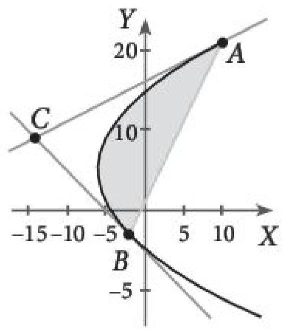


Figura 5.65

3. Trazar las dos tangentes a la parábola $(y+3)^2 = -12(x-5)$ desde el punto exterior $P(10, 3)$.

Solución:

La parábola $(y+3)^2 = -12(x-5)$ es horizontal y el vértice es $V(5, -3)$ (figura 5.66).

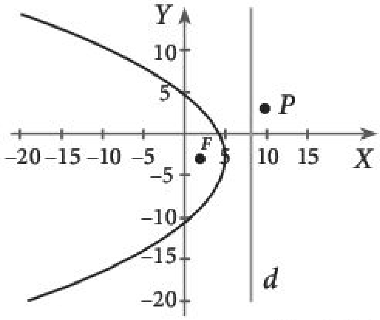


Figura 5.66

Supongamos que la recta buscada corta la parábola en el punto $Q(x_1, y_1)$. Sabemos que la ecuación de una recta tangente a una parábola horizontal en el punto $Q(x_1, y_1)$ es de la forma:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - x_1),$$

es decir, en este caso tenemos:

$$y - y_1 = \frac{y_1 + 3}{2(x_1 - 5)}(x - x_1).$$

Como esta recta debe pasar también por $P(10, 3)$, entonces este punto satisface la ecuación:

$$3 - y_1 = \frac{y_1 + 3}{2(x_1 - 5)}(10 - x_1)$$

$$x_1 - 5 = \frac{y_1 + 3}{2(3 - y_1)}(10 - x_1).$$

Además, el punto $Q(x_1, y_1)$ está en la parábola, así satisface su ecuación:

$$(y_1 + 3)^2 = -12(x_1 - 5)$$

$$\frac{(y_1 + 3)^2}{-12} = x_1 - 5$$

$$\frac{(y_1 + 3)^2}{-12} + 5 = x_1.$$

Sustituimos el valor de x_1 obtenido:

$$\frac{(y_1 + 3)^2}{-12} = \frac{y_1 + 3}{2(3 - y_1)}\left(10 - \left(\frac{(y_1 + 3)^2}{-12} + 5\right)\right)$$

$$\frac{(y_1 + 3)^2}{-12} = \frac{y_1 + 3}{2(3 - y_1)}\left(5 - \frac{(y_1 + 3)^2}{-12}\right)$$

$$\frac{y_1 + 3}{-12} = \frac{1}{2(3 - y_1)}\left(5 - \frac{(y_1 + 3)^2}{-12}\right)$$

$$(y_1 + 3)(y_1 - 3) = 6\left(5 + \frac{(y_1 + 3)^2}{12}\right)$$

$$(y_1-3)(y_1+3)=6\left(\frac{(y_1+3)^2+60}{12}\right)$$
$$y_1^2-9=\frac{(y_1+3)^2+60}{2}$$
$$2y_1^2-18=y_1^2+6y_1+69$$
$$y_1^2-6y_1-87=0,$$

de donde:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{6\pm\sqrt{36-4(1)(-87)}}{2} \\ &= \frac{6\pm\sqrt{4(9+87)}}{2} \\ &= 3\pm\sqrt{96} \\ &= 3\pm4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Así:

$$y_1=3+4\sqrt{6} \quad \text{o} \quad y_1=3-4\sqrt{6}.$$

Si $y_1=3+4\sqrt{6}$, entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5-\frac{(y_1+3)^2}{12} \\ &= 5-\frac{\left(3+4\sqrt{6}+3\right)^2}{12} \\ &= -6-4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Si $y_1=3-4\sqrt{6}$, entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5-\frac{(y_1+3)^2}{12} \\ &= 5-\frac{\left(3-4\sqrt{6}+3\right)^2}{12} \\ &= -6+4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Por tanto, hay dos puntos $C\left(-6-4\sqrt{6},\,3+4\sqrt{6}\right)\approx C(-15.798,\,12.798)$ y $D\left(-6+4\sqrt{6},\,3-4\sqrt{6}\right)\approx D(3.798,\,-6.798)$.

La recta que pasa por $Q_1\left(-6-4\sqrt{6}, 3+4\sqrt{6}\right)$ y $P(10, 3)$ tiene ecuación:

$$y-3=\frac{y_1+3}{2(x_1-5)}(x-10)$$

$$y-3=\frac{3+4\sqrt{6}+3}{2\left(-6-4\sqrt{6}-5\right)}(x-10)$$

$$y-3=-\frac{2\sqrt{6}+3}{4\sqrt{6}+11}(x-10),$$

y la recta que pasa por $Q_2\left(-6+4\sqrt{6}, 3-4\sqrt{6}\right)$ y $P(10, 3)$ tiene ecuación:

$$y-3=\frac{y_1+3}{2(x_1-5)}(x-10)$$

$$y-3=\frac{3-4\sqrt{6}+3}{2\left(-6+4\sqrt{6}-5\right)}(x-10)$$

$$y-3=-\frac{2\sqrt{6}-3}{4\sqrt{6}-11}(x-10).$$

Para encontrar estas rectas tangentes geométricamente procedemos de la siguiente manera:

1. Localizamos el vértice y el foco de la parábola.
2. Trazamos la directriz.
3. Encontramos la distancia r del foco al punto $P(10,3)$.
4. Trazamos un círculo con centro en $P(10,3)$ y radio r.
5. Encontramos los puntos A y B de intersección de este círculo con la directriz.
6. Localizamos el eje focal.
7. Trazamos dos rectas paralelas al eje focal, una que pase por A y otra que pase por B.
8. Determinamos los puntos C y D como los puntos de intersección de las rectas anteriores con la parábola.
9. Por último, trazamos las rectas que pasan por C y P, y D y P. Estas son las rectas tangentes buscadas.

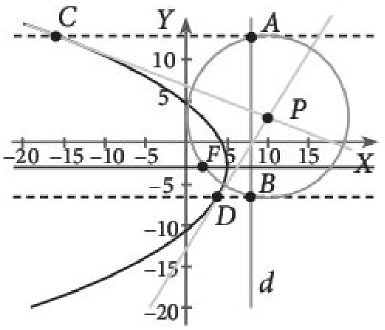


Figura 5.67

Ejemplos

Observación:
Todos los pasos que seguimos para hacer la construcción geométrica de las tangentes se pueden hacer analíticamente.

En resumen, la ecuación de la recta tangente en el punto $Q(x_1, y_1)$ es:

Si la parábola es horizontal: $$y-y_1=\frac{y_1-k}{2(x_1-h)}(x-x_1).$$

Si la parábola es vertical: $$y-y_1=\frac{2(y_1-k)}{x_1-h}(x-x_1). \qquad (5.22)$$

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado.

1. $3x^2 - y - 3 = 0;\ Q(4, 45)$.
2. $3y^2 + 2x = 0;\ Q\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.
3. $x^2 - 3y = 0;\ Q\left(2, \frac{4}{3}\right)$.
4. $y^2 - 4y - 12x - 20 = 0;\ Q\left(-\frac{5}{4}, -1\right)$.
5. $3y^2 + 6y - 4x - 5 = 0;\ Q(10, 3)$.
6. $x^2 + 4x - 8y - 20 = 0;\ Q(-2, -3)$.
7. $y^2 + x = 0;\ Q(-4, 2)$.
8. $y^2 + 5x + 5 = 0;\ Q(-6, 5)$.
9. $x^2 - 3x - 4y - \frac{7}{4} = 0;\ Q\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.
10. $2y^2 + 12y - x + 22 = 0;\ Q(36, 1)$.

11. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 - 8x - 6y - 39 = 0$ en los extremos de su lado recto. Muestra que dichas rectas son perpendiculares.
12. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 - 7x + 6y + 16 = 0$ en los puntos $Q\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y $Q'\left(\frac{11}{4}, -\frac{13}{2}\right)$. Encuentra las coordenadas del punto en el que se cortan las dos rectas y muestra que dicho punto está sobre la directriz de la parábola.
13. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 12x - 20y + 116 = 0$ en el punto $Q\left(4, \frac{21}{5}\right)$. Encuentra las coordenadas del punto P en el que se cortan dicha recta tangente y la directriz. Da las coordenadas del punto P' en el que se cortan la recta que contiene el lado recto y la recta tangente que encontraste. Muestra que si F es el foco de la parábola, entonces $d(P, F) = d(P', F)$.
14. Traza las dos tangentes a la parábola $x^2 - 12y - 60 = 0$ desde el punto exterior $P(0, -8)$.

Para encontrar las ecuaciones de las tangentes a una parábola trazadas desde un punto exterior (x_0, y_0), llamamos (x_1, y_1) a cualquiera de los puntos donde corta la parábola, evaluamos la ecuación de la parábola en (x_1, y_1) y evaluamos en (x_0, y_0) la ecuación de la tangente que pasa por (x_1, y_1), después resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones así obtenidas para encontrar los valores x_1 y y_1.

Ecuaciones paramétricas de la parábola

Un móvil recorre una curva de manera que en cada instante t su abscisa vale $t + 3$ y su ordenada vale $t^2 - 4t + 7$. Describir la curva recorrida por el móvil.

Solución:

Tenemos una función de un intervalo de tiempo en el plano, de manera que a cada instante le corresponde un punto en el plano, el punto en donde se encuentra el móvil en ese momento.

Para cada t tenemos dos funciones:

$$x(t) = t + 3$$
$$y(t) = t^2 - 4t + 7$$

que describen la abscisa y la ordenada del punto donde está el móvil en el instante t.

Trazando algunos puntos advertimos que la curva parece ser una parábola. Veamos que en efecto esto es así (figura 5.68).

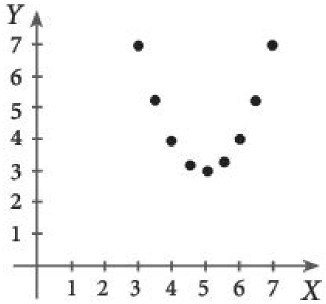


Figura 5.68

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	6.26
y	7	5.25	4	3.25	3	3.25	4	5.25	7

Si despejamos t de la primera ecuación, obtenemos:

$$t = x - 3.$$

Sustituimos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 4t + 7 \\ &= (x-3)^2 - 4(x-3) + 7 \\ &= x^2 - 10x + 28 \end{aligned}$$

y obtenemos la ecuación de una parábola. Para encontrar sus elementos, la escribimos en la forma estándar:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 28 &= y \\ x^2 - 10x &= y - 28 \\ x^2 - 10x + 25 &= y - 28 + 25 \\ (x-5)^2 &= y - 3, \end{aligned}$$

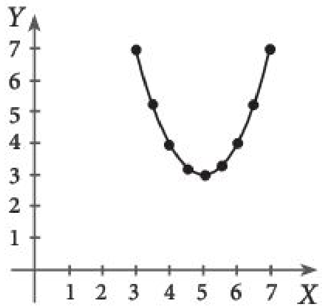


Figura 5.69

así que es una parábola vertical, que abre hacia arriba (figura 5.69). Su vértice está en $V(5,3)$, $p = \frac{1}{4}$ y, por tanto, su foco está en $F\left(5, \frac{13}{4}\right)$.

En general, si para una de las variables, digamos x, se cumple $x = at + b$ con $a \neq 0$, y para la otra variable, en este caso y, se tiene $y = At^2 + Bt + C$ con $A \neq 0$, entonces al despejar t de la ecuación lineal: $t = \frac{x}{a} - b$ y sustituir en la ecuación cuadrática:

$$y = A\left(\frac{x}{a} - b\right)^2 + B\left(\frac{x}{a} - b\right) + C$$

obtenemos la ecuación de una parábola, en este caso vertical.

En particular, una manera fácil de parametrizar una parábola a partir de su ecuación general es utilizar como parámetro la variable que está elevada al cuadrado. Así, si:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

es la ecuación de una parábola vertical, hacemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= At^2 + Bt + C \end{aligned}$$

para obtener sus *ecuaciones paramétricas*. Se procede de manera similar para las parábolas horizontales.

Ejemplos

1. Parametrizar la parábola $y = x^2 - 10x + 28$.

Solución:
Llamamos $t = x$, sustituimos en la ecuación y obtenemos:

$$y = t^2 - 10t + 28,$$

así que:

$$x(t) = t$$
$$y(t) = t^2 - 10t + 28$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola.

Observa que ésta es una parametrización diferente de la parábola del ejemplo inicial. Aquí, el móvil está en $(0, 28)$ en el instante $t = 0$, en tanto que en el ejemplo inicial el móvil está en $(3, 7)$ en el tiempo $t = 0$ (figura 5.70).

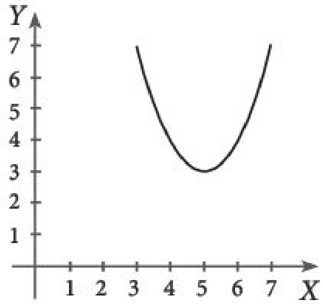


Figura 5.70

2. Parametrizar la parábola $(y-2)^2 = 4(x-8)$.

Solución:
Despejamos x, que es la variable que no está elevada al cuadrado:

$$4(x-8) = (y-2)^2$$
$$x = \frac{1}{4}(y-2)^2 + 8.$$

Hacemos:

$$y(t) = t$$
$$x(t) = \frac{1}{4}(t-2)^2 + 8$$

y obtenemos unas ecuaciones paramétricas de la parábola (figura 5.71).

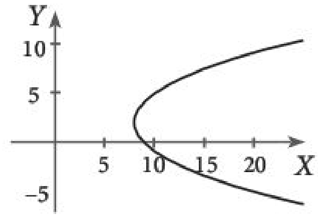


Figura 5.71

La siguiente rutina en Visual Basic dibuja la parábola $y = x^2$:

```
Escala = 5000
PSet (0, 0)
For k=0 To 100
t=k/100
x=Escala*t
y=Escalat*t
Line -(x, y)
Next
```

Conforme k toma los valores 0, 1, 2... 100, el parámetro t toma valores entre 0 y 1. La variable Escala permite dibujar la parábola del tamaño deseado en la pantalla.

En resumen:

Posición	Ecuación	Paramétricas
Horizontal	$x = Ay^2 + By + C$	$x(t) = At^2 + Bt + C$ $y(t) = t$
Vertical	$y = Ax^2 + Bx + C$	$x(t) = t$ $y(t) = At^2 + Bt + C$

A partir de la ecuación general de una parábola se le puede parametrizar usando como parámetro la variable que está elevada al cuadrado. Así, por ejemplo, una parametrización de la parábola horizontal $x = Ay^2 + By + C$ es la dada por las ecuaciones:

$y(t) = t$

$x(t) = At^2 + Bt + C.$

Ejercicios

En cada caso, parametriza la parábola con la ecuación dada.

1. $x = y^2 - 12y + 25.$
2. $2y = x^2 - 6x + 4.$
3. $(y+5)^2 = -4\left(\frac{3}{2}\right)(x+1).$
4. $(y-6)^2 = \frac{1}{4}(x+5).$
5. $(x+3)^2 = -10(y+4).$
6. $(x-11)^2 = 4(y-7).$

En cada caso, escribe la ecuación cartesiana de la parábola que corresponde a las ecuaciones paramétricas dadas.

7. $\left(t, \frac{1}{2}t^2 + 5t - 16\right).$
8. $\left(t, -\frac{1}{4}t^2 + 6t + 12\right).$
9. $\left(\frac{1}{2}t^2 + 5t - 16, t\right).$
10. $\left(-\frac{1}{4}t^2 + 6t + 4, t\right).$
11. $\left(-\frac{1}{8}t^2 + t, t\right).$
12. $\left(t, -\frac{1}{7}t^2 + t\right).$

Resolución de problemas

Lugares geométricos

En este apartado veremos algunos problemas que involucran lugares geométricos relacionados con las parábolas.

Encuentra el lugar geométrico de los puntos (x,y), tales que $x - 8$ más su distancia al punto $Q(2,0)$ sea 10.

Solución:
Llamemos ℓ a la recta $x = 8$ y $P(x,y)$ a un punto de dicho lugar geométrico. Las condiciones del problema nos dicen que:

$$d(P,Q) + x - 8 = 10.$$

La distancia dirigida de P a ℓ es $(x-8)$, ya que la recta $x - 8 = 0$ está orientada naturalmente:

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + (x-8) = 10.$$

Dejamos el radical en un lado de la ecuación y elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + y^2 &= (10 - (x-8))^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 324 - 36x + x^2 \\ y^2 &= -32x + 320 \\ y^2 &= -4(8)(x-10) \end{aligned}$$

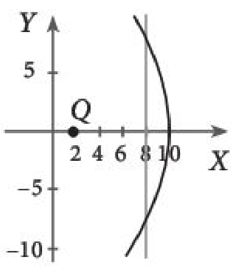


Figura 5.72

que es la parábola horizontal con vértice en $V(10,0)$; abre hacia la izquierda y $p = 8$, por lo que el foco está en $Q(2,0)$ (figura 5.72).

Consideremos la parábola $y^2 = 12(x+3)$ y el punto $P(2,0)$. Dado un punto $Q(x_1, y_1)$ en la parábola, tracemos por P una recta, ℓ, paralela a la recta tangente a la parábola en Q. Conforme Q se mueve a lo largo de la parábola, ¿cuál es el lugar geométrico descrito por el punto M en el que se cortan la recta ℓ y la recta que une Q con el foco de la parábola?

Solución:
De acuerdo con (5.17), la pendiente de la recta tangente a la parábola que pasa por Q es:

$$m = \frac{y_1}{2(x_1+3)}.$$

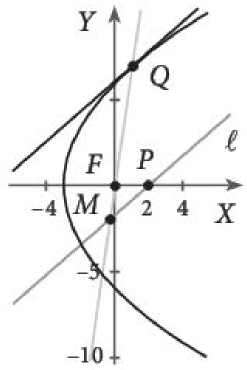


Figura 5.73

La recta paralela a dicha tangente que pasa por $P(2,0)$ es:

$$y = \frac{y_1}{2(x_1+3)}(x-2).$$

La recta que une Q con el foco $F(0,0)$ es:

$$y = \frac{y_1}{x_1}x.$$

Igualamos las dos últimas ecuaciones para encontrar el punto $M(x_M, y_M)$ donde se cortan estas dos rectas:

$$\frac{y_1}{2(x_1+3)}(x-2) = \frac{y_1}{x_1}x.$$

Despejamos x,

$$\boxed{x_M = -\frac{2x_1}{x_1+6}} \tag{5.23}$$

y la sustituimos en cualquiera de las dos rectas para encontrar y:

$$\boxed{y_M = -\frac{2y_1}{x_1+6},} \tag{5.24}$$

así, el punto buscado, M, tiene coordenadas:

$$M\left(-2\frac{x_1}{x_1+6}, -2\frac{y_1}{x_1+6}\right).$$

Para saber qué curva describe M cuando $Q(x_1, y_1)$ recorre la parábola, observamos que:

$$x_M^2 + y_M^2 = \left(-2\frac{x_1}{x_1+6}\right)^2 + \left(-2\frac{y_1}{x_1+6}\right)^2 = 4\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{(x_1+6)^2}\right).$$

Como el punto Q está en la parábola $y^2 = 12(x+3)$, se satisface que:

$$\boxed{y_1^2 = 12(x_1+3)} \tag{5.25}$$

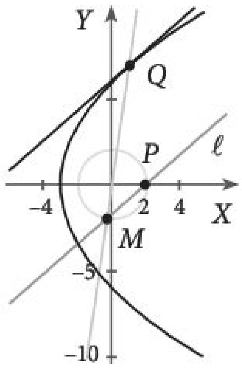


Figura 5.74

y, por tanto,

$$x_M^2 + y_M^2 = 4\left(\frac{x_1^2+12(x_1+3)}{(x_1+6)^2}\right) = 4,$$

así que M está en el círculo de radio 2 con centro en el origen que es el foco de la parábola. Observa que la distancia del origen al punto P es 2.

Otra manera de llegar a esta conclusión es despejar y_1 de (5.24), sustituirlo en la ecuación de la parábola (5.25), después despejar x_1 de (5.23) y sustituirlo también en (5.25). Al simplificar, obtenemos nuevamente la ecuación del círculo (figura 5.74):

$$x^2 + y^2 = 4$$

Pensamiento crítico

¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta ℓ y de un punto P que pertenece a ℓ?

Ejercicios

1. Encuentra el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias al punto $F(3,0)$ y a la recta $x = 7$ sea 10. Considera que la distancia a la recta es distancia dirigida y que la recta está orientada naturalmente.
2. Repite el último ejemplo del apartado con la parábola $y^2 = 16(x+4)$ y el punto $P(2,0)$.
3. Observa que en el último ejemplo del apartado y en el ejercicio anterior se obtuvo el mismo círculo; es decir, el radio del círculo es la distancia de P al foco y no depende de la apertura de la parábola. Intenta demostrar que, en general, esto es cierto.
4. Dada la parábola $y^2 = 8(x+2)$ con foco en el origen, por cada punto Q en la parábola, considera la recta tangente a la parábola y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a dicha tangente. Describe el lugar geométrico formado por el punto de intersección de dichas rectas cuando Q recorre la parábola.

Mundo virtual

Geolab

1. **Parábola dados foco y directriz.** Construye la parábola cuyo foco es $F(-5,0)$ y su directriz es $x = 5$. Para ello construye primero el foco y la directriz, y después utiliza el constructor *Parábola: Foco Directriz* del menú de cónicas.
2. **Parábola dados foco y vértice.** Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $V(5,-2)$ y su foco en $F(5,-4)$. Observa que Geolab no tiene un constructor para hacer una parábola dados el foco y el vértice, así que con los datos que tienes debes construir la directriz para después utilizar la construcción de foco y directriz. La directriz es una recta perpendicular al eje de la parábola y está a la misma distancia del vértice que el foco, pero del lado opuesto. Construye la recta, e, que pasa por V y F, y el círculo, c, con centro en V que pasa por F. Construye la intersección del círculo y la recta que está del otro lado de F. Llámala D. Construye la recta, d, perpendicular a e que pasa por D. Esta es la directriz. Por último, construye la parábola con foco F y directriz d.
3. **Parábola calculada.** Encuentra los elementos de la parábola cuya ecuación es $12x - y^2 + 10y - 61 = 0$. Para construir una parábola dada su ecuación, utiliza el constructor *Calculada* del menú de cónicas. Llama p a la parábola y asigna los siguientes valores a los coeficientes de la ecuación: $A = 0$, $B = 0$, $C = -1$, $D = 12$, $E = 10$, $F = -61$. En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor en el renglón de la parábola y oprime el botón de datos para ver toda la información pertinente.
4. **Intersección de recta y parábola.** Encuentra los puntos de intersección de la recta $x + y - 1 = 0$ con la parábola $x^2 - 4x - y + 1 = 0$. Construye la parábola p cuya ecuación es $x^2 - 4x - y + 1 = 0$ y la recta m cuya ecuación es $x + y - 1 = 0$, para ello utiliza el constructor *Calculada* del menú de cónicas y de rectas, respectivamente. Construye el punto $P1$ usando *Intersección de recta y cónica por ratón* del menú de puntos. Elige el punto en la lista de la derecha y arrastra el ratón en la pantalla. Observa que el punto persigue el cursor y se pone en la intersección más cercana al cursor. En la ventana de datos analíticos puedes ver sus coordenadas. Construye un punto auxiliar, A, cualquiera. Ahora construye el punto $P2$ utilizando *Intersección de recta y cónica del mismo lado de un punto*. Ahora mueve el punto A en la pantalla y observa cómo el punto $P2$ se pone en la intersección más cercana al punto A.
5. **Familia de parábolas.** Dibuja parábolas que tengan su foco en el eje X y cuya directriz sea el eje Y. Construye la recta d con ecuación $x = 0$ y un escalar $t = -10$. Construye el punto F cuyas coordenadas sean $(t,0)$. Utiliza el constructor *Punto calculado*. Dale los valores $x = t$, $y = 0$. Construye la parábola p con foco F y directriz d. Ahora construye una animación. Anima el punto t entre -10 y 10. En la pantalla gráfica, ejecuta la animación para ver cómo varían las parábolas. Si quieres que se queden dibujadas todas las parábolas, en la pantalla de datos analíticos indica

que la parábola deje traza y, en la pantalla gráfica, selecciona el botón que está en el margen izquierdo junto a la letra T. Ejecuta la animación nuevamente.

6. **Recta tangente a una parábola.** Dada la parábola cuyo foco es $F(2,3)$ y cuya directriz es $x+y+1=0$, encuentra la recta tangente a ella que pasa por el punto $P(-1,-1)$. Utiliza el constructor *Tangente a cónica por ratón*. Una vez construida la tangente, elígela en la tabla de la derecha de la pantalla y arrástrala con el ratón de uno a otro lado de la parábola. Construye otro punto Q cualquiera y ahora construye la tangente a la parábola desde P, usa el constructor *Tangente a cónica del mismo lado de un punto*. Mueve el punto Q y observa cómo lo persigue la tangente.
7. **Parábola tangente a cuatro rectas.** Dadas cuatro rectas, dos de ellas no paralelas, hay una única parábola que es tangente a ellas. Construye cuatro rectas y la parábola tangente a ellas. ¿Qué sucede cuando dos de las rectas son paralelas?
8. **Tangentes desde un punto exterior.** Define la cónica calculada $y^2+12x+6y-51=0$ y el punto directo $P(10,3)$. Encuentra la directriz d de la parábola. Localiza el foco F de la parábola y determina la distancia r entre P y F. Traza el círculo con centro en P y radio r. Determina los puntos A y B de intersección del círculo con la directriz. Determina el eje focal y traza una recta paralela a este que pase por A. Análogamente traza otra recta paralela al eje focal y que pase por B. Determina los puntos C y D que son las intersecciones de estas dos últimas rectas con la parábola. Por último, traza las rectas que pasan por P y C y por P y D. Para comprobar que son las rectas tangentes, traza la recta tangente a la parábola en el punto C y en el punto D.

Geolab

Resumen de la unidad

- Parábolas con vértice en el origen y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos.

Posición	Abre hacia	Ecuación	Directriz	Vértice	Foco
Vertical	arriba	$x^2=4py$	$y=-p$	$V(0,0)$	$F(0,p)$
Vertical	abajo	$x^2=-4py$	$y=p$	$V(0,0)$	$F(0,-p)$
Horizontal	la derecha	$y^2=4px$	$x=-p$	$V(0,0)$	$F(p,0)$
Horizontal	la izquierda	$y^2=-4px$	$x=p$	$V(0,0)$	$F(-p,0)$

- Extremos del lado recto.
  - Vertical:
    Foco $F(0,p)$: $(2p,p)$ y $(-2p,p)$.
    Foco $F(0,-p)$: $(2p,-p)$ y $(-2p,-p)$.
  - Horizontal:
    Foco $F(p,0)$: $(p,2p)$ y $(p,-2p)$.
    Foco $F(-p,0)$: $(-p,2p)$ y $(-p,-2p)$.

- Ecuación de la tangente de la parábola con vértice en $V(0,0)$ en un punto $Q(x_1, y_1)$.
  - Vertical: $y - y_1 = \dfrac{2y_1}{x_1}(x - x_1)$.
  - Horizontal: $y - y_1 = \dfrac{y_1}{2x_1}(x - x_1)$.

- Parábolas con vértice en $V(h,k)$ y directriz paralela a uno de los ejes cartesianos.

Posición	Abre hacia	Ecuación	Directriz	Vértice	Foco
Vertical	arriba	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	$y = k - p$	$V(h,k)$	$F(h,k+p)$.
Vertical	abajo	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	$y = k + p$	$V(h,k)$	$F(h,k-p)$.
Horizontal	la derecha	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	$x = h - p$	$V(h,k)$	$F(h+p,k)$.
Horizontal	la izquierda	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	$x = h + p$	$V(h,k)$	$F(h-p,k)$.

- Extremos del lado recto.
  - Vertical:
    Foco $F(h,k+p)$: $(h+2p,k+p)$ y $(h-2p,k+p)$.
    Foco $F(h,k-p)$: $(h+2p,k-p)$ y $(h-2p,k-p)$.
  - Horizontal:
    Foco $F(h+p,k)$: $(h+p,k+2p)$ y $(h+p,k-2p)$.
    Foco $F(h-p,k)$: $(h-p,k+2p)$ y $(h-p,k-2p)$.

- Ecuación de la recta tangente con vértice en $V(h,k)$ en un punto $Q(x_1, y_1)$.
  - Vertical: $y - y_1 = \dfrac{2(y_1 - k)}{x_1 - h}(x - x_1)$.
  - Horizontal: $y - y_1 = \dfrac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - x_1)$.

- Ecuación general de una parábola con eje:
  - Vertical: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$.
  - Horizontal: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

- Regiones del plano determinadas por una parábola:
  - Un punto $P(x, y)$ está en la parábola si satisface:

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h) \quad \text{o} \quad (x-h)^2 = \pm 4p(y-k), \text{ donde } p > 0$$

  según sea el tipo de parábola.

  - Un punto $P(x, y)$ está dentro de la parábola si satisface la desigualdad:

$$(y-k)^2 < \pm 4p(x-h) \quad \text{o} \quad (x-h)^2 < \pm 4p(y-k), \text{ donde } p > 0$$

  según sea el tipo de parábola. Es decir, el miembro al cuadrado es menor que el miembro lineal.

  - Un punto $P(x, y)$ está fuera de la parábola si satisface la desigualdad:

$$(y-k)^2 > \pm 4p(x-h) \quad \text{o} \quad (x-h)^2 > \pm 4p(y-k), \text{ donde } p > 0$$

  según sea el tipo de parábola. Es decir, el miembro al cuadrado es mayor que el miembro lineal.

- Unas ecuaciones paramétricas de la parábola.
  - Si es horizontal: $x = Ay^2 + By + C$: $x(t) = At^2 + Bt + C$, $y(t) = t$.
  - Si es vertical: $y = Ax^2 + Bx + C$: $x(t) = t$, $y(t) = At^2 + Bt + C$.

Ejercicios de repaso

1. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que equidisten del eje Y y del punto $Q(2,3)$.
2. Encuentra la ecuación de la parábola cuyo vértice es el centro del círculo $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ y la directriz es $x = 2$.
3. Da el vértice, el foco y la directriz de la parábola $x^2 - 6x - 4y + 1 = 0$.
4. La suma de las áreas de dos cuadrados es 13 cm^2. Si el lado de uno de ellos es $\frac{3}{4}$ del área del otro, ¿cuánto miden los perímetros de los cuadrados?
5. Encuentra la ecuación de la parábola vertical que abre hacia abajo, cuyo vértice es el centro del círculo $x^2 + y^2 - 14y + 40 = 0$, y la distancia del vértice a la directriz es 6.

6. Halla la ecuación de la recta perpendicular a la directriz de la parábola $y^2 + 8x - 10y + 49 = 0$ en el punto $P(-1, 7)$.
7. Considera la parábola $y^2 - x = 0$. Determina la ecuación de la recta tangente en el punto $P(1, 1)$. Da la ecuación de la recta perpendicular a la tangente que pasa por P. Encuentra el punto donde se cortan ambas rectas con el eje X. Si A y B son los puntos obtenidos, demuestra que estos equidistan del foco de la parábola.
8. Encuentra los puntos donde se cortan la parábola $y^2 - x = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
9. Comprueba que las rectas tangentes a la parábola $x^2 + 6x + 8y - 7 = 0$ en los puntos $P(1,0)$ y $Q(-7,0)$ son perpendiculares entre sí.
10. Demuestra que el círculo con centro en $C\left(\frac{17}{32}, \frac{3}{8}\right)$ y radio $r = \frac{25}{32}$ es tangente a la directriz de la parábola $y^2 - x = 0$.
11. Encuentra los puntos donde se cortan las parábolas $y^2 + 32x - 256 = 0$ y $y^2 - 8x - 16 = 0$.
12. Halla el punto de la parábola $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$ en el que la recta tangente tiene pendiente igual a $-\frac{1}{2}$.
13. Considera la parábola $x^2 - y = 0$.
    a. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como diámetro la cuerda de la parábola que pasa por el punto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y el foco de la parábola.
    b. Encuentra la ecuación del círculo que tiene como diámetro la cuerda de la parábola que pasa por el punto $Q(1, 1)$ y el foco de la parábola.
14. Considera la parábola $x^2 + 12x + 12y + 48 = 0$. Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(-2, -\frac{7}{3}\right)$. Da el punto en donde se cortan la recta tangente y el eje de la parábola, y llámalo Q. Encuentra las coordenadas del foco F de la parábola. Demuestra que el triángulo QFP es isósceles.
15. Considera la parábola $y^2 - 2x = 0$. Halla la ecuación de la recta tangente en el punto $P(2,2)$. Después encuentra la ecuación de la recta perpendicular a la recta tangente en el punto P. Demuestra que el punto en donde se cortan la última recta y el eje X tiene coordenadas $(3,0)$.
16. Considera la parábola $x^2 - 6y = 0$. Encuentra la ecuación de la recta tangente en el punto $P(6,6)$. Encuentra las coordenadas del foco. Demuestra que el ángulo formado entre la recta tangente y la recta que une a P con el foco es igual al ángulo que forma la recta paralela al eje Y, que pasa por P, con la tangente.
17. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos en donde se cortan las parábolas $x^2 - 12x - 4y + 44 = 0$ y $y^2 - 5x - 4y + 34 = 0$.
18. Dibuja la región que está dentro del círculo $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 57 = 0$, fuera de la parábola $x^2 - 12x + 8y + 4 = 0$ y abajo de la recta $2x - 5y + 7 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.
19. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan del círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 10x + 8y + 32 = 0$ y de la recta $y = 6$. Sugerencia: Si $P(x, y)$ es un punto que no se encuentra sobre el círculo, entonces la distancia de P al círculo es la distancia de P al centro del círculo menos el radio de él.
20. Da el ángulo de tiro del cañón del problema 15 de la página 236.
21. Encuentra el ángulo de tiro de la bala del problema 16 de la página 236.
22. Halla el ángulo de tiro del cañón del problema 17 de la página 236.

Autoevaluación

1. Encuentra la directriz de la parábola $x^2 - 12y = 0$.
   a. $y = 3$.
   b. $y = -3$.
   c. $x = 3$.
   d. $y = 12$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 211.
2. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en $(-5, 0)$.
   a. $y^2 + 20x = 0$.
   b. $y^2 + 5x = 0$.
   c. $y^2 = 20x$.
   d. $x^2 = -20y$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 213.
3. Encuentra la ecuación de la parábola horizontal con vértice en $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(-3, 5)$.
   a. $7x^2 - 14x - 16y - 25 = 0$.
   b. $4y^2 + 9x - 16y + 7 = 0$.
   c. $4y^2 + 49x + 16y - 33 = 0$.
   d. $4y^2 - 49x - 40y - 47 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 224.
4. Encuentra la ecuación de la parábola con foco en $(3, 5)$ que abre hacia arriba y tiene ancho focal igual a 20.
   a. $y^2 + 20x - 10y - 35 = 0$.
   b. $x^2 - 6x - 20y + 9 = 0$.
   c. $x^2 - 6x + 20y + 9 = 0$.
   d. $y^2 - 20x - 10y + 85 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 224.
5. Encuentra el foco de la parábola $y^2 - 12x - 6y - 15 = 0$.
   a. $(1, 3)$.
   b. $(-2, 3)$.
   c. $(3, 1)$.
   d. $(1, -3)$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 224.
6. El punto P es una intersección de la parábola $x^2 - 10x - y + 24 = 0$ y la recta $y = x - 4$.
   a. $P(3, 7)$.
   b. $P(4, 1)$.
   c. $P(0, -4)$.
   d. $P(7, 3)$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 225.
7. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 + 8x - y + 15 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 3)$.
   a. $-x + 4y + 11 = 0$.
   b. $4x + y + 11 = 0$.
   c. $4x - y + 11 = 0$.
   d. $-4x + y + 5 = 0$.
   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 251.

Heteroevaluación

1. Encuentra la directriz de la parábola $5y^2 - 12x - 50y + 101 = 0$.

2. Encuentra la ecuación de la parábola vertical con vértice en $(-7, 3)$ y que pasa por el punto $(-1, 6)$.

3. Encuentra la ecuación de la parábola con foco en $\left(\frac{19}{4}, -1\right)$ que abre hacia la izquierda y tiene ancho focal igual a 5.

4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la parábola $x^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ cuyo punto de tangencia es el foco de la parábola $y^2 - 24x + 7y - \frac{47}{4} = 0$.

Galaxia elíptica 87.

Unidad 6 La elipse

En esta unidad presentamos la elipse como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Con la ayuda de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos encontramos la ecuación de este lugar geométrico. También proporcionamos métodos matemáticos y físicos para dibujar una elipse.

Explicamos el concepto de excentricidad y damos la definición de la elipse en términos de un foco y una directriz.

Enunciamos y demostramos la propiedad de reflexión de la elipse: una onda que emana de uno de sus focos se reflejará en su otro foco. A esta propiedad se le han dado usos ópticos, acústicos y de calentamiento. En el caso acústico, un ejemplo es la Cámara del Secreto construida en el siglo XVIII por los frailes carmelitas y que está ubicada en San Ángel, al sur de la capilla de Chimalistac en la Ciudad de México. Así se le llama porque el sonido producido en susurro en un punto de ella se reproduce audiblemente en otro punto.

La primera ley de Kepler, la cual establece que los planetas se mueven en órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol, es quizás el resultado que más popularidad ha dado a esta curva.

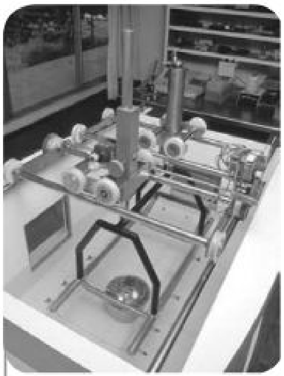
En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

La elipse

- Definición de la elipse
- Elipse con centro en el origen
  - Elipse horizontal
  - Elipse vertical
- Construcción de la elipse
  - Sugerencias para trazar una elipse
  - Construcción de la elipse con el uso de instrumentos
- La excentricidad de la elipse
- Otra manera de definir elipse. Directrices de la elipse
- Elipses con eje focal paralelo a un eje cartesiano
  - Directrices de una elipse con centro en $C(h,k)$
- Algunas aplicaciones de la elipse
  - Propiedad de reflexión de la elipse
  - Arquitectura
  - Medicina
  - Astronomía
- Otra interpretación de la definición de la elipse
- Desigualdades y la elipse
- Recta tangente a una elipse
- Ecuaciones paramétricas de la elipse
- Resolución de problemas
  - Lugares geométricos

Definición de la elipse

Un grupo de investigadores de la UNAM, encabezados por los doctores Dr. Achim M. Loske y Fernando E. Prieto Calderón, hizo un aparato para disolver cálculos renales en perros que llamaron Mexilit. Es un generador de ondas de choque del tipo electrohidráulico que consiste, en una tina de fibra de vidrio en cuyo centro está un reflector de acero inoxidable con forma de semielipsoide.



Mexilit, aparato inventado por investigadores mexicanos

Encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a $F'(-3, 0)$ y a $F(3, 0)$ sea 10.

Solución:

Llamemos $P(x, y)$ a un punto de dicho lugar geométrico.

Debemos sumar la distancia de P a F' y la de P a F e igualar a 10.

$$\boxed{d(P, F') + d(P, F) = 10.} \tag{6.1}$$

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1):

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

La elipse está formada por todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es igual a una constante.

Su ecuación se obtiene sumando las distancias de un punto genérico (x, y) a los focos dados e igualando a la constante.

Sustituimos las coordenadas de F' y F en (6.1):

$$\sqrt{(x-(-3))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = 10$$

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} = 10.$$

Pasamos una de las raíces cuadradas al otro lado de la igualdad y elevamos todo al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2} = 10 - \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2 + 6x + 9 + y^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2.$$

En el lado derecho dejamos únicamente la raíz, simplificamos y de nuevo elevamos al cuadrado:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - \left(109 + x^2 - 6x + y^2\right) = -20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}$$

$$4(3x - 25) = -20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}$$

$$(3x - 25)^2 = \left(-5\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}\right)^2$$

$$9x^2 - 150x + 625 = 25x^2 - 150x + 225 + 25y^2.$$

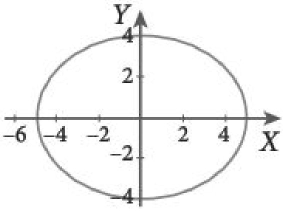


Figura 6.1

Pasamos todo a un lado de la igualdad y obtenemos que el lugar geométrico deseado es el conjunto de puntos que satisface la ecuación:

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

Una *elipse* es el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Estos dos puntos fijos se llaman *focos* de la elipse. El punto medio localizado entre los dos focos se llama *centro* de la elipse. En el ejemplo anterior, los focos son $F'(-3, 0)$ y $F(3, 0)$, y el centro es $C(0, 0)$.

Elipse con centro en el origen

Elipse horizontal

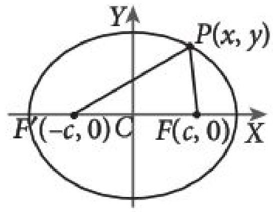


Figura 6.2

Comencemos con el análisis de una elipse con centro en el origen y focos en el eje X. Supongamos que las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la elipse, debe satisfacer:

$$d(P,F) + d(P,F\ ) = k,$$

donde k es una constante positiva preestablecida (figura 6.2).

Sustituimos las coordenadas de P, F y F' en la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1) y obtenemos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = k.$$

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(k - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

simplificamos y obtenemos:

$$\boxed{-4cx + k^2 = 2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.} \qquad (6.2)$$

Volvemos a elevar al cuadrado para eliminar el otro radical y simplificamos nuevamente:

$$\left(4k^2 - 16c^2\right)x^2 + 4k^2y^2 = k^4 - 4k^2c^2.$$

Para poder seguir simplificando, observemos la figura 6.3.

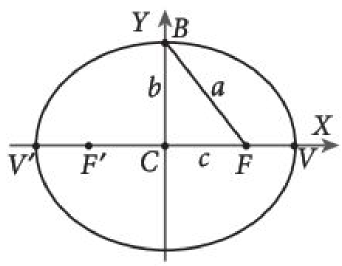


Figura 6.3

El triángulo rectángulo FBC tiene uno de sus catetos igual a c, que es la primera coordenada de F. Llamemos b al otro cateto y a a la hipotenusa. Como el punto B pertenece a la elipse, la suma de las distancias de B a F y a F' es igual a k, pero, por otro lado, es igual a $2a$, ya que el triángulo $F'FB$ es isósceles. Así que si sustituimos $k = 2a$ en la ecuación anterior y simplificamos, obtenemos:

$$\left(4(2a)^2 - 16c^2\right)x^2 + 4(2a)^2 y^2 = (2a)^4 - 4(2a)^2 c^2$$

$$\left(16a^2 - 16c^2\right)x^2 + 16a^2 y^2 = 16a^4 - 16a^2c^2$$

$$\left(a^2 - c^2\right)x^2 + a^2 y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right),$$

luego dividimos toda la ecuación entre $a^2\left(a^2 - c^2\right)$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.} \qquad (6.3)$$

Observación:
Cuando estudiemos la hipérbola obtendremos el mismo tipo de ecuación, pero con diferente relación entre a y c.

Al aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo BCF de la figura (6.3) obtenemos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2,} \qquad (6.4)$$

Una elipse horizontal con centro en el origen tiene ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

luego sustituimos $b^2 = a^2 - c^2$ en la ecuación (6.3) y obtenemos la *forma simétrica* de la ecuación de la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (6.5)$$

Así que (6.3) es la ecuación común de la hipérbola y la elipse. Será elipse cuando $a > c > 0$, e hipérbola cuando $a < c$.

Si multiplicamos la ecuación (6.5) por a^2b^2 y pasamos todos los términos al primer miembro, nos queda la ecuación de la elipse en la *forma general:*

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Ahora veamos algunos de los elementos principales de la ecuación (figura 6.4).

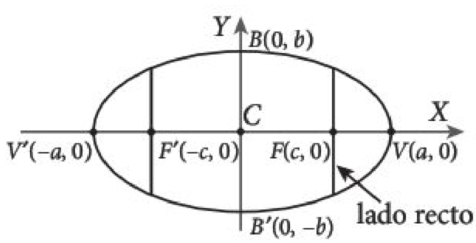


Figura 6.4

- Al sustituir $x = 0$ en la ecuación de la elipse (6.4), encontramos que $y = \pm b$, así que las coordenadas de B y B' son $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$.

- Al sustituir $y = 0$, obtenemos que $x = \pm a$, así que las coordenadas de V y V' son $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$. Los puntos V y V' se llaman *vértices* de la elipse.
- Las rectas VV' y BB' son ejes de simetría de la curva y se llaman *ejes principales*.
- El segmento VV' también se llama *eje mayor* o *eje focal*; su longitud es el *diámetro mayor* y vale $2a$.
- El segmento BB' también se llama *eje menor* o *eje no focal*; su longitud se llama *diámetro menor* y vale $2b$.
- La distancia entre los dos focos, F y F', se llama *distancia focal* y vale $2c$.
- La distancia del centro a los vértices se llama *semieje mayor* y vale a; la distancia del centro a los extremos del diámetro menor se llama *semieje menor* y vale b.
- La cuerda que pasa por un foco y es perpendicular al eje mayor se llama *lado recto*.

Para encontrar la longitud del lado recto, en la ecuación (6.5) hacemos $x = c$, que es la abscisa de uno de los focos, y obtenemos:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

como $c^2 = a^2 - b^2$, obtenemos:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Simplificamos y despejamos y^2:

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}, \quad \text{de donde} \quad y = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Por lo que los puntos:

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } \left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F(c, 0)$, y la longitud del lado recto es $\dfrac{2b^2}{a}$.

De igual manera,

$$\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \text{ y } \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F'(-c, 0)$ y, por supuesto, la longitud del segmento que determinan es también $\dfrac{2b^2}{a}$.

Elipse vertical

Si la elipse tiene su centro en el origen y sus focos están en el eje Y, entonces las coordenadas de los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$. Si nuevamente llamamos $2a$ a la

Una elipse vertical con centro en el origen tiene ecuación de la forma $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

constante k que es la suma de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la elipse a los focos y hacemos un análisis similar al anterior, o simplemente intercambiamos los papeles de x y y, llegamos a la ecuación:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,} \tag{6.6}$$

donde, como antes, $b^2 = a^2 - c^2$ (figura 6.5).

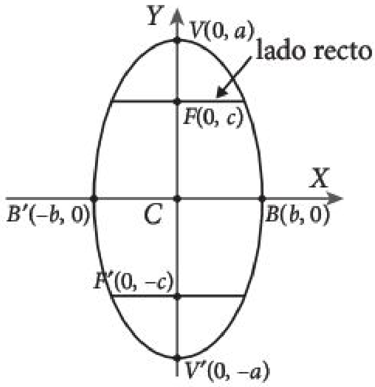


Figura 6.5

Los vértices son ahora $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$.

Observa que etiquetamos como a a la distancia del centro a los vértices, independientemente de que la elipse sea horizontal o vertical.

En cualquier elipse $a \geq b$.

En resumen:

El círculo es un caso especial de elipse, se obtiene cuando los dos focos coinciden, siendo dicho punto el centro del círculo.

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$C(0, 0)$	$V(a, 0)$ $V'(-a, 0)$	$F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$	$B(0, b)$ $B'(0, -b)$
Vertical	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	$C(0, 0)$	$V(0, a)$ $V'(0, -a)$	$F(0, c)$ $F'(0, -c)$	$B(b, 0)$ $B'(-b, 0)$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$, y tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 12.

Solución:

Para obtener toda la información necesaria sobre la elipse debemos completar el siguiente cuadro:

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'
6				$F(5, 0)$		
				$F'(-5, 0)$		

El punto medio ubicado entre los focos es $C(0, 0)$ y los focos están sobre el eje X. Así, la elipse es horizontal y su ecuación es de la forma (6.5); la distancia entre los focos es $2c = 10$ y la distancia entre los vértices es $2a = 12$. Por tanto,

$$a = 6 \qquad c = 5,$$

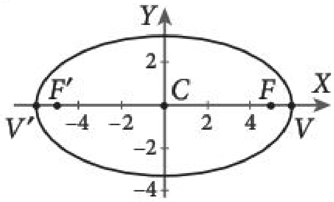


Figura 6.6

entonces:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 5^2 = 11;$$

y la ecuación de la elipse es (figura 6.6):

$$\boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1.} \tag{6.7}$$

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'
6	$\sqrt{11}$	5	C(0, 0)	$F(5, 0)$ $F'(-5, 0)$	$V(6, 0)$ $V'(-6, 0)$	$B(0, \sqrt{11})$, $B'(0, -\sqrt{11})$

2. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos vértices son $V(0, 10)$ y $V'(0, -10)$ y sus focos son $F(0, 2)$ y $F'(0, -2)$.

   Solución:
   De nuevo el centro es $C(0, 0)$ y los focos ahora están sobre el eje Y; así, la elipse es vertical y debemos usar la ecuación (6.6). La distancia focal es $2c = 4$ y la distancia entre los vértices es $2a = 20$; entonces:

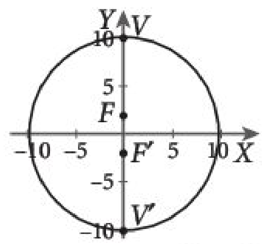


Figura 6.7

$$b^2 = 10^2 - 2^2 = 96;$$

   y la ecuación de la elipse es (figura 6.7):

$$\frac{x^2}{96} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

Ejemplos

Ejercicios

1. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(6, 0)$ y $F'(-6, 0)$, tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 16.
2. Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$ y $F'\left(0, -\frac{3}{2}\right)$, tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 5.

Pensamiento crítico

La ecuación $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\gamma^2}=1$ corresponde a una elipse con centro en el origen. ¿Cómo se determina si se trata de una elipse horizontal o vertical?

3. Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son $F\left(0,\frac{1}{5}\right)$ y $F'\left(0,-\frac{1}{5}\right)$, tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea $\frac{8}{5}$.

En cada caso, encuentra la ecuación de la elipse.

4. Focos $F\left(\frac{1}{5},0\right), F'\left(-\frac{1}{5},0\right)$; vértices $V\left(\frac{5}{2},0\right), V'\left(-\frac{5}{2},0\right)$.
5. Focos $F(0, 25), F'(0, -25)$; vértices $V(0, 30), V'(0, -30)$.
6. Focos $F(0, 3), F'(0, -3)$; vértices $V(0, 10), V'(0, -10)$.
7. Focos $F\left(\frac{1}{2}, 0\right), F'\left(-\frac{1}{2},0\right)$; vértices $V\left(\frac{3}{4},0\right), V'\left(-\frac{3}{4},0\right)$.

En cada caso, encuentra las ecuaciones de las elipses con centro en el origen y que satisfacen las siguientes condiciones:

8. Eje mayor 14; eje menor 10.
9. Eje mayor 5; eje menor 3.
10. Eje mayor 9; eje menor 5.
11. Eje mayor 11; eje menor 8.
12. Eje mayor 8; eje menor 3.
13. Eje mayor 6; eje menor 4.

En cada caso, halla las coordenadas de los vértices y de los focos de la elipse con la ecuación dada y grafícala.

14. $4x^2 + y^2 - 36 = 0.$
15. $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0.$
16. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1.$
17. $\dfrac{x^2}{4}+y^2=4.$
18. $2x^2 + 25y^2 = 50.$
19. $81x^2 + 49y^2 = 3969.$
20. $9x^2 + 8y^2 = 72.$
21. $x^2 + 64y^2 = 64.$

22. Encuentra la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(-1, 1)$ y cuyos vértices son $V(0, 2), V'(0, -2)$.
23. Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(-3, -2)$ y cuyos vértices son $V(5, 0), V'(-5, 0)$.
24. Encuentra la ecuación de la elipse vertical con centro en el origen que pasa por los puntos $P(-4, 0)$ y $Q\left(2\sqrt{3},3\right)$.
25. Halla la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen que pasa por los puntos $P\left(\sqrt{\frac{5}{2}},1\right)$ y $Q\left(2,\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.
26. Una elipse vertical con centro en el origen tiene la ecuación $\dfrac{2x^2}{29}+\dfrac{y^2}{a^2}=1.$ Si la elipse pasa por el punto $P(1, 3)$, encuentra el valor de a^2 y escribe la ecuación en la forma general.

Ejercicios

Construcción de la elipse

Podemos trazar elipses mediante regla y compás; o bien con la ayuda de otros instrumentos, como un hilo y dos clavos o con papel encerado. Estas técnicas se describen a continuación.

Sugerencias para trazar una elipse

- Localiza el centro. (Hasta este momento, únicamente hemos visto elipses con centro en el origen, pero más adelante veremos el caso general.)
- Determina los valores de c (distancia del centro a los focos), a (semieje mayor) y b (semieje menor).
- Determina si la elipse es horizontal o vertical comparando los valores que dividen x^2 y y^2 en la forma simétrica de la ecuación. Si el mayor afecta a x^2, entonces es horizontal, en otro caso es vertical.
- Localiza los vértices V y V', los focos F y F' y los extremos del eje menor B y B'.
- Localiza los extremos de los lados rectos. En el caso de la elipse horizontal, se encuentran a $\frac{b^2}{a}$ unidades arriba y abajo de los focos. En el caso de la elipse vertical, se encuentran a $\frac{b^2}{a}$ unidades a la derecha y a la izquierda.
- Une con una curva los puntos que hayas localizado en la elipse.

Ejemplos

1. Trazar la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

Solución:

Se trata de una elipse con centro en $C(0, 0)$.

El denominador de y^2 es mayor que el de x^2, así que la elipse es vertical, $a^2 = 36$ y $b^2 = 16$, de donde:

$$c^2 = 36 - 16 = 20,$$

y, por tanto, $a = 6$, $b = 4$ y $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Entonces los focos son:

$$F(0, 2\sqrt{5}) \approx F(0, 4.47) \text{ y } F\,(0, -2\sqrt{5}) \approx F\,(0, -4.47),$$

y los vértices son:

$$V(0, 6) \quad \text{y} \quad V'(0, -6);$$

los extremos del eje menor son:

$$B(4, 0) \quad \text{y} \quad B'(-4, 0).$$

Como

$$\frac{b^2}{a} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$

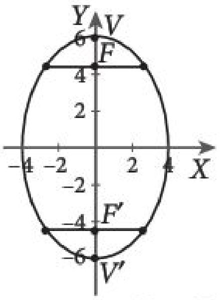


Figura 6.8

los extremos de los lados rectos son:

$$\left(-\frac{8}{3},-2\sqrt{5}\right)\approx(-2.67,-4.47),$$
$$\left(-\frac{8}{3},2\sqrt{5}\right)\approx(-2.67,4.47),$$
$$\left(\frac{8}{3},-2\sqrt{5}\right)\approx(2.67,-4.47),$$
$$\left(\frac{8}{3},2\sqrt{5}\right)\approx(2.67,4.47)$$

y se muestran en la figura 6.8.

Marcamos estos puntos y trazamos una curva suave uniendo los vértices y los extremos del eje menor (figura 6.8).

2. Trazar la elipse cuya ecuación general es $3x^2+4y^2-48=0$.

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma simétrica; para ello, pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación:

$$3x^2+4y^2=48,$$

y al dividir entre 48, obtenemos:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

Se trata de una elipse con centro en $C(0,0)$.

Como 16 > 12, la elipse es horizontal; $a^2=16$, $b^2=12$ y, por tanto,

$$c^2=16-12=4.$$

Así que $a=4$, $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ y $c=2$.

Los focos son:

$$F(2,0) \quad \text{y} \quad F'(-2,0);$$

los vértices son:

$$V(4,0) \quad \text{y} \quad V'(-4,0);$$

y los extremos del eje menor son:

$$B\left(0,2\sqrt{3}\right)\approx B\left(0,3.46\right) \text{ y } B\left(0,-2\sqrt{3}\right)\approx B\left(0,-3.46\right).$$

Como

$$\frac{b^2}{a} = \frac{12}{4} = 3,$$

los extremos de los lados rectos son $(-2, -3)$, $(-2, 3)$, $(2, -3)$, $(2, 3)$.

Ahora podemos marcar estos puntos y trazar la elipse que pasa por ellos (figura 6.9).

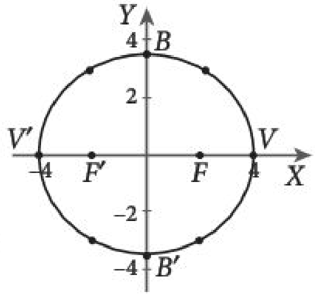


Figura 6.9

Ejemplos

Construcción de la elipse con el uso de instrumentos

Veremos tres construcciones.

Con regla y compás

Como sucede con la parábola, la elipse no se puede dibujar de un solo trazo con una regla y un compás; sin embargo, estos instrumentos son útiles para localizar suficientes puntos de ella.

Supongamos que a y b son conocidos y que sabemos que la elipse es horizontal; así, $a > b$ y su eje mayor está sobre el eje X y el menor sobre el eje Y.

- Con centro en O, trazamos un círculo con radio a y otro círculo con radio b.
- Trazamos cualquier radio que corte el círculo interior en un punto R y el exterior en un punto Q.
- Trazamos una recta paralela al eje mayor y que pase por R.
- Trazamos una recta paralela al eje menor y que pase por Q (figura 6.10).

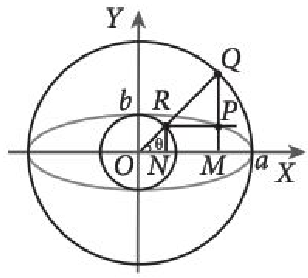


Figura 6.10

Veamos que el punto $P(x, y)$ donde se cortan estas últimas rectas está en la elipse:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \qquad (6.8)$$

Si consideramos el triángulo OMQ de la figura, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{OM}{OQ} = \frac{x}{a},$$

de donde

$$x = a\cos\theta.$$

Por otra parte,

$$y = PM = RN,$$

y del triángulo ORN tenemos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{RN}{OR} = \frac{y}{b},$$

de donde:

$$y = b\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces las coordenadas de P son $(a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$. Ahora veamos que dichas coordenadas satisfacen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en efecto,

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\operatorname{sen}\theta)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\operatorname{sen}^2\theta}{b^2} = 1.$$

De esta manera podemos marcar tantos puntos de la elipse como queramos para dibujarla con la precisión deseada.

Figura 6.11

Con hilo

En una tabla sujetamos un hilo de longitud $2a$ unidades con dos clavos que disten entre sí $2c$ unidades. Con un lápiz estiramos el hilo y recorremos el lápiz a lo largo del hilo, dibujando la curva resultante. Dicha curva es una elipse, pues la suma de las distancias del punto en donde está el lápiz a los clavos es siempre $2a$ (figura 6.11).

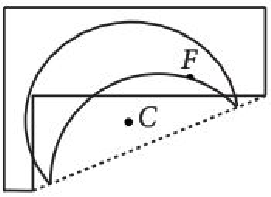


Figura 6.12

Con papel doblado

Utilizamos una hoja rectangular de papel encerado (figura 6.12).

- Dibujamos un círculo con centro C y marcamos un punto F dentro del círculo.
- Doblamos el papel, de manera que un punto A del círculo caiga sobre el punto F.
- Marcamos el doblez y desdoblamos.
- Seguimos haciendo dobleces de manera que los puntos del círculo caigan sobre F.

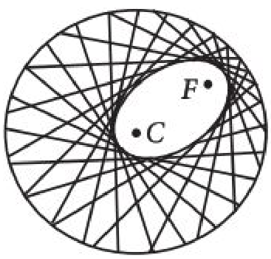


Figura 6.13

Si hacemos suficientes dobleces, nos daremos cuenta de que aparece una curva en forma de elipse con focos en el punto F y en el centro del círculo C. De hecho, cada doblez es tangente a la elipse (figura 6.13).

La figura 6.13 muestra que al doblar la hoja de manera que el punto A del círculo coincida con F, se forma un triángulo isósceles ADF. El punto D es el punto del doblez que pertenece a la elipse, ya que:

$$DC + DF = DC + DA = r,$$

donde r es el radio del círculo original. Así que para cualquier doblez tenemos que el punto D que es la intersección del radio AC con el doblez, pertenece a la elipse cuyos focos son F y C y en la que $2a = r$ (figura 6.14).

Ver el ejemplo "conicaenvuelve" de la lista de construcciones de Geolab.

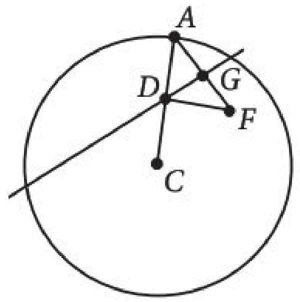


Figura 6.14

La excentricidad de la elipse

Comparemos las gráficas de las elipses $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ y $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{9}=1$.

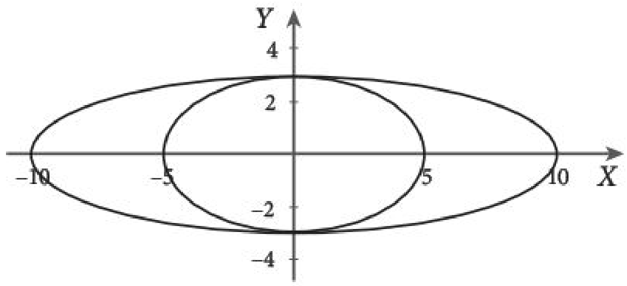


Figura 6.15

Solución:

La segunda elipse es mucho más alargada que la primera. Veamos cómo medir este alargamiento.

En la primera elipse, $a = 5$, $b = 3$ y, por tanto, $c = \sqrt{25-9} = 4$ y el cociente

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

En la segunda, $a = 10$, $b = 3$ y, por tanto, $c = \sqrt{100-9} = \sqrt{91}$ y el cociente

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95.$$

En la elipse que es más alargada, este cociente es mayor.

La manera de medir el alargamiento de una elipse es por medio de su *excentricidad*, la cual se define como el cociente de la distancia focal entre el eje mayor:

$$\boxed{e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.} \tag{6.9}$$

Observa que como $c < a$, entonces $0 < e < 1$.

Cuanto más cerca de cero esté la excentricidad, la elipse será más parecida a un círculo, y cuanto más cerca esté de uno, más alargada será. Posteriormente, veremos que la excentricidad se puede definir para la hipérbola y, de hecho, si conocemos la excentricidad de una cónica sabremos qué tipo de cónica es.

Si la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ es tal que $0 < e < 1$, la cónica es una elipse.

Cuando $e = 0$, se tiene que $c = 0$, lo cual significa que los dos focos están en el mismo lugar, por tanto, tenemos un círculo.

Ejemplos

1. Encontrar la excentricidad de la elipse $3x^2 + 2y^2 - 18 = 0$.

Solución:
Escribimos la ecuación de la elipse en la forma simétrica:

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Entonces $b = \sqrt{6}$, $a = \sqrt{9}$; por tanto,

$$c = \sqrt{9-6} = \sqrt{3},$$

de donde:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.58.$$

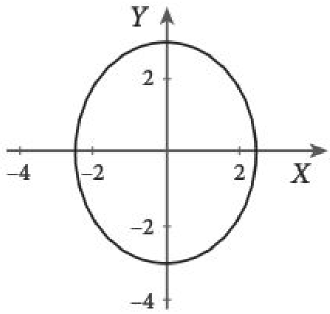


Figura 6.16

La excentricidad de la elipse es $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (figura 6.16).

2. Encontrar la ecuación de la elipse con centro en el origen, foco $F(3, 0)$ y excentricidad $e = 0.6$.

Solución:
La distancia del centro al foco es *c*; entonces:

$$c = 3.$$

Como $e = \frac{c}{a}$, entonces:

$$0.6 = \frac{3}{a},$$

de donde:

$$a = \frac{3}{0.6} = 5.$$

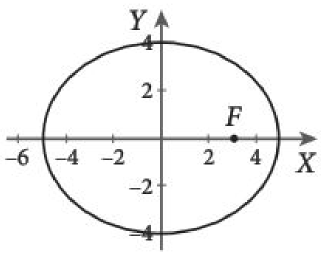


Figura 6.17

Entonces:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16.$$

Así, la ecuación de la elipse (figura 6.17) es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Ejercicios

En cada caso, encuentra la excentricidad de la elipse.

1. $4x^2 + y^2 - 64 = 0.$
2. $9x^2 + 16y^2 - 1296 = 0.$
3. $x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$
4. $8x^2 + 7y^2 - 392 = 0.$
5. Grafica con los mismos ejes coordenados las elipses con centro en el origen, un foco en $F(-2, 0)$ y excentricidades $e = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$.
6. Encuentra la ecuación de la elipse con centro en (0, 0), vértice $V\left(0, -\frac{25}{2}\right)$ y excentricidad $e = 0.7$.
7. Halla la ecuación de la elipse con focos $F'(-7, 0)$, $F(7, 0)$ y excentricidad $e = 0.8$.

Pensamiento crítico

Si una elipse tiene excentricidad $e = 0.99$, ¿qué puedes decir de su forma?

Otra manera de definir elipse. Directrices de la elipse

Veremos que una elipse es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a un punto F es igual a e veces la distancia de P a una recta ℓ donde e es un número menor que 1. Más aún, F es uno de los focos de la elipse, e es su excentricidad y la recta ℓ será llamada una *directriz* de la elipse.

Recordemos la ecuación (6.2):

$$\boxed{-4cx + k^2 = 2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2},} \tag{6.10}$$

que está a la mitad del camino de la deducción de la fórmula de la elipse para el caso en el que esta es horizontal y su centro se encuentra en el origen, a partir de la caracterización "la elipse está formada por los puntos P tales que la suma de sus distancias a dos puntos, llamados focos, es constante":

$$d(P,F) + d(P,F\ ) = k.$$

Haciendo $k = 2a$ en (6.10), como lo hicimos en esa página, tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} -4cx + 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ -x + \frac{a^2}{c} &= \frac{a}{c}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}} \tag{6.11}$$

En esta última ecuación, si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, el miembro de la izquierda, $-x + \frac{a^2}{2}$, es la distancia dirigida de $P(x, y)$ a la recta vertical ℓ cuya ecuación es $-x = -\frac{a^2}{c}$, y el radical del lado derecho es la distancia de $P(x, y)$ al foco $F(c, 0)$. Así que la ecuación (6.11) puede interpretarse como:

$$d(P, \ell) = \frac{a}{c} d(P, F),$$

o bien:

$$\boxed{\frac{c}{a}d(P,\ \ell)=d(P,F);} \tag{6.12}$$

recordemos (ver (6.6)) que la excentricidad de la elipse se define como:

$$e=\frac{c}{a},$$

entonces (6.12) puede escribirse como:

$$\boxed{ed(P,\ell)=d(P,F),} \tag{6.13}$$

es decir, la elipse es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a un punto F es igual a e veces la distancia de P a una recta ℓ, donde e es un número menor que 1.

Similarmente, trabajando con el foco $F'(-c,\ 0)$ se obtiene que la elipse también es el lugar geométrico de los puntos tales que:

$$ed(P,\ell')=d(P,F'),$$

donde la recta ℓ' tiene por ecuación a $x=-\frac{a^2}{c}$.

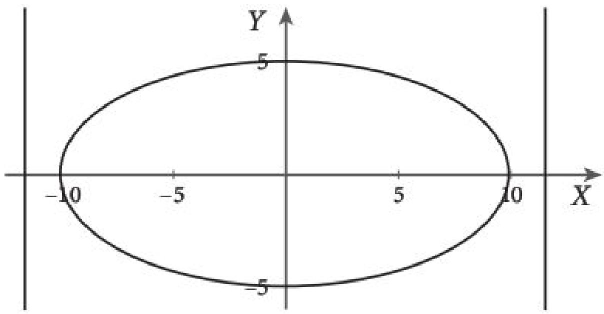


Figura 6.18

Las rectas ℓ y ℓ' se llaman *directrices* de la elipse.

La ecuación (6.13) es similar a la ecuación que determina la parábola, pero en ese caso $e=1$.

Para el caso de las elipses verticales con centro en el origen se hace un análisis similar y obtenemos:

Tipo de elipse	Directrices	Foco asociado
Horizontal	$x=\frac{a^2}{c}$	$F(c,\ 0)$
Horizontal	$x=-\frac{a^2}{c}$	$F'(-c,\ 0)$
Vertical	$y=\frac{a^2}{c}$	$F(0,\ c)$
Vertical	$y=-\frac{a^2}{c}$	$F'(0,\ -c)$

(6.14)

Ejemplo

1. Encontrar las ecuaciones de las directrices de la elipse $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{26^2}=1$ y graficarlas.

Solución:

Para encontrar las ecuaciones de las directrices de la elipse debemos determinar el valor de c:

$$c^2=a^2-b^2=26^2-10^2=676-100=576,$$

de donde $c=24$.

Como la elipse es vertical, entonces las ecuaciones de las directrices son:

$$y=\frac{a^2}{c}=\frac{676}{24}=\frac{169}{6}\approx 28.17$$
$$y=-\frac{a^2}{c}=-\frac{676}{24}=-\frac{169}{6}\approx -28.17.$$

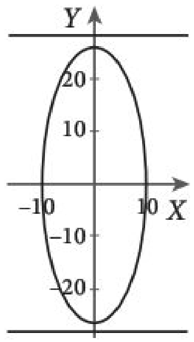


Figura 6.19

Las ecuaciones de las directrices de una elipse horizontal con centro en el origen son $x=\frac{a^2}{c}$ y $x=-\frac{a^2}{c}$.

Las ecuaciones de las directrices de una elipse vertical con centro en el origen son $y=\frac{a^2}{c}$ y $y=-\frac{a^2}{c}$.

Elipses con eje focal paralelo a un eje cartesiano

Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(1,1)$ y $F(5,1)$ y cuyo diámetro mayor mide 6 unidades.

Solución:

Los focos están en la recta horizontal $y=1$ y el centro $C(3,1)$ es el punto medio de los focos. Como el centro no está en el origen, no podemos utilizar directamente la fórmula (6.5). Primero debemos hacer un cambio de coordenadas para trasladar el origen al centro de la elipse. Utilizamos las fórmulas de traslación (3.3):

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x-3 \\ y' &= y-1. \end{aligned}} \qquad (6.15)$$

Para encontrar las coordenadas de los focos en el nuevo sistema de coordenadas, sustituimos sus coordenadas originales en (6.15), es decir, para $F'(1, 1)$ tenemos:

$$x' = 1 - 3 = -2$$
$$y' = 1 - 1 = 0,$$

y para $F(5, 1)$:

$$x' = 5 - 3 = 2$$
$$y' = 1 - 1 = 0,$$

así que las coordenadas de los focos en el nuevo sistema son $F(-2, 0)$ y $F'(2, 0)$. El eje mayor es $2a = 6$ y la distancia focal es $2c = 4$, por lo que:

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 5.$$

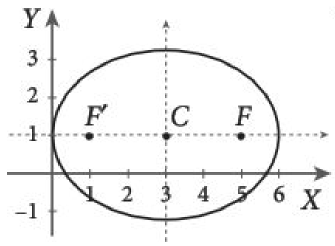


Figura 6.20

Así, la ecuación de la elipse con respecto a las coordenadas $X'Y'$ es:

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{5} = 1.$$

Ahora sustituimos x' y y' de acuerdo con (6.15) y obtenemos la ecuación en forma simétrica:

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1.$$

Si efectuamos las operaciones y pasamos todo al primer miembro, obtenemos la ecuación en su forma general (figura 6.20):

$$5x^2 + 9y^2 - 30x - 18y + 9 = 0.$$

Ahora veamos el caso general.

Si el centro de la elipse es $C(h, k)$ y el eje focal es paralelo al eje X, llamamos $2c$ a la distancia focal y $2a$ al eje mayor. Las coordenadas de los focos son $F(h + c, k)$ y $F'(h - c, k)$.

Como en el ejemplo anterior, trasladamos los ejes de manera que el origen quede en C. Para lograrlo, hacemos la sustitución:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{aligned}} \tag{6.16}$$

En el nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

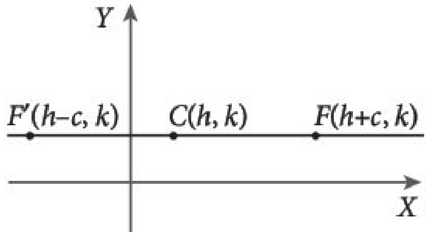


Figura 6.21

La forma estándar de la ecuación de una elipse horizontal con centro en el punto $C(h, k)$ es $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$

Si sustituimos x' y y' de acuerdo con (6.16), obtenemos la *forma simétrica de la ecuación de la elipse*, también conocida como *forma canónica* o *estándar*:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.} \qquad (6.17)$$

La forma estándar de la ecuación de una elipse vertical con centro en el punto $C(h, k)$ es $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.$

En el caso de que el eje focal sea vertical, los denominadores de $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ están cambiados:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.} \qquad (6.18)$$

Si multiplicamos las ecuaciones (6.17) y (6.18) por a^2b^2, desarrollamos los cuadrados y simplificamos, obtenemos una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,} \qquad (6.19)$$

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una elipse si A y C son distintos de cero y tienen el mismo signo. Dicha elipse puede ser degenerada.

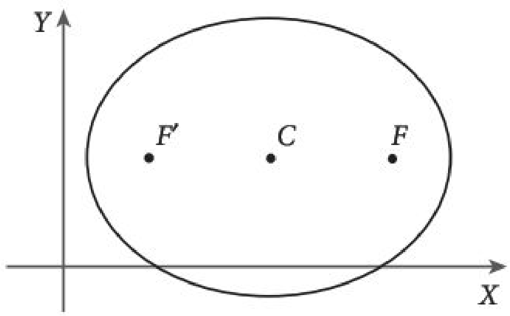


Figura 6.22

donde hay que notar que A y C son distintas de cero y tienen el *mismo signo*. Esta forma se conoce como *forma general de la ecuación de la elipse* y es un caso particular de la ecuación general de segundo grado que estudiaremos en la unidad 8.

Pensamiento crítico

Si en la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se tiene que A y C son distintos de cero y tienen el mismo signo y $D = E = 0$, ¿qué elipse se obtiene?

Pensamiento crítico

Considera la ecuación de la elipse $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. ¿Cómo se determina si es horizontal o vertical?

En resumen:

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$C(h, k)$	$V(h+a, k)$, $V'(h-a, k)$	$F(h+c, k)$, $F'(h-c, k)$	$B(h, k+b)$, $B'(h, k-b)$
Vertical	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$C(h, k)$	$V(h, k+a)$, $V'(h, k-a)$	$F(h, k+c)$, $F'(h, k-c)$	$B(h+b, k)$, $V'(h-b, k)$

Ejemplos

La excentricidad de una elipse se define como $e=\frac{c}{a}$, independientemente de cuál sea su centro.

1. Escribir la ecuación $8x^2+4y^2-24x-4y-13=0$ en la forma simétrica y graficar la elipse.

Solución:

Para tener toda la información que necesitamos sobre la elipse debemos completar el siguiente cuadro:

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'

Agrupamos los términos en x y en y y pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación:

$$(8x^2-24x)+(4y^2-4y)=13;$$

factorizamos los coeficientes de x^2 y de y^2 para que sea más fácil completar los cuadrados perfectos:

$$8(x^2-3x)+4(y^2-y)=13.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto, recordando que debemos sumar la misma cantidad del otro lado de la ecuación para que la igualdad no se altere:

$$8\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+4\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)=13+18+1,$$

simplificamos:

$$8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=32,$$

dividimos entre el término independiente y obtenemos:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{4}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{8}=1.$$

Como 8 es mayor que 4, la elipse es vertical y su centro es $C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$,

$$a^2 = 8, \quad b^2 = 4 \quad \text{y} \quad c^2 = 8 - 4 = 4,$$

es decir,

$$a = 2\sqrt{2}, \quad b = 2, \quad c = 2.$$

Así que la distancia entre los vértices es $2a = 4\sqrt{2}$ y la distancia focal es $2c = 4$. Por tanto, los focos son:

$$F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}+2\right) = F(1.5,2.5) \text{ y } F'\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}-2\right) = F'(1.5,-1.5),$$

los vértices son:

$$V\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right) \approx V(1.5,3.33) \text{ y } V'\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\right) \approx V'(1.5,-2.33),$$

y los extremos del eje menor son:

$$B\left(\frac{3}{2}+2,\frac{1}{2}\right) = B(3.5,0.5) \text{ y } B'\left(\frac{3}{2}-2,\frac{1}{2}\right) = B'(-0.5,0.5).$$

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'
$2\sqrt{2}$	2	2	$C\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$	$F(1.5, 2.5)$ $F'(1.5, -1.5)$	$V(1.5, 3.33)$ $V'(1.5, -2.33)$	$B(3.5, 0.5)$ $B'(-05,0.5)$

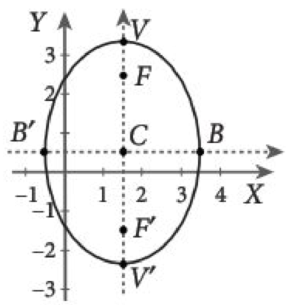


Figura 6.23

2. Encontrar la ecuación de la elipse con centro en $C(2, 1)$, un foco en $F(4, 1)$ y excentricidad $e = 0.8$.

Solución:
Como el centro y el foco están en la misma recta horizontal $y = 1$, la elipse es horizontal.

La distancia del centro al foco es $c = 4 - 2 = 2$.

Para encontrar el valor de a utilizamos el hecho de que la excentricidad es igual a $\frac{c}{a}$:

$$0.8 = \frac{2}{a},$$

entonces $a = 2.5$ y:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 2.5^2 - 2^2 = 2.25,$$

luego $b = \sqrt{2.25} = 1.5$. Así que la forma simétrica de la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{6.25} + \frac{(y-1)^2}{2.25} = 1.$$

Para graficarla, determinamos los vértices, los extremos del eje menor y los extremos del lado recto.

Los vértices son:

$$V(2+2.5,1)=V(4.5,1) \quad \text{y} \quad V'(2-2.5,1)=V'(-0.5,1).$$

Los extremos del eje menor son:

$$B(2,1+1.5)=B(2,2.5) \quad y \quad B'(2,1-1.5)=B'(2,-0.5).$$

Los focos son:

$$F(2+2,1)=F(4,1) \quad \text{y} \quad F'(2-2,1)=F'(0,1).$$

Los extremos de los lados rectos están arriba y abajo de los focos y se encuentran a una distancia de

$$\frac{b^2}{a}=\frac{2.25}{2.5}=0.9$$

de ellos (figura 6.24):

$$(4,1.9),\ (4,0.1),\ (0,1.9),\ (0,0.1).$$

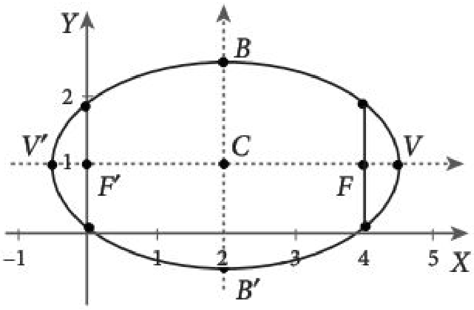


Figura 6.24

Ejemplos

Directrices de una elipse con centro en $C(h, k)$

Las directrices de las elipses horizontales y verticales con centro en $C(h, k)$ las podemos obtener a partir de las directrices de las elipses con centro en (0, 0) mediante la traslación de ejes:

$$x'=x-h, \qquad y'=y-k,$$

que hemos estado usando en este apartado, así, a partir de la tabla (6.14) obtenemos:

Tipo de elipse	Directrices	Foco asociado
Horizontal	$x-h=\frac{a^2}{c}$	$F(h+c,k)$
Horizontal	$x-h=-\frac{a^2}{c}$	$F'(h-c,k)$
Vertical	$y-k=\frac{a^2}{c}$	$F(h,k+c)$
Vertical	$y-k=-\frac{a^2}{c}$	$F'(h,k-c)$

Las ecuaciones de las directrices de una elipse horizontal con centro en (h, k) son $x-h=\frac{a^2}{c}$ y $x-h=-\frac{a^2}{c}$.

Las ecuaciones de las directrices de una elipse vertical con centro en (h, k) son $y-k=\frac{a^2}{c}$ y $y-k=-\frac{a^2}{c}$.

Ejemplo

1. Encontrar las ecuaciones de las directrices de la elipse $25x^2+16y^2-350x+96y-231=0$.

Solución:
Escribimos la ecuación de la elipse en forma simétrica:

$$25x^2+16y^2-350x+96y=231$$
$$25(x^2-14x)+16(y^2+6y)=231$$
$$25(x^2-14x+49)+16(y^2+6y+9)=231+25(49)+16(9)$$
$$25(x-7)^2+16(y+3)^2=1600$$
$$\frac{25(x-7)^2}{1600}+\frac{16(y+3)^2}{1600}=1$$
$$\frac{(x-7)^2}{64}+\frac{(y+3)^2}{100}=1.$$

Es una elipse vertical con centro en $C(7,-3)$, $a=10$, $b=8$ y:

$$c^2=a^2-b^2=100-64=36,$$

de donde:

$$c=6.$$

Las ecuaciones de las directrices son:

$$y - k = \frac{a^2}{c}$$
$$y + 3 = \frac{100}{6}$$
$$y = \frac{50}{3} - 3$$
$$y = \frac{41}{3}$$

y

$$y - k = -\frac{a^2}{c}$$
$$y + 3 = -\frac{100}{6}$$
$$y = -\frac{50}{3} - 3$$
$$y = -\frac{59}{3}.$$

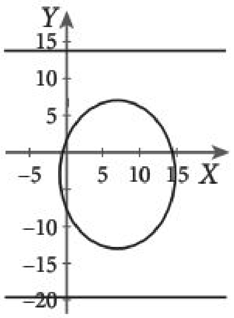


Figura 6.25

Por tanto, las directrices tienen ecuaciones $y = \frac{41}{3}$ y $y = -\frac{59}{3}$.

Ejemplo

Ejercicios

En cada caso, escribe la ecuación en forma simétrica y encuentra las coordenadas de los focos, de los vértices y del centro. Grafica la elipse.

1. $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0.$
2. $9x^2 + 16y^2 + 72x - 224y + 784 = 0.$
3. $x^2 + 36y^2 + 4x - 432y + 1264 = 0.$
4. $x^2 + 2y^2 - 8x + 8y + 23 = 0.$
5. $2x^2 + y^2 - 24x - 2y + 72 = 0.$
6. $x^2 + 9y^2 - 10x + 36y - 20 = 0.$
7. $4x^2 + y^2 + 64x - 6y + 201 = 0.$
8. $27x^2 + y^2 + 108x - 10y + 52 = 0.$
9. $16x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 92 = 0.$
10. $4x^2 + 32y^2 + 4x + 128y + 65 = 0.$
11. $x^2 + y^2 + x + \frac{3}{2}y + \frac{13}{16} = 0.$
12. $4x^2 + 100y^2 - 20x + 280y + 121 = 0.$

Encuentra la ecuación de la elipse cuyo eje mayor es PQ y cuyo eje menor es RS.

13. $P(4, 6), Q(12, 6), R(8, 3), S(8, 9).$
14. $P(-1, -9), Q(-1, 5), R(4, -2), S(-6, -2).$

Encuentra la forma simétrica de la ecuación de la elipse con los siguientes datos.

15. Vértices $V(1, 4)$, $V'(-5, 4)$ y excentricidad $e = \frac{1}{4}$.
16. Vértice $V\left(3, -\frac{5}{2}\right)$, centro $C(3, -1)$ y excentricidad $e = \frac{1}{6}$.

17. Centro $C(1, 4)$, foco $F(1, -10)$ y excentricidad $e = \frac{1}{5}$.
18. Focos $F\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $F'\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y excentricidad $e = \frac{1}{2}$.
19. Vértices $V(4, 0)$, $V'(-4, 0)$ y pasa por el punto $P(0, -3)$.
20. Focos $F(10, 2)$, $F'(2, 2)$ y pasa por el punto $P(6, 7)$.
21. Vértices $V\left(\frac{27}{2}, 3\right)$, $V'\left(\frac{9}{2}, 3\right)$; focos $F(11, 3)$, $F'(7, 3)$.
22. Vértice $V(-1, -3)$, centro $C(-5, -3)$ y pasa por el punto $P\left(-3, -3 + \sqrt{3}\right)$.
23. Foco $F\left(2\sqrt{6}, 6\right)$, centro $C(0, 6)$ y pasa por el punto $P(0, 7)$.
24. Vértice $V(-1, 4)$, centro $C(-1, 9)$ y foco $F(-1, 5)$.
25. Encuentra los puntos de intersección de las elipses $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ y $16x^2 + y^2 - 16 = 0$.
26. Halla los puntos de intersección de la elipse $5x^2 + 4y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$ con la recta $x + 4y - 6 = 0$.
27. Da los puntos de intersección de la elipse $x^2 + 8y^2 + 12x - 64y + 148 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 43 = 0$.
28. Encuentra los puntos de intersección de las elipses $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ y $9x^2 + y^2 - 9 = 0$.
29. Dada la elipse $4x^2 + 9y^2 - 32x + 54y + 109 = 0$, encuentra la ecuación del círculo cuyo radio es el semieje menor de dicha elipse y cuyo centro es el mismo que el de esta.
30. Halla la ecuación de la recta que pasa por el centro de la elipse $4x^2 + y^2 + 8x + 2y - 31 = 0$ y por el punto $P(1, 3)$.
31. Da la ecuación de la parábola que tiene como vértice el centro de la elipse $3x^2 + 2y^2 + 24x - 32y + 170 = 0$, abre hacia abajo y pasa por el punto $P(-2, 0)$.
32. Encuentra la ecuación de la elipse que tiene como uno de sus vértices el centro del círculo $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$ y centro en $C(10, 0)$ y excentricidad $e = \frac{1}{3}$.
33. Halla las ecuaciones de las directrices de la elipse $81x^2 + 225y^2 + 18x - 450y - 7874 = 0$.
34. Da la ecuación simétrica de la elipse con vértices $V\left(12, \frac{1}{2}\right)$ y $V'\left(-8, \frac{1}{2}\right)$ y una de las directrices es $x = \frac{56}{3}$.

Ejercicios

Algunas aplicaciones de la elipse

Propiedad de reflexión de la elipse

La elipse tiene una propiedad de reflexión similar a la que tiene la parábola. Un rayo que emana de un foco de la elipse se refleja hacia el otro foco (figura 6.26). En la última sección de esta unidad demostraremos esta propiedad.

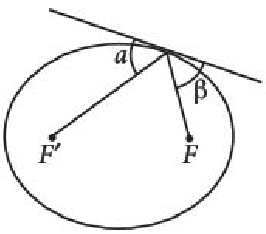


Figura 6.26


Engranes elípticos.

Se utilizan engranajes elípticos en máquinas empacadoras, máquinas automáticas, bombas y medidoras de caudal.


Coliseo romano.

Esta propiedad se aplica en ciertos hornos de laboratorio para fabricar cristales. En un recipiente en forma de elipsoide de revolución, cuya pared interior sea de un material altamente reflejante, se coloca una fuente de calor en uno de los focos de la elipse y el objeto que se desea calentar en el otro foco. Como todos los rayos que emanan de un foco se reflejan hacia el otro foco, después de un tiempo, el segundo foco está extremadamente caliente.

Arquitectura

El Coliseo de Roma, cuyo nombre en latín es *Collosseum*, es un gran anfiteatro que se empezó a construir el año 70 d. C. bajo el mandato del emperador Vespasiano y se terminó de construir el año 80 d. C. con el emperador Tito. Tiene forma elíptica con 189 m de largo y 156 m de ancho. Encontrar la ecuación de la elipse.

Solución:
Como el largo es 189 m, entonces $2a = 189$ y el ancho es $2b = 156$, de donde:

$$a = \frac{189}{2} \quad \text{y} \quad b = 78.$$

Consideremos la elipse con centro en el origen, así:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{189}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{78^2} = 1.$$

Ejemplos:


Museo Nacional de San Carlos.


Plaza de San Pedro.

1. El Museo Nacional de San Carlos se encuentra en la Ciudad de México, ocupa la casa construida en el siglo XVIII por el célebre arquitecto Manuel Tolsá. Esta edificación está realizada en estilo neoclásico. El patio central tiene forma elíptica.
2. La plaza de San Pedro en el Vaticano es una elipse. Sus focos están marcados en el piso con unos círculos. Si una persona se coloca encima de uno de ellos y ve hacia las columnas, solo ve una columna en cada hilera, pero si las observa desde otro punto, entonces ve tres columnas en cada hilera.
3. Otro ejemplo de la aplicación de la propiedad de reflexión es el siguiente. En una habitación cuyo techo tiene la forma de un elipsoide, si dos personas están en ella y sus cabezas quedan en los focos, cuando una habla en voz baja, la otra puede oírla, mientras que otra persona colocada en otro lado de la habitación no la oirá. Esta propiedad se utilizó tiempo atrás en algunos conventos para que los monjes pudieran confesarse mutuamente.

   Algunos ejemplos de este tipo de construcciones son la Galería de Susurros en el exconvento carmelita del Desierto de los Leones, en la Ciudad de México, y la cúpula de la catedral de San Pablo, en Londres. En el Museo de Louvre, en París, hay una sala con estas características.


Cúpula en la catedral de San Pablo.

4. El Foro Internacional de Tokio construido en 1996 por el arquitecto uruguayo Rafael Viñoly (1944), consta de cuatro edificios cúbicos de distintos tamaños y uno formado por dos elipsoides de vidrio y acero.
5. Uno de los arquitectos más famosos de la actualidad es el británico Norman Foster (1935). En sus diseños utiliza elipsoides, paraboloides, etcétera. En 2002 construyó el Ayuntamiento de Londres.


Ayuntamiento de Londres.


Foro Internacional de Tokio.

Propiedad de reflexión de la elipse: si un rayo emana de un foco de la elipse, se refleja en ella hacia el otro foco.

6. El Puente de Piedra en Logroño, España fue diseñado por el ingeniero Fermín Manso de Zúñiga e inaugurado en 1884. Tiene 198 m de largo y 7 bóvedas elípticas.


Puente de Piedra en Logroño.

Medicina

En medicina se aprovecha la propiedad de reflexión de la elipse para disolver mediante ultrasonido los cálculos renales. Se introduce al paciente en una tina llena de agua en forma de elipsoide de manera que el lugar donde está el cálculo quede en uno de los focos de la elipsoide. En el otro foco se pone una sonda que emite sonido de alta frecuencia. Las ondas ultrasónicas, al concentrarse en el cálculo, hacen que este se rompa y el paciente puede eliminarlo en la orina. Este método se conoce como litotripsia extracorpórea.

En 1980 el Dr. Christian Chaussy efectuó la primera litotripsia extracorpórea en el Hospital Universitario de Munich y en 1984 la mayoría de los principales hospitales del mundo ya contaban con el equipo para hacer el procedimiento.

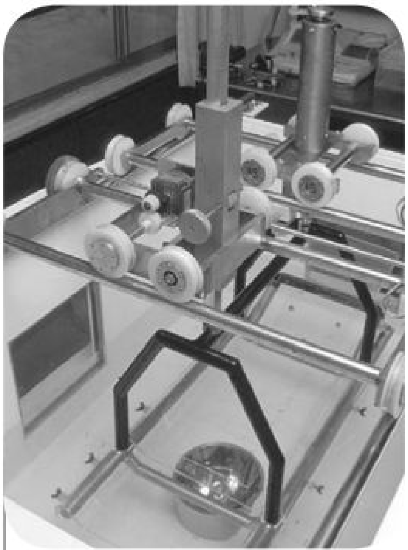
Ejemplo

1. Un grupo de investigadores de la UNAM, encabezados por los doctores Achim M. Loske y Fernando E. Prieto Calderón, hizo un aparato para disolver cálculos renales en perros que llamaron Mexilit. Es un generador de ondas de choque del tipo electrohidráulico que consiste en una tina de fibra de vidrio en cuyo centro está un reflector de acero inoxidable con forma de semielipsoide.

Solución:
Con los datos del problema, tenemos que $a = 12$ y $b = 8.6 = \frac{86}{10} = \frac{43}{5}$, así la ecuación de la elipse es:

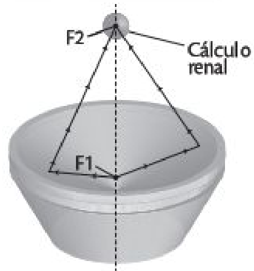
$$\frac{y^2}{12^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{43}{5}\right)^2} = 1.$$

Ejemplo



Mexilit.

Elipsoides.



Astronomía

Una de las principales aplicaciones de la elipse se da en la astronomía. Cuando Johannes Kepler estudiaba los movimientos de Marte, vio que al aplicar el modelo de Copérnico de órbitas circulares alrededor del Sol los cálculos discrepaban ligeramente de la posición real del planeta en el firmamento. Por lo que intentó ajustar la órbita a otras curvas y, finalmente, encontró que la elipse se ajustaba en forma maravillosa. Así obtuvo su primera ley del movimiento de los planetas. En realidad, Kepler tuvo una suerte enorme, ya que Marte es uno de los planetas con órbita de mayor excentricidad. Si en lugar de Marte hubiera decidido estudiar a Venus, cuya órbita es prácticamente circular, posiblemente nunca hubiera descubierto sus leyes del movimiento.

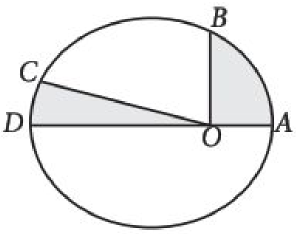


Figura 6.27

Las *tres leyes sobre el movimiento planetario* de Kepler son:

- Los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol.
- Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales. Es decir, en la figura 6.27, si el tiempo que tarda el planeta en ir de A a B es igual que el que tarda en ir de C a D, entonces el área OAB es igual al área OCD.
- El cuadrado del periodo de un planeta (el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol) es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

Kepler encontró sus leyes empíricamente, pero fue Newton, mediante el cálculo diferencial que acababa de inventar y su modelo de gravitación universal, quien demostró dichas leyes.

En la tabla de la siguiente página aparece la excentricidad de las órbitas planetarias, así como la distancia media del planeta al Sol, medida en unidades astronómicas (UA). Una unidad astronómica es, por definición, la distancia media de la Tierra al Sol. La distancia media de un planeta al Sol es el semieje mayor de la elipse (a).

Planeta	Excentricidad	Distancia media (UA)
Mercurio	0.206	0.387
Venus	0.007	0.723
Tierra	0.017	1
Marte	0.093	1.52
Júpiter	0.048	5.2
Saturno	0.054	9.54
Urano	0.047	19.18
Neptuno	0.009	30.06

En la siguiente figura vemos las órbitas de los primeros cuatro planetas de la tabla. El Sol está en el origen y la escala de los ejes está en unidades astronómicas. Observamos que aunque son elipses, su excentricidad es muy pequeña, por lo que se ven casi circulares.

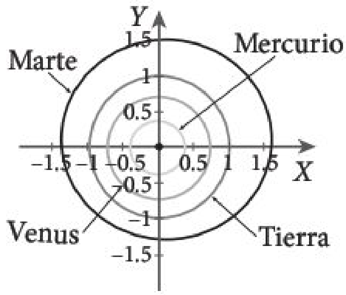


Figura 6.28

Hasta 2006 Plutón fue considerado el décimo planeta del sistema solar. Ese año, la Unión Astronómica Internacional lo reclasificó como planeta menor. La excentricidad de la órbita de Plutón es de 0.25 y su distancia media al Sol es de 39.44 UA.

Si medimos en años terrestres el tiempo que tarda un planeta en dar la vuelta alrededor del Sol, la constante de proporcionalidad de la tercera ley de Kepler es 1, es decir, la fórmula de la tercera ley es:

$$p^2 = a^3,$$

donde p es el periodo y a es el semieje mayor de la elipse.

Ejemplos

1. Encontrar la diferencia entre el semieje mayor y el semieje menor de la órbita de la Tierra si el semieje mayor es cercano a 149 600 000 kilómetros.

   Solución:
   En la tabla anterior vemos que la excentricidad de la órbita terrestre es:

$$e = \frac{c}{a} = 0.017,$$

entonces:

$$c = 0.017a.$$

De donde:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2\left(1 - 0.017^2\right)} = a\sqrt{0.999711} = 0.999855a = 149\,578\,308 \text{ km},$$

así que la diferencia entre el semieje mayor y el semieje menor es:

$$149\,600\,000 - 149\,578\,308 = 21\,692 \text{ km},$$

que es menos de dos veces el diámetro de la Tierra, es decir, es insignificante comparada con el tamaño de la órbita.

2. Encontrar el periodo de Urano.

Solución:
La distancia media de Urano al Sol es $a = 19.18$ UA, así que su periodo, de acuerdo con la tercera ley de Kepler es:

$$p = \sqrt{19.18^3} = 84 \text{ años}.$$

No sólo los planetas satisfacen las leyes de Kepler, sino también todos los cuerpos que giran alrededor de otros; por ejemplo, los cometas que giran alrededor del Sol, los satélites que giran alrededor de los planetas, y el Sistema Solar que gira alrededor de la Vía Láctea. La constante de proporcionalidad de la tercera ley depende básicamente de la masa del cuerpo central.

Ejemplos

Ejercicios

1. Encuentra el radio menor (en unidades astronómicas) de las órbitas de:
   a. Marte.
   b. Mercurio.
   c. Plutón.
2. Halla el periodo de:
   a. Mercurio.
   b. Saturno.
   c. Neptuno.
3. El cometa Halley tarda 76 años en dar una vuelta alrededor del Sol, da su distancia media al Sol.
4. Si la excentricidad de la órbita del cometa Halley es $e = 0.97$, encuentra su distancia máxima y mínima al Sol.
5. Traza, en el mismo sistema coordenado, las órbitas de Neptuno y de Plutón, colocando el Sol en el origen de coordenadas de tal manera que sea un foco de las elipses. Puedes usar Geolab para ello.

6. Una puerta tiene la forma de un arco elíptico, es decir, está formada por media elipse. En la base mide 2 metros de ancho y la altura en el centro es de 4 metros. A través de ella deseamos pasar una caja de 2 metros de altura. ¿Cuál es la anchura máxima que puede tener la caja?
7. Una galería tiene paredes verticales de 1.5 metros de altura y un techo abovedado en forma de medio elipsoide. Los focos, que están a una altura de 1.5 metros sobre el piso, están separados por 4 metros. Si la altura de la construcción en el centro de la bóveda es de 3.5 metros, ¿cuánto mide su eje mayor?
8. Un puente elíptico tiene una altura de 21 m y un ancho de 100 m. Determina la ecuación de la elipse.
9. El anfiteatro de Pompeya se construyó en el año 80 a. C. y debido a que la lava del volcán Vesubio enterró la ciudad en el año 79 d. C., las edificaciones se conservaron casi intactas. Las dimensiones de la elipse de su arena son 66.65 m de largo por 35.05 m de ancho. Determina la ecuación de la elipse de la arena considerándola horizontal y con centro en el origen.
10. La construcción de la plaza de San Pedro la realizó el escultor, arquitecto y pintor italiano Bernini entre 1656 y 1667. La plaza es elíptica y sus dimensiones son 320 m de largo por 240 m de ancho. Determina la ecuación de la elipse de la plaza considerándola horizontal y con centro en el origen.

Ejercicios

Otra interpretación de la definición de la elipse

Observemos nuevamente las ecuaciones (6.17) y (6.18):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.$$

Anfiteatro de Pompeya.

Proporcionemos otra interpretación de estas ecuaciones. Si el centro de la elipse es $C(h, k)$, entonces el eje horizontal de la elipse es la recta $y = k$, y el eje vertical es la recta $x = h$. Luego, si $P(x, y)$ es un punto de la elipse, el término $(x-h)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $x = h$, y $(y-k)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $y = k$.

En general, si ℓ es la recta que contiene los focos de la elipse, ℓ' es la recta perpendicular a ℓ que pasa por el centro de la elipse, $2a$ es la distancia entre los vértices y $2c$ es la distancia entre los focos; la ecuación de la elipse es:

$$\boxed{\frac{D(P,\ell')^2}{a^2}+\frac{D(P,\ell)^2}{b^2}=1,} \tag{6.20}$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$, o bien:

$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1,} \tag{6.21}$$

donde (x', y') son las coordenadas de P con respecto a los ejes ℓ, ℓ' (figura 6.29).

Esta manera de ver la ecuación de la elipse es particularmente útil cuando los ejes de la elipse no son paralelos a los ejes cartesianos.

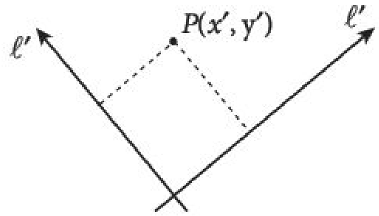


Figura 6.29

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(4, 5)$ y $F'(4, -1)$ y la distancia entre los vértices es 10.

   Solución:
   El centro de la elipse $C(4, 2)$ es el punto medio de los focos, entonces el eje focal es $x = 4$ y el eje no focal es la recta $y = 2$; la distancia focal es $2c = 6$ y $2a = 10$, así que:

   $$b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

   entonces la ecuación de la elipse es (figura 6.30):

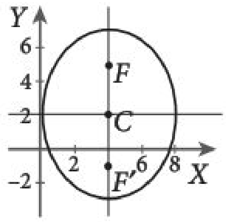


Figura 6.30

   $$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

2. Encontrar la ecuación, en su forma general, de la elipse cuyos focos son $F'(0, 0)$ y $F(2, 2)$ y su eje mayor mide 4.

   Solución:
   El eje mayor está contenido en la recta que contiene los focos:

   $$y = x.$$

   El centro de la elipse es el punto medio entre los focos $C(1, 1)$, el eje menor está contenido en la recta perpendicular a la anterior que pasa por el centro de la elipse:

   $$y = -x + 2.$$

   Como el eje mayor es $2a = 4$, el valor de a es 2, entonces la distancia entre los focos es:

   $$2c = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

así que $c = \sqrt{2}$, y:

$$b = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (6.20), obtenemos:

$$\frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-y)^2}{4} + \frac{(x+y-2)^2}{8} = 1.$$

Desarrollamos los cuadrados y multiplicamos por 8 para eliminar los denominadores:

$$2\left(x^2 - 2xy + y^2\right) + x^2 + 2xy - 4x + y^2 - 4y + 4 = 8,$$

pasamos todos los términos al primer miembro de la ecuación y obtenemos (figura 6.31):

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$$

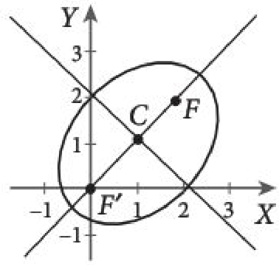


Figura 6.31

Es muy importante hacer notar que en la ecuación anterior aparece un término en xy. En la Unidad 8. La ecuación de segundo grado, veremos que la presencia de este término indica que los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes cartesianos.

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la elipse con los datos indicados. Utiliza la fórmula (6.20).

1. Focos $F'(1, 1)$, $F(5, 7)$ y eje mayor 10.
2. Focos $F'(-1, 2)$, $F(-9, 6)$ y eje mayor 12.
3. Focos $F'(-4, 1)$, $F(4, -1)$ y eje mayor 14.
4. Focos $F'(3, 6)$, $F(5, 8)$ y eje mayor 6.
5. Focos $F'(-7, -3)$, $F(-5, -3)$ y eje mayor 6.
6. Focos $F'(27, 5)$, $F(29, 1)$ y eje mayor 16.
7. Focos $F'(-3, 18)$, $F(1, 22)$ y eje mayor 10.
8. Focos $F'(-3, -5)$, $F(3, 5)$ y eje mayor 12.

Desigualdades y la elipse

Dibuja la región del plano determinada por la desigualdad:

$$25x^2 + 9y^2 - 100x + 72y + 19 < 0.$$

Solución:
Escribimos la desigualdad como:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} < 1.$$

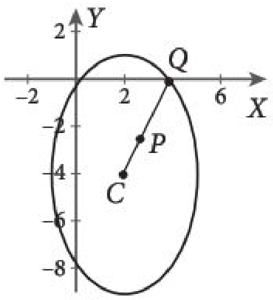


Figura 6.32

Primero dibujemos la curva (figura 6.32):

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1.$$

Vemos que se trata de una elipse vertical con centro en $C(2, -4)$, semieje mayor $a = 5$ y semieje menor $b = 3$.

La elipse divide el plano en tres conjuntos:

- El de los puntos que están en la elipse (figura 6.34).
- El de los puntos que están dentro de la elipse (figura 6.35).
- El de los puntos que están fuera de la elipse (figura 6.36).

Consideremos ahora cualquier punto $P(x, y)$ que no esté en la elipse; por ejemplo, que esté dentro de ella.

Trazamos la recta que pasa por C y P. Llamamos $Q(x_1, y_1)$ al punto en que se cortan dicha recta y la elipse (véase figura 6.32).

De acuerdo con la ecuación (6.20), $(x_1 - 2)^2$ y $(y_1 + 4)^2$ son los cuadrados de las distancias de Q a los ejes de la elipse. Como P está más cerca de los ejes de la elipse de lo que está Q, entonces:

$$(x-2)^2 < (x_1 - 2)^2 \quad \text{y} \quad (y+4)^2 < (y_1 + 4)^2,$$

por lo que podemos completar:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} < \frac{(x_1-2)^2}{9} + \frac{(y_1+4)^2}{25} = 1,$$

ya que Q está en la elipse.

Por lo que todos los puntos que están en el interior de la elipse satisfacen:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{25} < 1.$$

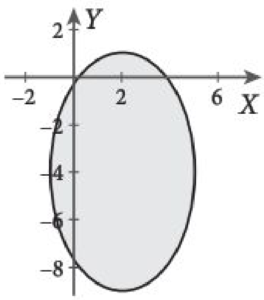


Figura 6.33

La región determinada por la desigualdad se observa en la figura 6.33.

Una elipse divide el plano en tres conjuntos:

- El de los puntos que están en la elipse (figura 6.34).
- El de los puntos que están dentro de la elipse (figura 6.35).
- El de los puntos que están fuera de la elipse (figura 6.36).

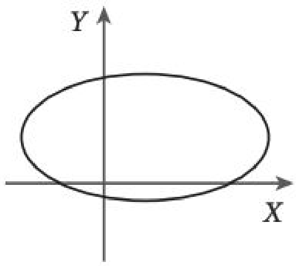


Figura 6.34

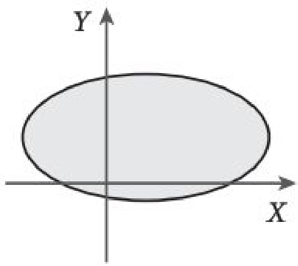


Figura 6.35

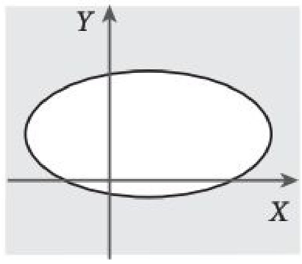


Figura 6.36

Consideremos una elipse horizontal:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1;} \qquad (6.22)$$

los puntos que están en la elipse son los que satisfacen la igualdad.

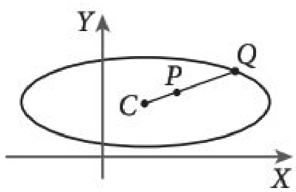


Figura 6.37

Ahora veamos lo que pasa con los puntos que no están en la elipse. Tomemos un punto $P(x, y)$ dentro de la elipse, como se muestra en la figura 6.37.

Prolongamos el segmento que une el centro C de la elipse con P, hasta que corte la elipse en $Q(x_1, y_1)$. Este punto satisface la igualdad (6.22).

De acuerdo con la ecuación (6.20), $(x_1-h)^2$ y $(y_1-k)^2$ son los cuadrados de las distancias de Q a los ejes de la elipse. Como P está más cerca de los ejes de la elipse de lo que está Q, entonces:

$$(x-h)^2<(x_1-h)^2 \quad \text{y} \quad (y-k)^2<(y_1-k)^2,$$

entonces:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}<\frac{(x_1-h)^2}{a^2} \quad \text{y} \quad \frac{(y-k)^2}{b^2}<\frac{(y_1-k)^2}{b^2},$$

y, por tanto,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}<\frac{(x_1-h)^2}{a^2}+\frac{(y_1-k)^2}{b^2}=1.$$

Así que todos los puntos del interior de la elipse satisfacen la desigualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}<1.$$

Con un argumento similar, podemos ver que los puntos que están fuera de la elipse satisfacen la desigualdad contraria.

Para las elipses verticales obtenemos criterios similares. En resumen:

- Un punto $P(x, y)$ está en la elipse si satisface:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

según sea el tipo de elipse.

- Un punto $P(x, y)$ está dentro de la elipse si satisface la desigualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}<1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}<1,$$

según sea el tipo de elipse.

- Un punto $P(x, y)$ está fuera de la elipse si satisface la desigualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}>1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}>1$$

según sea el tipo de elipse.

Pensamiento crítico

Si un punto $P(x, y)$ satisface la desigualdad $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}\geq 1$, ¿en qué región se encuentra?

Ejemplos

1. Traza los conjuntos determinados por la elipse $x^2+9y^2+12x+36y+63=0$ y describe analíticamente dichos conjuntos.

Solución:

Escribimos la ecuación de la elipse en la forma simétrica:

$$\left(x^2+12x+36\right)+9\left(y^2+4y+4\right)=-63+36+36$$

$$(x+6)^2+9(y+2)^2=9$$

$$\frac{(x+6)^2}{9}+(y+2)^2=1.$$

Se trata de la elipse horizontal con centro en $C(-6,-2)$, semieje mayor $a=3$ y semieje menor $b=1$.

Los puntos que están en la elipse satisfacen la ecuación (figura 6.38):

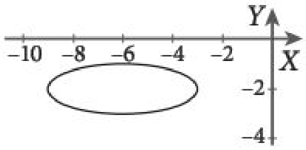


Figura 6.38

$$\frac{(x+6)^2}{9}+(y+2)^2=1,$$

los puntos que están dentro de la elipse satisfacen la desigualdad (figura 6.39):

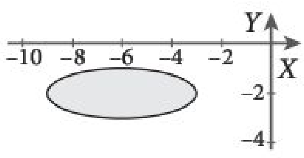


Figura 6.39

$$\frac{(x+6)^2}{9}+(y+2)^2<1$$

y los puntos que están fuera de la elipse satisfacen la desigualdad (figura 6.40):

$$\frac{(x+6)^2}{9}+(y+2)^2>1.$$

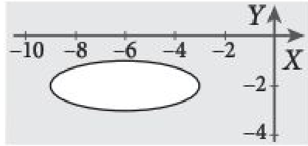


Figura 6.40

2. Traza la región que se encuentra dentro de $4x^2+56x+9y^2-54y+133=0$, fuera de $y^2-6y-8x+1=0$ y fuera de $y^2-6y+8x+89=0$. Escribe las desigualdades que describen la región.

Solución:
Identificamos cada una de las curvas al expresar su ecuación en la forma simétrica.

La primera curva:

$$\begin{aligned}4x^2+56x+9y^2-54y+133&=0\\ 4(x^2+14x+49)+9(y^2-6y+9)&=-133+4(49)+81\\ 4(x+7)^2+9(y-3)^2&=144\\ \frac{(x+7)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{16}&=1\end{aligned}$$

es una elipse horizontal con centro $C(-7, 3)$, semieje mayor 6 y semieje menor 4.

La segunda curva:

$$\begin{aligned}y^2-6y-8x+1&=0\\ y^2-6y+9&=8x-1+9\\ (y-3)^2&=8(x+1)\end{aligned}$$

es una parábola horizontal con vértice en $V(-1,3)$ y abre hacia la derecha.

La tercera curva:

$$\begin{aligned}y^2-6y+8x+89&=0\\ y^2-6y+9&=-8x-89+9\\ (y-3)^2&=-8(x+10)\end{aligned}$$

es una parábola horizontal con vértice en $V(-10, 3)$ y abre hacia la izquierda.

Los puntos que se encuentran dentro de la elipse con ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, satisfacen la desigualdad $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}<1$.

Los puntos que se encuentran fuera de la elipse con ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, satisfacen la desigualdad $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}>1$.

Ejemplos

Las desigualdades que describen la región son:

$$\frac{(x+7)^2}{36}+\frac{(y-3)^2}{16}<1$$
$$(y-3)^2>8(x+1)$$
$$(y-3)^2>-8(x+10).$$

La región es:

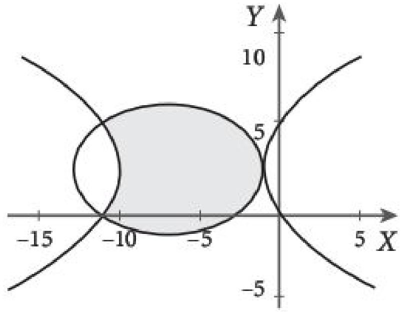


Figura 6.41

Ejercicios

1. Traza la región que está fuera de la elipse $4x^2+9y^2-16x-20=0$ y dentro del círculo $x^2+y^2-4x-5=0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
2. Traza la región que está dentro de $4x^2+y^2+8x-16y+52=0$ y de $x^2-14x-4y+41=0$, y abajo de la recta con pendiente cero que pasa por el punto $P(8, 2)$. Escribe las desigualdades correspondientes.
3. Traza la región que está dentro de $x^2-y=0$, fuera de $x^2+y^2+6x-6y+2=0$ y debajo de la recta que pasa por los puntos $P(-1, 6)$ y $Q(4, 0)$. Escribe las desigualdades correspondientes.
4. Traza la región que consta de los puntos que se encuentran dentro de la elipse $225x^2+64y^2-2250x+128y-8711=0$, fuera del círculo $x^2+y^2-16x+15=0$ y fuera de la parábola $x^2-4y+4=0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
5. Traza la región que consta de los puntos que se encuentran fuera de la elipse $4x^2+9y^2-24x+108y+324=0$ y dentro de las parábolas $y^2+8x-12y+12=0$ y $y^2-8x+10y-23=0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
6. Traza la región que consta de los puntos que se encuentran fuera de la parábola $x^2-y-1=0$, dentro del círculo $x^2+y^2-4=0$, dentro de la elipse $x^2+6y^2-6=0$ y arriba de la recta $3x-y+1=0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
7. Traza la región que consta de los puntos que se encuentran dentro de la elipse $16x^2+y^2-160x+4y+388=0$, fuera del círculo $x^2+y^2-10x+6y+33=0$ y fuera de la parábola $y^2-6x+4y+28=0$. Escribe las desigualdades correspondientes.

Recta tangente a una elipse

Recordemos que en el apartado de la tangente al círculo vimos que una recta ℓ es *tangente* a una cónica en un punto P de la misma, si la corta únicamente en P y todos sus demás puntos están en una sola de las regiones determinadas por la cónica.

En la figura 6.42 la recta corta la elipse en dos puntos, una parte de la recta está dentro de la elipse y otra parte está fuera de ella; en cambio, en la figura 6.43, la recta toca a la elipse en un solo punto y el resto de ella queda fuera. En la figura 6.44, la recta no toca a la elipse, es decir, toda la recta está fuera de ella.

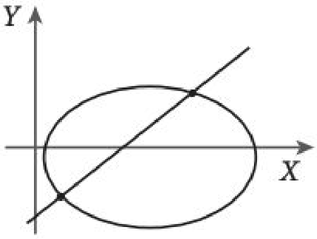


Figura 6.42

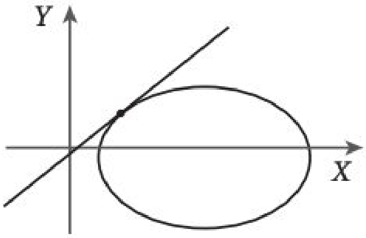


Figura 6.43

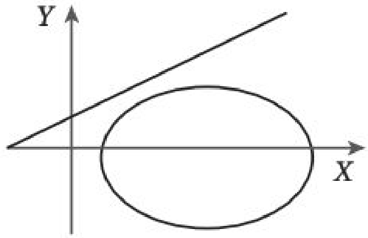


Figura 6.44

Ejemplos

1. Encuentra los puntos de intersección de la recta $5x + 3y + 10 = 0$ y la elipse $\dfrac{(x+8)^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1.$

   Solución:

   Para encontrar los puntos de intersección de la recta con la elipse, debemos resolver el sistema:

$$\frac{(x+8)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$
$$5x + 3y + 10 = 0.$$

   Despejamos y de la segunda ecuación:

$$\boxed{\begin{aligned} 5x + 3y + 10 &= 0 \\ 3y &= -5x - 10 \\ y &= -\frac{5}{3}x - \frac{10}{3} \end{aligned}} \qquad (6.23)$$

Sustituimos este valor de y en la primera ecuación del sistema:

$$\frac{(x+8)^2}{9}+\frac{\left(-\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}-5\right)^2}{25}=1$$

$$25(x+8)^2+9\ \ -\frac{5}{3}x-\frac{25}{3}\ \ ^{2}=25(9)$$

$$25(x+8)^2+(-5x-25)^2=25(9)$$

$$25(x+8)^2+(-5)^2(x+5)^2=25(9)$$

$$(x+8)^2+(x+5)^2=9$$

$$x^2+16x+64+x^2+10x+25=9$$

$$2x^2+26x+89-9=0$$

$$2x^2+26x+80=0$$

$$x^2+13x+40=0$$

$$(x+8)(x+5)=0$$

de donde:

$$x=-8 \qquad \text{o} \qquad x=-5.$$

Sustituimos estos valores en (6.23) y obtenemos:

Si $x=-8$

$$y=-\frac{5}{3}(-8)-\frac{10}{3}=10.$$

Si $x=-5$

$$y=-\frac{5}{3}(-5)-\frac{10}{3}=5.$$

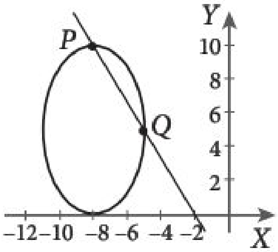


Figura 6.45

Así, los puntos de intersección tienen coordenadas $P(-8, 10)$ y $Q(-5, 5)$ (figura 6.45).

2. Encuentra los puntos de intersección de la recta $2x + 3y - 6 = 0$ y la elipse $4x^2+5y^2+12x-2y-16=0$.

Solución:
Para encontrar los puntos de intersección de la recta con la elipse, debemos resolver el sistema:

$$4x^2+5y^2+12x-2y-16=0$$
$$2x+3y-6=0.$$

Despejamos y de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x+3y-6&=0\\ 3y&=-2x+6\\ y&=-\frac{2}{3}x+\frac{6}{3}\\ y&=-\frac{2}{3}x+2 \end{aligned} \qquad (6.24)$$

Sustituimos este valor de y en la primera ecuación del sistema:

$$4x^2+5\left(-\frac{2}{3}x+2\right)^2+12x-2\left(-\frac{2}{3}x+2\right)-16=0$$

$$4x^2+5\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x+4\right)+12x-2\left(-\frac{2}{3}x+2\right)-16=0$$

$$4x^2+\frac{20}{9}x^2-\frac{40}{3}x+20+12x+\frac{4}{3}x-4-16=0$$

$$4x^2+\frac{20}{9}x^2=0$$

$$x^2\left(4+\frac{20}{9}\right)=0,$$

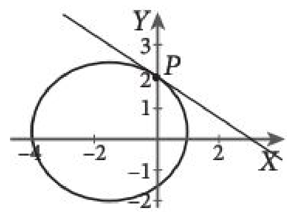


Figura 6.46

de donde $x=0$. Sustituimos en la ecuación (6.24):

$$y=-\frac{2}{3}(0)+2=2.$$

Por tanto, la recta corta la elipse en el punto $P(0,\,2)$ (figura 6.46).

Ejemplos

La tangente a la elipse tiene una propiedad similar a la de la tangente a la parábola que veremos a continuación (figura 6.47).

Dado un punto P, en la elipse,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

la bisectriz del ángulo formado por la recta FP y la recta $F'P$ que, con excepción de P, contiene sólo puntos de fuera de la elipse, es la recta tangente a la elipse en el punto P.

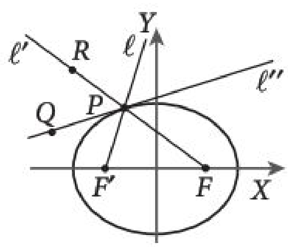


Figura 6.47

En la figura, 6.47 ℓ'' es la bisectriz del ángulo formado por las rectas ℓ y ℓ', mientras que el punto simétrico de F', con respecto a ℓ'', es R. Para ver que ℓ'' es la recta tangente a la elipse, debemos ver que para cualquier punto $Q \neq P$ de ella, Q está fuera de la elipse (figura 6.47):

$$\begin{aligned} d(F,Q)+d(F\ ,Q)&=d(F,Q)+d(Q,R)\\ &>d(F,R)\\ &=d(F,P)+d(P,R)\\ &=d(F,P)+d(P,F\ )=2a, \end{aligned}$$

así que:

$$d(F,Q)+d(F\ ,Q)>2a;$$

por tanto, Q está fuera de la elipse.

Entonces, para encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto P, lo que debemos hacer es encontrar la ecuación de la bisectriz arriba mencionada. Al hacerlo obtenemos:

La recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$.

- Caso de la elipse horizontal con centro en $C(0, 0)$.
  Supongamos que la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

y $P(x_1, y_1)$ está en la elipse. Entonces la ecuación de la recta tangente que pasa por P es:

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1.} \tag{6.25}$$

La recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{x_1x}{b^2}+\frac{y_1y}{a^2}=1$.

- Caso de la elipse vertical con centro en $C(0, 0)$.
  Se intercambian los papeles de a y b y obtenemos:

$$\boxed{\frac{x_1x}{b^2}+\frac{y_1y}{a^2}=1.} \tag{6.26}$$

En resumen, en ambas situaciones cambiamos x^2 por x_1x y y^2 por y_1y.

Ejemplo

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ en el punto $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Solución:
Sustituimos las coordenadas del punto P en la ecuación (6.25):

$$\frac{(1)x}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y=1.$$

Simplificamos y obtenemos (figura 6.48):

$$x+2\sqrt{3}y-4=0.$$

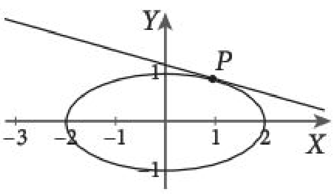


Figura 6.48

Veamos ahora cuál es la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ de la elipse vertical con centro en $C(h, k)$.

Trasladamos los ejes para que el origen quede en C, mediante la sustitución:

$$x' = x - h \qquad \text{y} \qquad y' = y - k; \tag{6.27}$$

las coordenadas de P con respecto a los nuevos ejes son:

$$x_1' = x_1 - h \qquad \text{y} \qquad y_1' = y_1 - k; \tag{6.28}$$

La recta tangente a la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2} + \frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} = 1.$

como la elipse es vertical, entonces, por (6.26):

$$\frac{x_1 x}{b^2} + \frac{y_1 y}{a^2} = 1,$$

sustituimos x', y' de acuerdo con (6.27) y x_1', y_1' de acuerdo con (6.28) y obtenemos la ecuación de la recta tangente a la elipse vertical en $P(x_1, y_1)$:

$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2} + \frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2} = 1. \tag{6.29}$$

La recta tangente a la elipse $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2} + \frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2} = 1.$

De igual manera podemos encontrar la ecuación de la recta tangente a una elipse horizontal en un punto $P(x_1, y_1)$ dado.

$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2} + \frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} = 1. \tag{6.30}$$

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$ en el punto $P(2, -4)$.

Solución:
Escribimos la ecuación de la elipse en la forma simétrica:

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+4)^2}{4} = 1.$$

Podemos comprobar que, en efecto, $P(2, -4)$ está en la elipse al sustituir sus coordenadas en la ecuación:

$$\frac{(2-1)^2}{1} + \frac{(-4+4)^2}{4} = 1 + 0 = 1.$$

Como la elipse es vertical, utilizamos la fórmula (6.29):

$$\frac{(2-1)(x-1)}{1} + \frac{(-4-(-4))(y-(-4))}{4} = 1$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2,$$

así que la recta tangente a la elipse en $P(2, -4)$ es la recta vertical $x = 2$ (figura 6.49).

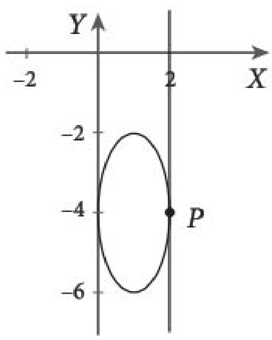


Figura 6.49

2. Encontrar la ecuación de la recta que une el punto $P\left(12,\frac{9}{5}\right)$ con el centro de la elipse $9x^2+25y^2-108x+150y-351=0$, y la ecuación de la recta que pasa por el foco con abscisa positiva y es perpendicular a la recta tangente a la elipse en el punto P. ¿Qué coordenadas tiene el punto Q donde se cortan estas rectas? Demostrar que Q está en la directriz correspondiente a ese foco.

Pensamiento crítico

El punto $P(\frac{9}{5}, 4)$ pertenece a la elipse vertical $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. Un foco de esta es $F(0,-4)$. La recta perpendicular a PF que pasa por F corta la directriz del lado de ese foco en $Q(10, -\frac{25}{4})$. ¿Qué propiedad tiene la recta PQ, respecto a la elipse?

Solución:

Escribimos la ecuación de la elipse en la forma simétrica:

$$9x^2-108x+25y^2+150y=351$$
$$9\left(x^2-12x+36\right)+25\left(y^2+6y+9\right)=351+9(36)+25(9)$$
$$9(x-6)^2+25(y+3)^2=900$$
$$\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y+3)^2}{36}=1,$$

así la elipse es horizontal, con centro en $C(6,-3)$,

$$a^2=100,\quad b^2=36,\quad c^2=a^2-b^2=100-36=64,$$

es decir,

$$a=10,\ b=6,\ c=8.$$

Los focos son:

$$F\,(6-8,-3)=F\,(-2,-3)\quad \text{y}\quad F(6+8,-3)=\boldsymbol{F}(14,-3).$$

La ecuación de la recta que une al punto $P\left(12,\frac{9}{5}\right)$ con $C(6,-3)$ es:

$$y+3=\left(\frac{\frac{9}{5}+3}{12-6}\right)(x-6)$$
$$y=\frac{4}{5}x-\frac{39}{5}.$$

La ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto $P\left(12,\frac{9}{5}\right)$ es:

$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$$
$$\frac{(12-6)(x-6)}{100}+\frac{\left(\frac{9}{5}+3\right)(y+3)}{36}=1$$
$$\frac{6(x-6)}{100}+\frac{2(y+3)}{15}=1$$
$$y=-3+\frac{15}{2}\left(1-\frac{3(x-6)}{50}\right)$$
$$y=-\frac{9}{20}x+\frac{36}{5}.$$

La pendiente de esta recta es $m = -\frac{9}{20}$, entonces la pendiente de una recta perpendicular a esta es $m_1 = \frac{20}{9}$. De donde la ecuación de la recta que pasa por $F(14, -3)$ y es perpendicular a la recta anterior es:

$$y + 3 = \frac{20}{9}(x - 14)$$
$$y = \frac{20}{9}x - \frac{307}{9}.$$

Para encontrar el punto de intersección de estas rectas las igualamos:

$$\frac{4}{5}x - \frac{39}{5} = \frac{20}{9}x - \frac{307}{9}$$
$$x = \frac{37}{2}.$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$y = \frac{4}{5}\left(\frac{37}{2}\right) - \frac{39}{5} = 7.$$

Así, $Q\left(\frac{37}{2}, 7\right)$. La ecuación de la directriz es:

$$x - 6 = \frac{a^2}{c}$$
$$x - 6 = \frac{100}{8}$$
$$x = \frac{37}{2}.$$

Por tanto, $Q\left(\frac{37}{2}, 7\right)$ es un punto de la directriz (figura 6.50).

Ejemplos

Pensamiento crítico

Considera una elipse y un punto P cualquiera, ¿es posible trazar la tangente a la elipse, que pase por P?

Pensamiento crítico

¿Cuántas tangentes a una elipse se pueden trazar desde un punto P que se encuentra fuera de ella?

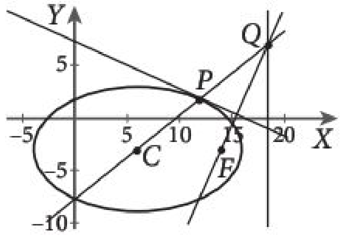


Figura 6.50

Pensamiento crítico

Considera la elipse $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$. ¿Dónde debe estar el punto de tangencia P para que la recta que une P con el centro de la elipse sea perpendicular a la tangente?

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto indicado.

1. $x^2 + 4y^2 - 48y + 80 = 0$, en el punto $P(0, 10)$.
2. $3x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$, en el punto $P\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\right)$.
3. $4x^2 + 7y^2 - 40x + 42y + 135 = 0$, en el punto $P\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{2}\right)$.
4. $8x^2 + 9y^2 - 32x + 54y + 41 = 0$, en el punto $P\left(1, -\frac{17}{3}\right)$.
5. $10x^2 + 3y^2 + 20x + 12y - 8 = 0$, en el punto $P\left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1, 0\right)$.
6. $x^2 + 5y^2 + 14x - 30y + 69 = 0$, en el punto $P\left(-7 - \sqrt{5}, 1\right)$.

7. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse cuya ecuación general es $81x^2 + 144y^2 - 972x - 576y - 1692 = 0$, en el punto $P\left(12, 2 + \frac{3}{2}\sqrt{7}\right)$, y en el vértice cuya abscisa es 14. Encuentra el punto Q donde se cortan ambas tangentes. Calcula la pendiente de la recta que pasa por el otro vértice y el punto P y la de la recta que pasa por el centro de la elipse y el punto Q. ¿Qué puedes decir de estas rectas?
8. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse cuya ecuación general es $16x^2 + 25y^2 - 32x + 200y + 16 = 0$, en los extremos del lado recto que pasa por el foco $F'(-2, -4)$. Demuestra que el punto en el que se cortan estas tangentes se encuentra en la recta que contiene el eje mayor de la elipse.
9. Da las ecuaciones de las rectas con pendiente igual a $\frac{12}{5}$ que son tangentes a la elipse cuya ecuación general es $144x^2 + 25y^2 + 2304x - 250y + 6241 = 0$.
10. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse cuya ecuación general es $3x^2 + y^2 + 24x + 8y + 37 = 0$, y que son perpendiculares a la recta $x + y + 1 = 0$.
11. Dados una elipse y un punto Q fuera de ella, es posible encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto Q. Si Q estuviera dentro de la elipse no sería posible trazar una tangente a la elipse que pase por el punto, ya que cualquier recta que pase por Q corta la elipse en dos puntos. Considera la elipse $2x^2 + y^2 - 28x + 4y + 98 = 0$ y los puntos $P(6, -1)$ y $Q\left(9 + \sqrt{2}, -4\right)$. Encuentra, si es posible, las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto correspondiente.

Ejercicios

Ecuaciones paramétricas de la elipse

Un móvil recorre una curva de manera que en cada tiempo t su abscisa vale $4\cos t$ y su ordenada vale $\operatorname{sen} t$. Supongamos que el tiempo se mide en segundos y que $0 \le t \le 2\pi$. Describir la curva recorrida por el móvil.

Solución:

Tenemos una función de un intervalo de tiempo en el plano, de manera que a cada instante le corresponde un punto en el plano, el punto en donde se encuentra el móvil en ese momento.

Tenemos dos funciones en la variable t:

$$\boxed{x(t) = 4\cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t,} \tag{6.31}$$

que describen la abscisa y la ordenada del punto donde está el móvil en el instante t.

Al trazar unos puntos para algunos valores de t, notamos que la curva parece ser una elipse en la que el radio mayor a vale 4 y el radio menor b vale 1 (figura 6.51).

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
x	4	3.5	2.83	2	0	–2.83	–4	–2.83	0	2.83
y	0	0.5	0.71	0.87	1	2.83	0	–0.71	–1	–0.71

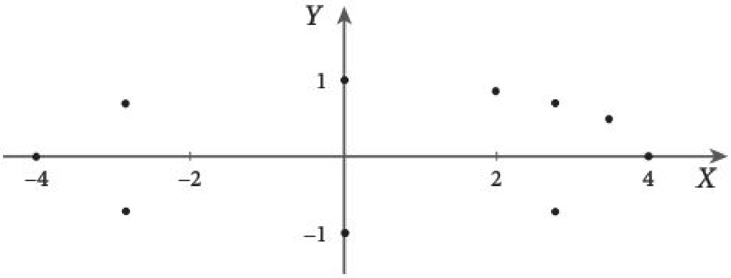


Figura 6.51

Para comprobarlo, partimos de la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1,$$

y sustituimos $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ por el valor para ellos obtenido en las ecuaciones paramétricas (6.31):

$$\frac{x(t)^2}{4^2} + y(t)^2 = 1,$$

así que, efectivamente, para cada t los puntos $(x(t), y(t))$ satisfacen la ecuación de la elipse (figura 6.52):

$$\frac{x^2}{4^2} + y^2 = 1.$$

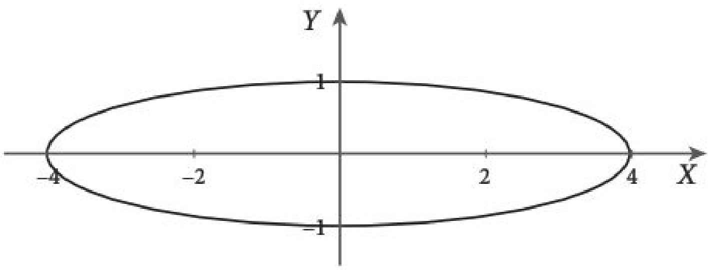


Figura 6.52

Consideremos la elipse horizontal con centro en $C(h, k)$ cuya ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Esto significa que el punto:

$$Q\left(\frac{x-h}{a}, \frac{y-k}{b}\right)$$

está en el círculo con centro en $(0, 0)$ y radio 1, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$(\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Unas ecuaciones paramétricas de la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ son $x(t)=h+a\cos t$, $y(t)=k+b\,\text{sen}\,t$.

Unas ecuaciones paramétricas de la elipse $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ son $x(t)=h+b\cos t$, $y(t)=k+a\,\text{sen}\,t$.

La siguiente rutina en Visual Basic dibuja la elipse del primer ejemplo:

```
Escala = 100
x0 = 2000
y0 = 2000
pi = 3.14159
k = 100
PSet (5, 1)
For t = 0 To k

x = x0+Escala*(1 + 4 * Cos(2 *pi * t / k))

y = y0-Escala*(-2 + 3 * Sin(2 *pi * t / k))

Line -(x, y)
Next
```

La variable Escala permite dibujar la elipse del tamaño deseado en la pantalla.

Al dibujar en computadora, hay que tener cuidado con las coordenadas, ya que el origen está en la esquina superior izquierda de la pantalla y la parte positiva del eje Y apunta hacia abajo; es por eso que hay que utilizar las variables h, k para llevar la figura al centro de la pantalla y poner un signo $(-)$ en el cálculo de y.

Como Q está en círculo, entonces:

$$\frac{x-h}{a}=\cos t \quad \text{y} \quad \frac{y-k}{b}=\text{sen}\,t.$$

Despejamos x y y de las ecuaciones anteriores, escribiendo $x(t)$ y $y(t)$ para hacer hincapié en que ambas dependen de t:

$$x(t)=h+a\cos t$$
$$y(t)=k+b\,\text{sen}\,t.$$

De esta manera hemos obtenido unas *ecuaciones paramétricas* de la elipse.

Conforme t recorre el intervalo $[0, 2\pi]$, el punto $(a\cos t, b\,\text{sen}\,t)$ recorre la elipse con centro en el origen, semieje mayor igual a a y semieje menor igual a b. Al sumar h y k a la abscisa y ordenada de dicho punto se produce una traslación del centro de la elipse al punto (h, k), por lo que el punto:

$$\left(h+a\cos t,\ k+b\,\text{sen}\,t\right)$$

recorre la elipse con centro en (h, k), semieje horizontal igual a a y semieje vertical igual a b.

Para la elipse vertical:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

unas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t)=h+b\cos t$$
$$y(t)=k+a\,\text{sen}\,t.$$

Ejemplos

1. Parametrizar la elipse

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{9}=1.$$

Solución:

Hacemos:

$$\cos^2 t=\frac{(x-3)^2}{4}, \qquad \text{sen}^2\,t=\frac{(y-5)^2}{9}$$

y despejamos x y y:

$$x(t)=3+2\cos t$$
$$y(t)=5+3\,\text{sen}\,t;$$

obtenemos así unas ecuaciones paramétricas de la elipse, con $t \in [0, 2\pi]$ (figura 6.53).

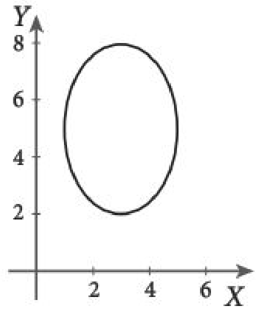


Figura 6.53

2. Parametrizar la elipse:

$$9x^2 + 16y^2 - 18x + 64y - 71 = 0.$$

Solución:
Completamos los cuadrados para escribirla en la forma simétrica:

$$\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1.$$

Entonces, es una elipse horizontal (figura 6.54) cuyo centro es el punto $C(1, -2)$; su semieje horizontal mide 4 y el vertical mide 3, así que unas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = 1 + 4\cos t$$
$$y(t) = -2 + 3\,\text{sen}\, t.$$

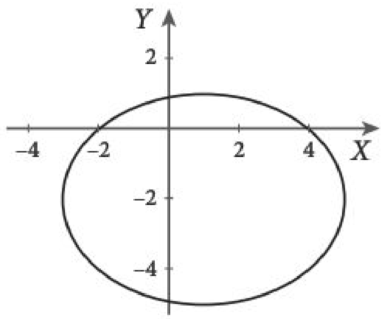


Figura 6.54

3. Escribe en su forma general la ecuación de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $x(t) = -6 + \sqrt{40}\cos t$, $y(t) = -5 + 9\,\text{sen}\, t$.

Solución:
Despejamos $\cos t$ y $\text{sen}\, t$:

$$\cos t = \frac{x+6}{\sqrt{40}} \qquad \text{sen}\, t = \frac{y+5}{9},$$

de donde:

$$1 = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = \frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y+5)^2}{81}.$$

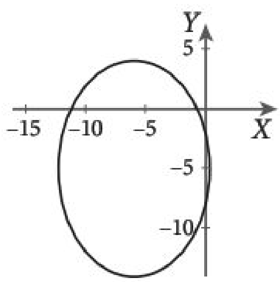


Figura 6.55

Entonces, la ecuación de la elipse (figura 6.55) en su forma general es:

$$81x^2 + 40y^2 + 972x + 400y + 676 = 0.$$

Ejemplos

En resumen:

Posición	Ecuación	Paramétricas
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$x(t)=h+a\cos t$ $y(t)=k+b\,\mathrm{sen}\,t$
Vertical	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	$x(t)=h+b\cos t$ $y(t)=k+a\,\mathrm{sen}\,t$

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación general de la elipse que corresponde a las ecuaciones paramétricas dadas.

1. $(-3+2\cos t, 5+\mathrm{sen}\,t)$.
2. $(6+\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t)$.
3. $\left(\frac{1}{2}+7\cos t, -\frac{3}{4}+3\,\mathrm{sen}\,t\right)$.
4. $\left(-\frac{6}{5}+4\cos t, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$.
5. $(\cos t, 8\,\mathrm{sen}\,t)$.
6. $(9+5\cos t, -2+6\,\mathrm{sen}\,t)$.
7. $\left(\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cos t, -1+\frac{2}{7}\mathrm{sen}\,t\right)$.
8. $\left(\frac{5}{8}\cos t, \frac{3}{2}+\mathrm{sen}\,t\right)$.
9. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+5\cos t, \frac{1}{8}\mathrm{sen}\,t\right)$.
10. $\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\cos t, 8+3\,\mathrm{sen}\,t\right)$.

Escribe, en cada caso, unas ecuaciones paramétricas para la elipse dada en la forma general.

11. $x^2+9y^2+6x-18y+9=0$.
12. $8x^2+9y^2-32x+54y+41=0$.
13. $4x^2+y^2-16=0$.
14. $25x^2+9y^2-225=0$.
15. $4x^2+9y^2+32x+36y+64=0$.
16. $5x^2+4y^2-10x-24y+21=0$.
17. $588x^2+98y^2+588x-56y-433=0$.
18. $54x^2+99y^2+972x-132y+3824=0$.
19. $x^2+2y^2-16x+28=0$.
20. $12x^2+5y^2+72x+40y+128=0$.
21. Encuentra las coordenadas de los vértices de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $\left(4\cos t, \sqrt{7}\,\mathrm{sen}\,t\right)$.
22. Halla los extremos del diámetro menor de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $\left(2+3\cos t, -3+2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$.
23. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $(1+\cos t, -2+2\,\mathrm{sen}\,t)$?
24. Si las ecuaciones paramétricas de una elipse son $(-2+6\cos t, 5+6\,\mathrm{sen}\,t)$, ¿cuál es la excentricidad de la elipse? ¿Qué puedes decir al respecto?
25. Si las ecuaciones paramétricas de una elipse son $\left(3+\sqrt{2}\cos t, -2+3\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, encuentra su excentricidad.
26. Escribe unas ecuaciones paramétricas de la elipse vertical con centro en el punto $C(-1, 0)$, semieje mayor 6 y excentricidad igual a $\frac{1}{8}$.

Ejercicios

27. Si las ecuaciones paramétricas de una elipse son $(-5+6\cos t, -2+10\operatorname{sen} t)$, ¿cuáles son las coordenadas de los focos?
28. Escribe unas ecuaciones paramétricas de la elipse cuyos focos son $F'(-8, 7)$ y $F(5, 7)$ y cuya excentricidad sea igual a $\frac{2}{3}$.
29. Escribe unas ecuaciones paramétricas de la elipse si uno de los vértices es $V(-1, 5)$, su centro es el punto $C(-1, 2)$ y el semieje menor mide 2 unidades.

Resolución de problemas

En este apartado veremos algunos problemas que involucran lugares geométricos relacionados con las elipses.

Lugares geométricos

Encuentra el lugar geométrico formado por los puntos tales que su distancia al punto $Q(1,0)$ sea igual a la mitad de su distancia a la recta $x = 4$.

Solución:
Llamemos $P(x, y)$ a un punto de dicho lugar geométrico y ℓ a la recta $x = 4$.

Las condiciones del problema nos dicen que

$$\boxed{d(P, Q) = \frac{1}{2}(P, \ell).} \tag{6.32}$$

La distancia de P a Q es:

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}.} \tag{6.33}$$

La distancia de P a ℓ es:

$$\boxed{d(P, \ell) = |x - 4.} \tag{6. 34}$$

Sustituyendo (6.33) y (6.34) en (6.32) obtenemos:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} = \frac{1}{2}|x - 4|.$$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado y simplificamos, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 &= \frac{1}{4}\left(x^2 - 8x + 16\right) \\ 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 &= x^2 - 8x + 16 \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 &= 0, \end{aligned}$$

que es la ecuación de una elipse. Para encontrar sus elementos, la escribimos en la forma simétrica:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

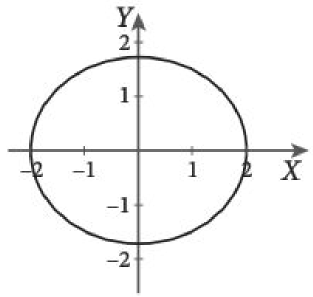


Figura 6. 56

Así pues, vemos que se trata de una elipse horizontal con centro en el origen, con semieje mayor $a = \sqrt{4} = 2$ y semieje menor $b = \sqrt{3}$ (figura 6.56).

Un segmento *AB* de longitud 5 se apoya en los ejes cartesianos, de manera que *A* está en el eje *X* y *B* en el eje *Y*. Encuentra el lugar geométrico descrito por el punto *M* del segmento que está a 3 unidades de *A*, conforme *A* y *B* se mueven sobre los ejes.

Solución:

De acuerdo con las condiciones del problema tenemos: $AB = 5$, $AM = 3$, $BM = 2$.

Las coordenadas de A son $(a, 0)$, y las de B son $(0, b)$.

Sean x y y las coordenadas de M en la figura 6.57, y sean $P(0, y)$ y $Q(x, 0)$; entonces:

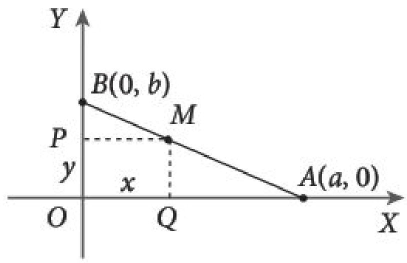


Figura 6.57

Debido a que los triángulos BOA y BPM son semejantes, obtenemos:

$$\frac{PM}{OA} = \frac{MB}{AB},$$

o sea,

$$\frac{x}{a} = \frac{2}{5}, \quad \text{de donde} \quad a = \frac{5}{2}x,$$

de igual forma, los triángulos BOA y MQA son semejantes y, por tanto,

$$\frac{MQ}{OB} = \frac{MA}{AB} \text{ o sea, } \frac{y}{b} = \frac{3}{5};$$

entonces:

$$b = \frac{5}{3}y.$$

Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo OAB,

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$
$$a^2 + b^2 = 25;$$

sustituimos los valores de a y b que encontramos antes y dividimos entre 25, de modo que llegamos a:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,$$

que es la elipse vertical con centro en el origen, que tiene semieje mayor $a = 3$ y semieje menor $b = 2$ (figura 6.58).

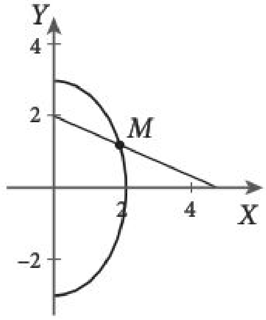


Figura 6.58

Ejercicios

1. Encuentra el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia al punto $P(0, 4)$ sea $\frac{1}{3}$ de su distancia a la recta $y - 10 = 0$.
2. Si los vértices de la base de un triángulo son $A(-5, 0)$ y $B(5, 0)$, encuentra el lugar geométrico del vértice $C(x, y)$ restante, de manera que el producto de las tangentes de los ángulos de la base sea igual a $\frac{1}{9}$.
3. Si los vértices de la base de un triángulo son $A(-8, 0)$ y $B(-1, 0)$, encuentra el lugar geométrico del vértice $C(x, y)$ restante de manera que la suma de las longitudes de los lados AC y BC sea igual a 14.

Mundo virtual

Geolab

1. **Elipse dados los focos y el semieje mayor.** Encuentra la ecuación de la elipse cuyos focos son $F1(5, 0)$ y $F2(-5, 0)$ tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos sea 12. Para ello, construye los puntos y el escalar $a = 6$, luego utiliza el constructor *Focos y a* del menú de cónicas. ¿Qué pasa si haces $a = 3$? En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón de la elipse y oprime el botón *Datos* para ver todos los elementos de la elipse.
2. **Elipse dados los focos y un punto.** Halla la elipse cuyos focos son $F1(1, 1)$ y $F2(-3, -1)$ y que pasa por el punto $P(2, 3)$. Utiliza el constructor *Elipse, focos y punto* del menú de cónicas.
3. **Elipse dados el centro y los semiejes.** Da la ecuación de la elipse horizontal con centro en el origen y que satisface que el eje mayor mida 5 y el menor mida 3. Sugerencia: utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c y con él encontrar los focos. Los focos puedes construirlos como *Puntos calculados*, poniendo c o —c en la coordenada x y 0 en la coordenada y de ellos—. Luego, utiliza la construcción *Focos y a* del menú de cónicas.
4. **Elipse dada la ecuación.** Traza la elipse $4x^2 + y^2 - 36 = 0$. Para ello, utiliza el constructor *Cónica calculada* y asigna a los coeficientes $A...F$ los valores adecuados.
5. **Elipse dada la ecuación.** Traza la elipse $9x^2 + 4y^2 - 90x - 24y + 225 = 0$ y encuentra las coordenadas de los focos, del centro y de los vértices.

6. **Familias de elipses.** Encuentra las elipses con focos en $F1(-5,0)$ y $F2(5,0)$ variando la excentricidad $0 < e < 1$. Geolab no tiene constructor para focos y excentricidad, pero sí tiene para *Focos y a*. Si $c = 5$, tenemos que $a = 5/e$. Construye dos números directos $c = 5$ y $e = 0.5$. Construye los focos como puntos calculados $F1(-c, 0)$ y $F2(c, 0)$. Construye el número calculado $a = c/e$. Construye la cónica con estos focos y el valor de a. Anima el número e entre 0.01 y 0.99. Ejecuta la animación, indicando que la cónica tiene traza.
7. **Construcción con regla y compás.** Realiza la construcción que aparece en la figura 6.10. Anima el punto Q de 0 a 1. Indica que P deje traza y ejecuta la animación. Ve el ejemplo "elipse compás" en la lista de construcciones de Geolab.
8. **Intersección de elipses.** Encuentra el círculo que pasa por los puntos en donde se cortan las elipses $25x^2 + 9y^2 = 1$ y $9x^2 + 16y^2 = 1$. Construye las elipses como cónicas calculadas. Construye las cuatro intersecciones de las cónicas. Construye el círculo que pasa por tres de ellas (circuncírculo) y observa que pasa por el cuarto punto.
9. **Elipse por 5 puntos.** Construye la elipse que pasa por $A(1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(-1, 3)$, $D(3,3)$, $E(-2, -1)$. Utiliza el constructor *Cónica por 5 puntos.*
10. **Tangente a la elipse.** Utiliza la elipse del ejercicio anterior. Construye la tangente a la elipse desde el punto $P(0, -3)$ que está del mismo lado que el punto A. También construye la tangente que está del otro lado de A.
11. **Elementos de la elipse.** Utiliza la elipse del ejercicio 8. Encuentra las intersecciones de las tangentes construidas en el ejercicio 9 con el eje focal de la cónica. Para ello, construye el eje focal de la cónica. Utiliza el constructor *Rectas de una Cónica->Eje Focal*, del menú de rectas. Una vez construida esta recta, construye sus intersecciones con las tangentes dadas. Observa que a través de los menús *Puntos de una Cónica, Rectas de una Cónica, Escalares de una Cónica* tienes posibilidad de acceder a todos los elementos importantes de la cónica.

Geolab

Resumen de la unidad

- Ecuación de la elipse con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes cartesianos.

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B′
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$C(0, 0)$	$V(a, 0)$ $V'(-a, 0)$	$F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$	$B(0, b)$ $B'(0, -b)$
Vertical	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$C(0, 0)$	$V(0, a)$ $V'(0, -a)$	$F(0, c)$ $F'(0, -c)$	$B(b, 0)$ $B'(-b, 0)$

- Extremos del lado recto de una elipse con centro en $C(0, 0)$.
  - Horizontal:

Foco $F(c, 0)$: $\left(c, \dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(c, -\dfrac{b^2}{a}\right)$.

Foco $F'(-c, 0)$: $\left(-c, \dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(-c, -\dfrac{b^2}{a}\right)$.

  - Vertical:

Foco $F(0, c)$: $\left(\dfrac{b^2}{a}, c\right)$ y $\left(-\dfrac{b^2}{a}, c\right)$.

Foco $F'(0, -c)$: $\left(\dfrac{b^2}{a}, -c\right)$ y $\left(-\dfrac{b^2}{a}, -c\right)$.

- Directrices:
  - Elipse horizontal: $x = \dfrac{a^2}{c}$; $F(c, 0)$ $x = -\dfrac{a^2}{c}$; $F'(-c, 0)$.
  - Elipse vertical: $y = \dfrac{a^2}{c}$; $F(0, c)$ $y = -\dfrac{a^2}{c}$; $F'(0, -c)$.

- Ecuación de la tangente a la elipse con centro en $C(0,0)$ en el punto $Q(x_1, y_1)$:
  - Horizontal: $\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$.
  - Vertical: $\dfrac{x_1 x}{b^2} + \dfrac{y_1 y}{a^2} = 1$.

- Ecuación de la elipse con centro en $C(h, k)$ y ejes paralelos a los ejes cartesianos.

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$C(h, k)$	$V(h+a, k)$ $V'(h-a, k)$	$F(h+c, k)$ $F'(h-c, k)$	$B(h, k+b)$ $B'(h, k-b)$
Vertical	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$C(h, k)$	$V(h, k+a)$ $V'(h, k-a)$	$F(h, k+c)$ $F'(h, k-c)$	$B(h+b, k)$ $B'(h-b, k)$

- Extremos del lado recto de una elipse con centro en $C(h, k)$.
  - Horizontal:

Foco $F(h+c, k)$: $\left(h+c, k+\dfrac{b^2}{a}\right)$ y $\left(h+c, k-\dfrac{b^2}{a}\right)$.

Foco $F'(h-c, k)$: $\left(h-c, k+\frac{b^2}{a}\right)$ y $\left(h-c, k-\frac{b^2}{a}\right)$.

- Vertical:

Foco $F(h, k+c)$: $\left(h+\frac{b^2}{a}, k+c\right)$ y $\left(h-\frac{b^2}{a}, k+c\right)$.

Foco $F'(h, k-c)$: $\left(h+\frac{b^2}{a}, k-c\right)$ y $\left(h-\frac{b^2}{a}, k-c\right)$.

- Directrices:
  - Elipse horizontal: $x-h=\frac{a^2}{c}$ $\quad F(h+c, k)$

    $x-h=-\frac{a^2}{c}$ $\quad F(h-c, k)$
  - Elipse vertical: $y-k=\frac{a^2}{c}$ $\quad F(h, k+c)$

    $y-k=-\frac{a^2}{c}$ $\quad F(h, k-c)$

- Ecuación de la recta tangente a la elipse con centro en $C(h, k)$ en el punto $Q(x_1, y_1)$:
  - Horizontal: $\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$
  - Vertical: $\frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2}=1$
- Forma general de la ecuación de la elipse $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde $A\neq 0$, $C\,0\neq 0$ y A y C tienen el mismo signo.
- Unas ecuaciones paramétricas de la elipse con centro en C(h, k).
  - Elipse horizontal: $x(t)=h+a\cos t$, $y(t)=k+b\,\text{sen}\,t$.
  - Elipse vertical: $x(t)=h+b\cos t$, $y(t)=k+a\,\text{sen}\,t$.

Ejercicios de repaso

1. Dos rectas tangentes a la elipse $9x^2+16y^2-144=0$ se cortan en el punto $P\left(0,\frac{6}{\sqrt{3}}\right)$. Encuentra los puntos de tangencia y las ecuaciones de las rectas tangentes.
2. Halla la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos donde se cortan la recta $x-3=0$ y el círculo $x^2+y^2=25$, y la distancia entre sus vértices es 12.
3. Da las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $x^2+25y^2-12x-100y+111=0$ que son paralelas a la recta $3x-20y+20=0$.

4. Demuestra que las rectas tangentes a la elipse
$49x^2 + 36y^2 - 490x - 504y + 1225 = 0$ en los puntos $P(5, 14)$ y $Q(11, 7)$ son perpendiculares.
5. Demuestra que la ecuación $9x^2 + 16y^2 - 16 = 0$ representa una elipse horizontal con centro en el origen y calcula su excentricidad.
6. Repite el problema anterior para las siguientes ecuaciones:
   a) $9x^2 + 16y^2 - 25 = 0$.
   b) $9x^2 + 16y^2 - k^2 = 0$, donde $k > 0$.
7. Considera la elipse $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$. Encuentra sus puntos de intersección con el eje Y y llámalos P_1 y P_2. Encuentra las coordenadas de los focos F' y F. Demuestra que el eje mayor es $d(P_1, F) + d(F, P_2) = d(P_1, F\ \ ) + d(F\ \ , P_2)$.
8. Halla los focos de la elipse $4x^2 + y^2 + 40x - 14y + 145 = 0$. Prueba que el producto de las distancias de los focos a la recta tangente a la elipse en el punto $P(-5, 9)$ es igual a 1.
9. Traza la elipse $4x^2 + y^2 - 16x + 8y + 16 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse en el vértice $V(2, 0)$ y en el punto $P(4, -4)$. Da la intersección de estas dos rectas, y llama Q a dicho punto. Halla la ecuación de la recta que pasa por P y el vértice V' de la elipse. Muestra que esta recta es paralela a la recta que une a Q con el centro de la elipse.
10. Considera la parábola $y^2 = 4x$ y encuentra la ecuación de la recta que pasa por su foco y es paralela al eje Y. Halla los puntos donde se cortan esta recta y la parábola. Por último, da la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos que encontraste y que tiene excentricidad $\frac{1}{2}$.
11. Demuestra que las elipses $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{26} = 1$, $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{27} = 1$ y $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{28} = 1$ tienen los mismos focos. Escribe la ecuación de otra elipse con los mismos focos.
12. Encuentra cuatro puntos por los que pasa la elipse
$9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y - 111 = 0$.
13. Se desea construir un puente de piedra sobre un río de manera que el claro debajo de él sea media elipse. El claro debe medir en la base 20 metros y es necesario que pueda pasar debajo del puente una barcaza de 6 metros de ancho y 3 metros de altura sobre el agua. ¿Cuál es la altura mínima sobre el nivel del agua desde el centro del puente?
14. Encuentra los puntos donde se cortan la elipse $2x^2 + y^2 - 4x - 4y - 21 = 0$ y el círculo $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 13 = 0$.
15. Encuentra las cuatro ecuaciones de las rectas que pasan por un vértice y un extremo del eje menor de la elipse $2x^2 + y^2 - 28x + 8y + 108 = 0$.
16. Considera el círculo con centro en el origen y radio 6. Encuentra el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que $x \in (-6, 6)$ y $y = \frac{1}{2}y_1$, donde $Q(x, y_1)$ está en el círculo.
17. Considera la elipse $25x^2 + 16y^2 - 300x + 128y - 444 = 0$. Halla sus focos y la tangente en el punto $P\left(6 + \frac{16}{5}\sqrt{6}, -2\right)$. Demuestra que el producto de las distancias de los focos a la recta tangente es igual a 64.
18. Encuentra la longitud del lado recto de la elipse
$25x^2 + 16y^2 + 300x - 32y - 2684 = 0$ y las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse en los extremos de los lados rectos.
19. Traza la región que está dentro de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$, fuera de los círculos $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 25 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ y fuera de la parábola $x^2 - 8x - 4y + 12 = 0$. Escribe las desigualdades que describen la región.

Autoevaluación

1. Encuentra la ecuación simétrica de la elipse cuyos focos son $F'(0, -8)$ y $F(0, 8)$ tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos es 20.

   a. $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1.$

   b. $\dfrac{x^2}{39936}+\dfrac{y^2}{40000}=1.$

   c. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{100}=1.$

   d. $\dfrac{x^2}{40000}+\dfrac{y^2}{39936}=1.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 273.

2. Encuentra la ecuación general de la elipse cuyos focos son $F(4, 0)$ y $F'(-4, 0)$ tal que la suma de las distancias de los puntos de la elipse a los focos es 10.
   a. $25x^2+9y^2-225=0.$
   b. $9x^2+25y^2-225=0.$
   c. $621x^2+625y^2-1552500=0.$
   d. $625x^2+621y^2-1552500=0.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 273.

3. Encuentra las coordenadas de los focos de la elipse: $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{25}=1.$
   a. $(13, 0)$ y $(-13, 0)$.
   b. $(12, 0)$ y $(-12, 0)$.
   c. $(0, 13)$ y $(0, -13)$.
   d. $(0, 12)$ y $(0, -12)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 274.

4. Encuentra la excentricidad de la elipse $169x^2 + 25y^2 = 16900$.

   a. $\dfrac{13}{12}$. c. $\dfrac{12}{13}$.

   b. $\dfrac{5}{12}$. d. $\dfrac{5}{13}$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 283.

5. Encuentra la forma simétrica de la elipse con excentricidad $\frac{5}{4}$ y vértices en $(-4, -5)$ y $(6, -5)$.

   a. $\dfrac{(x-1)^2}{5^2}+\dfrac{(y\ 5)^2}{4^2}=1.$

   b. $\dfrac{(x-1)^2}{5^2}+\dfrac{(y+5)^2}{3^2}=1.$

   c. $\dfrac{(x-1)^2}{3^2}+\dfrac{(y+5)^2}{5^2}=1.$

   d. $\dfrac{(x+1)^2}{5^2}+\dfrac{(y-5)^2}{3^2}=1.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 283.

6. Encuentra el centro de la elipse $x^2+2y^2-8x+12y+28=0.$
   a. $(6, 3)$.
   b. $(-3, 4)$.
   c. $(-4, 3)$.
   d. $(4, -3)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 289.

7. Encuentra los puntos de intersección de la elipse $4x^2+5y^2+4x-2y-24=0$ y la recta $x+2y-2=0.$
   a. $(-2, 2)$ y $(2, 0)$.
   b. $(2, -2)$ y $(2, 0)$.
   c. $(2, -2)$ y $(0, 2)$.
   d. No se cortan.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 309.

8. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + y^2 - 20 = 0$ que pasa por el punto $(2, 2)$.
   a. $5x + y - 10 = 0.$
   b. $x + 4y - 10 = 0.$
   c. $4x + y - 20 = 0.$
   d. $4x + y - 10 = 0.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 309.

Heteroevaluación

1. Encuentra las coordenadas de los focos de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 16y^2 + 90x - 64y - 287 = 0$.

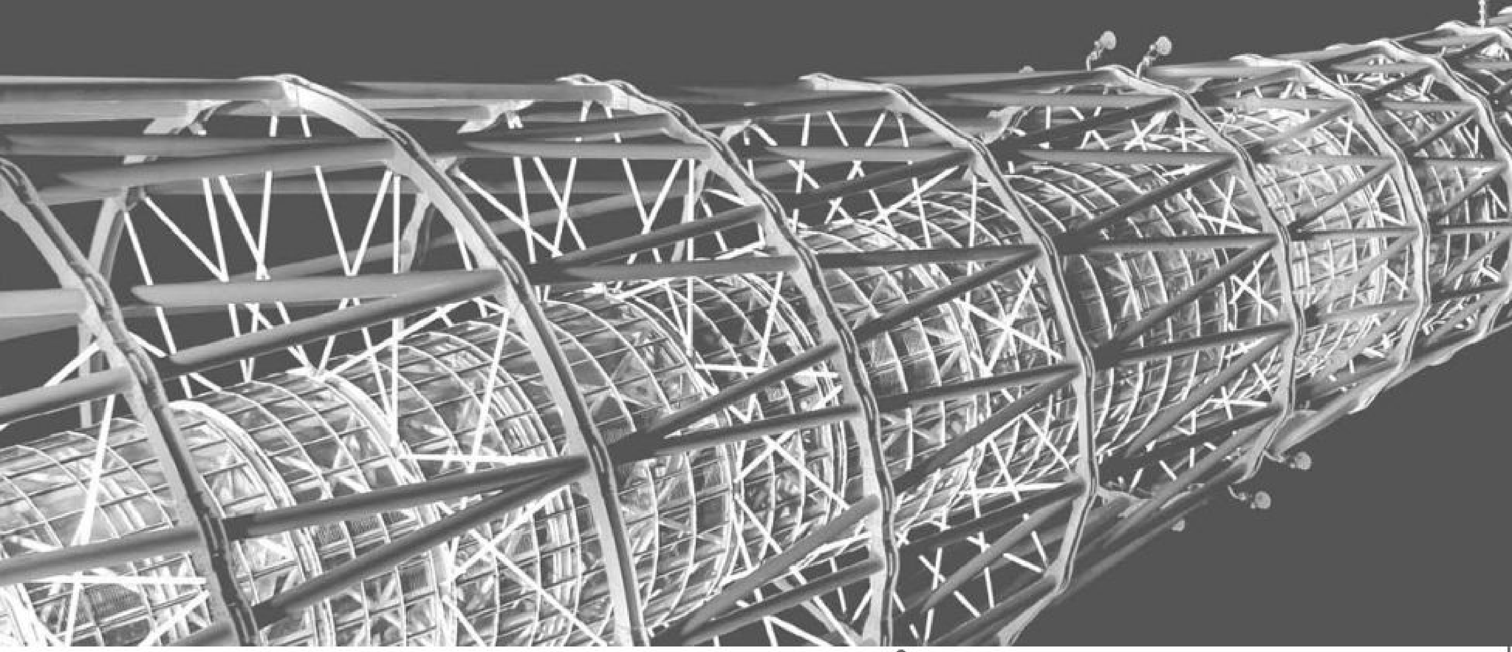
2. Encuentra la excentricidad de la elipse cuya ecuación es $169x^2 + 144y^2 - 1352x + 864y - 20336 = 0$.

3. Encuentra la ecuación simétrica de la elipse cuyo semieje mayor mide $\sqrt{10}$ y tiene focos $F'(-3, -3)$, $F(-3, 1)$ y la recta $y = -6$ como una de sus directrices.

4. Encuentra la forma simétrica de la elipse con excentricidad $\frac{1}{3}$ y vértices en $V'\left(-\frac{5}{2}, -7\right), V\left(\frac{7}{2}, -7\right)$.

5. Encuentra la ecuación de la tangente a la elipse $9x^2 + 18y^2 - 72x + 12y + 92 = 0$, en el punto $P\left(6, \frac{2}{3}\right)$.

6. Encuentra las coordenadas para obtener las ecuaciones de las rectas tangentes. El centro del círculo es $C(2, -3)$ y su radio es 6.



Torre hiperboloide en Kobe, Japón.

Unidad 7 La hipérbola

Con esta unidad concluye el estudio individual de las cónicas. A partir de la definición de la hipérbola como un lugar geométrico, y con la ayuda de la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, encontramos la ecuación tanto en su forma simétrica como en la general.

Solo trataremos los casos de hipérbolas horizontales y verticales cuando su centro se encuentra en el origen o en un punto arbitrario del plano. En la siguiente unidad consideraremos situaciones más generales, no solo para las hipérbolas, sino para el resto de las cónicas.

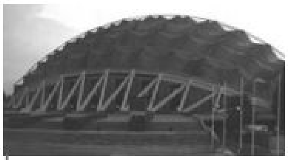
La hipérbola, a diferencia de las otras cónicas, está formada por dos partes separadas llamadas *ramas* de la hipérbola. De un punto de una de las ramas no puede llegarse a un punto de la otra sin separar el lápiz del papel.

La propiedad que sirve para definir la hipérbola (el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos [focos] es constante) se usa en el sistema de radionavegación Loran (*long range navegation*) para dirigir embarcaciones marítimas. Explicaremos cómo funciona este sistema, a través de un ejemplo y ejercicios.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

La hipérbola

- Definición de la hipérbola
- La hipérbola con centro en el origen
  - Hipérbola horizontal
  - Hipérbola vertical
- Las asíntotas de la hipérbola
- La excentricidad de la hipérbola
  - Otra manera de definir una hipérbola
  - Directrices de la hipérbola
- Construcción de la hipérbola
  - Sugerencias para trazar una hipérbola
  - Construcción de la hipérbola con el uso de instrumentos
- Hipérbolas con eje focal paralelo a un eje cartesiano
  - Directrices de la hipérbola con centro en $C(h,k)$
- Aplicaciones de la hipérbola
  - Propiedad de reflexión de la hipérbola
  - Sistema de navegación Loran
  - Arquitectura
  - Astronomía
- Otra interpretación de la definición de la hipérbola
- Las funciones cuadráticas y las hipérbolas
- Desigualdades y la hipérbola
- Recta tangente a una hipérbola
- Ecuaciones paramétricas de la hipérbola
- Resolución de problemas
  - Lugares geométricos



Palacio de los Deportes.

Definición de la hipérbola

El arquitecto Félix Candela construyó en la Ciudad de México el Palacio de los Deportes, una de las sedes de los Juegos Olímpicos de 1968. En su diseño usó paraboloides hiperbólicos.

Encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que la diferencia de sus distancias a $F(5, 0)$ y a $F'(-5, 0)$ es 4.

La hipérbola está formada por todos los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (focos), es igual a una constante.

Su ecuación se obtiene restando las distancias de un punto genérico (x, y) a los focos dados e igualando dicha diferencia a la constante.

Solución:

El procedimiento que usaremos es muy similar al utilizado en la unidad anterior para las elipses.

Llamemos $P(x, y)$ a un punto de dicho lugar geométrico. Debemos restar la distancia de P a F' a la distancia de P a F e igualar a 4:

$$\boxed{d(P,F) - d(P,F) = 4.} \tag{7.1}$$

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1):

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Sustituimos las coordenadas de $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ en (7.1):

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2} = 4$$
$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} - \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} = 4.$$

Pasamos una de las raíces cuadradas al otro lado de la igualdad y elevamos ambos lados al cuadrado:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} = 4 + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$
$$\left(\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2}\right)^2 = \left(4 + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}\right)^2$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 16 + 8\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} + x^2 + 10x + 25 + y^2.$$

En el lado derecho dejamos únicamente la raíz y de nuevo elevamos al cuadrado:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - \left(x^2 + 10x + 41 + y^2\right) = 8\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$
$$4(-5x - 4) = 8\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$
$$(-5x - 4)^2 = \left(2\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}\right)^2$$
$$25x^2 + 40x + 16 = 4x^2 + 40x + 100 + 4y^2.$$

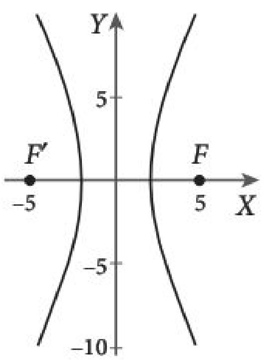


Figura 7.1

Pasamos todo a un lado de la igualdad y obtenemos que el lugar geométrico deseado (figura 7.1) es el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación:

$$21x^2 - 4y^2 - 84 = 0.$$

Observación:
Si en lugar de considerar la diferencia (7.1) consideramos:

$$d(P,F)-d(P,F)=4, \tag{7.2}$$

también llegamos a la misma ecuación. De hecho, el conjunto de puntos que satisface (7.1) es la curva de la izquierda en la figura 7.1, y los puntos que satisfacen (7.2) forman la curva de la derecha.

Las palabras *elipse, parábola* e *hipérbola* aparecieron por primera vez en el tratado *Las cónicas* de Apolonio de Pérgamo (hoy Bergama, Turquía) (262-190 a. C.), conocido como *el gran geómetra.*

Una *hipérbola* es el conjunto de puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos tienen una diferencia constante. Con esto queremos decir que consideramos la diferencia de la distancia mayor, menos la distancia menor. Los dos puntos fijos se llaman *focos* de la hipérbola. El punto medio entre los dos focos se llama *centro* de la hipérbola.

La hipérbola con centro en el origen

Hipérbola horizontal

Comencemos con el análisis de una hipérbola con centro en el origen y focos en el eje X. Supongamos que las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Para que un punto $P(x, y)$ pertenezca a la hipérbola, debe satisfacer:

$$d(P,F\ )-d(P,F)=k, \tag{7.3}$$

o

$$d(P,F)-d(P,F\ )=k, \tag{7.4}$$

donde k es una constante (figura 7.2).

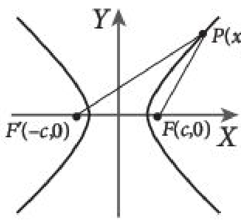


Figura 7.2

Si hacemos $a=\dfrac{k}{2}$, podemos ver que los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ pertenecen a la hipérbola, ya que:

$$d(V,F\ )-d(V,F)=\sqrt{(a+c)^2}-\sqrt{(a-c)^2}=a+c-(c-a)=2a=k,$$

y similarmente para V' (figura 7.3).

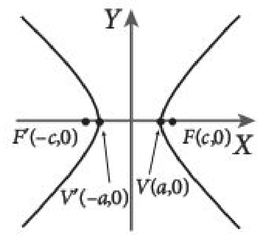


Figura 7.3

En general, si sustituimos las coordenadas de P, F y F' en la fórmula de la distancia entre dos puntos (1.1) y la expresión (7.3), la ecuación queda como sigue:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=k.$$

Para eliminar los radicales, pasamos uno de ellos al otro lado de la igualdad y elevamos al cuadrado:

$$(x+c)^2+y^2=\left(k+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2.$$

Simplificando, obtenemos:

$$\boxed{4cx - k^2 = 2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.} \tag{7.5}$$

Volvemos a elevar al cuadrado para eliminar el otro radical y simplificamos de nuevo:

$$\boxed{4\left(4c^2 - k^2\right)x^2 - 4k^2y^2 = k^2\left(4c^2 - k^2\right).} \tag{7.6}$$

Recordamos que $k = 2a$; al sustituir en la fórmula (7.6), tenemos:

$$4\left(4c^2 - 4a^2\right)x^2 - 16a^2y^2 = 4a^2\left(4c^2 - 4a^2\right)$$
$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right).$$

Una hipérbola horizontal con centro en el origen tiene ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Luego dividimos toda la ecuación entre $a^2\left(c^2 - a^2\right)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Observa que obtenemos la misma ecuación (6.3) que obtuvimos para la elipse. Esta ecuación va a representar una elipse o una hipérbola dependiendo de la relación que haya entre a y c: será elipse cuando $a > c$ e hipérbola cuando $a < c$.

En este caso, como $c > a > 0$, podemos definir $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, así $b^2 = c^2 - a^2$ y llegamos a la ecuación *simétrica* de la hipérbola:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{7.7}$$

Si en lugar de trabajar con (7.4) trabajamos con (7.3), llegamos a la misma ecuación.

En la ecuación (7.7) pasamos todos los términos al primer miembro y multiplicamos por a^2b^2 y nos queda la ecuación de la hipérbola horizontal en la *forma general*,

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

la cual es del tipo:

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0,$$

donde A y C tienen signos distintos.

Ahora centrémonos en algunos de los elementos principales de la hipérbola (figura 7.4).

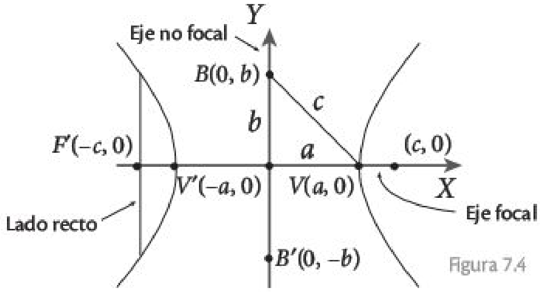


Figura 7.4

- Los puntos $V(a, 0)$ y $V'(-a, 0)$ se conocen como los *vértices* de la hipérbola.
- La recta que contiene los vértices V y V' y los focos F y F' se conoce como *eje focal*.
- A la distancia entre los dos focos F y F' se le llama *distancia focal* y vale $2c$.
- El segmento que une los vértices V y V' se llama *eje transversal* y mide $2a$, y este es el valor de la diferencia de las distancias de cualquiera de los puntos de la hipérbola a los focos.
- El punto medio del segmento $\overline{FF}$ coincide con el del segmento $\overline{VV}$ y se conoce como *centro* de la hipérbola; en este caso, dicho centro es el origen. La distancia del centro a cualquiera de los focos es c, y a cualquiera de los vértices es a.
- La recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje focal se llama *eje no focal*.
- Observa que tanto el eje focal como el eje no focal de la hipérbola son *ejes de simetría* de la hipérbola.
- Notemos que a diferencia del caso de la elipse, ahora $c > a$, es decir, los focos están más lejos entre sí de lo que están los vértices, y la relación entre a, b y c es:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2.} \tag{7.8}$$

- Al segmento que une los puntos $B'(0, -b)$ y $B(0, b)$ se le llama *eje conjugado*.
- Cualquiera de las cuerdas que pasan por un foco y son perpendiculares al eje focal se conocen como *lados rectos*.

Para encontrar la longitud del lado recto, en la ecuación (7.7) hacemos $x = c$, que es la abscisa de uno de los focos:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$, obtenemos:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

si simplificamos y despejamos y^2, tenemos que:

$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}, \quad \text{de donde} \quad y = \pm\frac{b^2}{a},$$

por lo que los puntos:

$$\left(c, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F(c, 0)$. Por tanto, la longitud del lado recto es la distancia entre estos dos puntos:

$$\text{Lado recto} = \frac{2b^2}{a}.$$

De manera similar, los puntos:

$$\left(-c, \frac{b^2}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$$

son los extremos del lado recto que pasa por el foco $F'(-c, 0)$.

Observa que la longitud del lado recto se calcula en la hipérbola con la misma fórmula que en la elipse.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$, tal que la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es 8.

Solución:

Para tener toda la información que necesitamos sobre la hipérbola debemos completar el siguiente cuadro:

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'
4				$F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$		

El punto medio entre los focos es $C(0, 0)$ y los focos están sobre el eje X, así que su ecuación es de la forma (7.7).

La distancia entre los focos es $2c = 10$ y la distancia entre los vértices es $2a = 8$. Entonces tenemos:

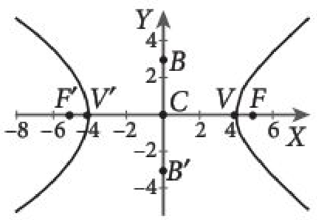


Figura 7.5

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9,$$

y la ecuación de la hipérbola es (figura 7.5):

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'
4	3	5	$C(0, 0)$	$F(5, 0)$ $F'(-5, 0)$	$V(4, 0)$ $V'(-4, 0)$	$B(0, 3)$ $B'(0, -3)$

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(8, 0)$ y $F'(-8, 0)$ y cuyos vértices son $V(4, 0)$ y $V'(-4, 0)$.

Solución:

Los focos están sobre el eje X, así que la hipérbola es horizontal. El punto medio de los focos es $C(0, 0)$, que es el centro de la hipérbola.

La distancia del centro a los focos es $c = 8$ y la distancia del centro a los vértices es $a = 4$. Por la relación (7.8), tenemos:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 48.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (7.7) y obtenemos (figura 7.6):

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1.$$

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'
4	$\sqrt{48}$	8	$C(0, 0)$	$F(8, 0)$ $F'(-8, 0)$	$V(4, 0)$ $V'(-4, 0)$	$B(0, \sqrt{48}) \approx B(0, 6.92)$ $B'(0, -\sqrt{48}) \approx B(0, -6.92)$

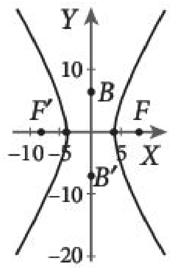


Figura 7.6

Ejemplos

Hipérbola vertical

Si la hipérbola tiene centro en el origen y sus focos están en el eje Y, las coordenadas de los focos son $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$. Si de nuevo llamamos $2a$ a la diferencia de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la hipérbola a los focos y hacemos un análisis similar al anterior, o simplemente intercambiamos los papeles de x y y, llegamos ahora a la ecuación siguiente (figura 7.7):

Una hipérbola vertical con centro en el origen tiene ecuación de la forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.} \tag{7.9}$$

Donde, como antes, $b^2=c^2-a^2$.

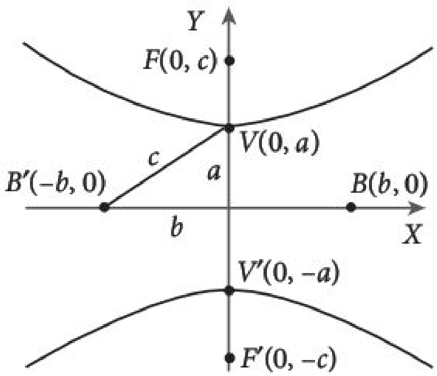


Figura 7.7

En el caso de la hipérbola, a no tiene que ser mayor que b, a diferencia de la elipse, en que siempre $a \geq b$. El hecho de que sea horizontal o vertical se refleja en la fórmula por el signo negativo.

De nuevo, la distancia del centro a cualquiera de los focos es c y a cualquiera de los vértices es a.

Los vértices son ahora $V(0, a)$ y $V'(0, -a)$.

Observación: Cuando la hipérbola es vertical el coeficiente de x^2 es negativo en la ecuación en su forma simétrica; cuando la hipérbola es horizontal el coeficiente de x^2 es positivo.

En resumen:

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$C(0, 0)$	$V(a, 0)$, $V'(-a, 0)$.	$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$.	$B(0, b)$, $B'(0, -b)$.
Vertical	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$C(0, 0)$	$V(0, a)$, $V'(0, -a)$.	$F(0, c)$, $F'(0, -c)$.	$B(b, 0)$, $B'(-b, 0)$.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(0, 5)$ y $F'(0, -5)$ y tal que la diferencia de las distancias de sus puntos a los focos es 2.

Solución:
Los focos están sobre el eje Y, así que la hipérbola es vertical. Su centro es el punto medio de los focos $C(0, 0)$. La distancia del centro a los focos es $c = 5$. La diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es $2a = 2$, así que $a = 1$, por lo que los vértices son $V'(0, -1)$ y $V(0, 1)$. Utilizando (7.8), obtenemos:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 1 = 24.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (7.9) (figura 7.8),

$$y^2 - \frac{x^2}{24} = 1.$$

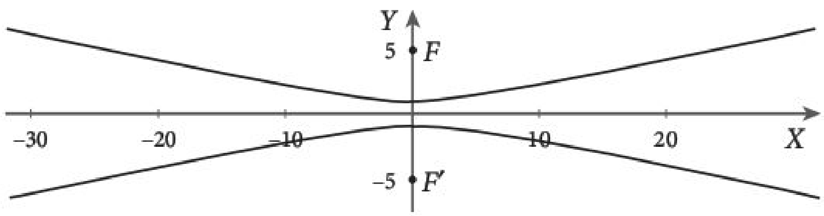


Figura 7.8

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V(0, 6)$ y $V'(0, -6)$ y cuyos focos son $F(0, 10)$ y $F'(0, -10)$.

Solución:
De nuevo, el centro es $C(0, 0)$, los focos están sobre el eje Y, la distancia focal es $2c = 20$ y la distancia entre los vértices es $2a = 12$. Entonces:

$$b^2 = 10^2 - 6^2 = 64,$$

Ejemplos

y la ecuación de la hipérbola es (figura 7.9):

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1.$$

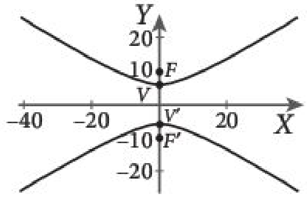


Figura 7.9

Ejercicios

Encuentra las coordenadas de los vértices y de los focos de las siguientes hipérbolas.

1. $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{36}=1.$
2. $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{3}=1.$
3. $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{121}=1.$
4. $25x^2-49y^2-1225=0.$
5. $2x^2-3y^2=12.$
6. $5x^2-4y^2=100.$
7. $-4x^2+5y^2-80=0.$
8. $y^2-9x^2-81=0.$
9. $x^2-9y^2-81=0.$
10. $25x^2-9y^2-225=0.$
11. $-9x^2+4y^2-36=0.$
12. $-4x^2+y^2=16.$

En cada caso, encuentra la ecuación de la hipérbola con los datos indicados.

13. Focos $F'(-5, 0)$, $F(5, 0)$; la distancia entre sus vértices es 4.
14. Vértices $V'(0, -3)$, $V(0, 3)$; distancia focal 7.
15. Vértices $V'(-4, 0)$, $V(4, 0)$; distancia focal 10.
16. Focos $F'\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $F\left(\frac{3}{2},0\right)$; la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es 2.
17. Focos $F'(0, -6)$, $F(0, 6)$; vértices $V'(0, -3)$, $V(0, 3)$.
18. Distancia focal 14, $C(0, 0)$, longitud del lado recto 20.
19. Encuentra las ecuaciones de los círculos con centro en cada foco de la hipérbola $16x^2-9y^2-9=0$ y cuyo radio mide la distancia entre los vértices de la hipérbola.
20. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo formado por los focos de la hipérbola $5y^2-4x^2-20=0$ y el punto $P(-5, -1)$.
21. Da con la ecuación del círculo que pasa por los focos de las hipérbolas cuyas ecuaciones son $9x^2-16y^2=144$ y $16y^2-9x^2=144$.
22. Una hipérbola es *equilátera* si $a=b$. Considera las hipérbolas $x^2-y^2=16$ y $y^2-x^2=16$. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los cuatro focos y la ecuación del círculo que pasa por los cuatro vértices.
23. Considera las hipérbolas $x^2-y^2=a^2$ y $y^2-x^2=a^2$. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los cuatro focos y la del círculo que pasa por los cuatro vértices.
24. Las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ se llaman *hipérbolas conjugadas*. Halla la hipérbola conjugada de $-49x^2+81y^2-3969=0$. Traza las hipérbolas en el mismo sistema coordenado.

Las asíntotas de la hipérbola

Consideremos una hipérbola horizontal dada por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Si despejamos y, obtenemos:

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Observamos que si $|x|$ es muy grande, x^2-a^2 es "casi igual" a x^2 y, por tanto, $\sqrt{x^2-a^2}$ es casi igual a $|x|$ es decir, para x grande (ya sea positiva o negativa), y es "casi igual" a $\pm\frac{b}{a}x$, o sea, que las ramas de la hipérbola se aproximan a las rectas:

Las asíntotas de la hipérbola horizontal $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tienen ecuaciones $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$.

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y=-\frac{b}{a}x,} \tag{7.10}$$

cuando $|x|$ es muy grande (figura 7.10).

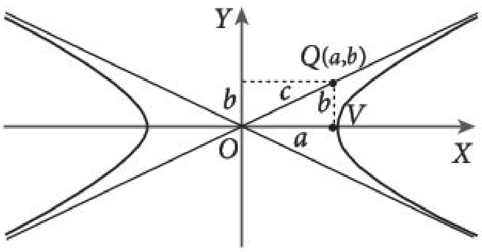


Figura 7.10

Este par de rectas se conoce como las *asíntotas* de la hipérbola.

Observa que el triángulo OVQ es rectángulo y que sus catetos miden a y b, por tanto, la hipotenusa de ese triángulo mide c. Además, Q está en una asíntota de la hipérbola; esta observación es importante para trazar una hipérbola, como puede verse, más adelante, en las figuras de los ejemplos.

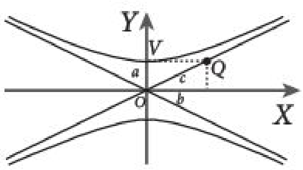


Figura 7.11

Cuando la hipérbola es vertical, al despejar y de su ecuación:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

Las asíntotas de la hipérbola vertical $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ tienen ecuaciones $y=\frac{a}{b}x$ y $y=-\frac{a}{b}x$.

obtenemos:

$$y=\pm\frac{a}{b}\sqrt{x^2+b^2},$$

y al hacer un análisis similar al anterior, encontramos que sus asíntotas son (figura 7.11):

$$\boxed{y=\frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y=-\frac{a}{b}x.} \tag{7.11}$$

Ejemplos

1. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$.

Solución:
Como el coeficiente de x^2 es negativo, entonces la hipérbola es vertical; $a^2 = 16$ y $b^2 = 36$, por tanto,

$$a = 4 \quad \text{y} \quad b = 6.$$

Utilizamos las ecuaciones (7.11) y simplificamos, de modo que tenemos que las ecuaciones de las asíntotas son (figura 7.12):

$$y = \frac{a}{b}x = \frac{2}{3}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x = -\frac{2}{3}x.$$

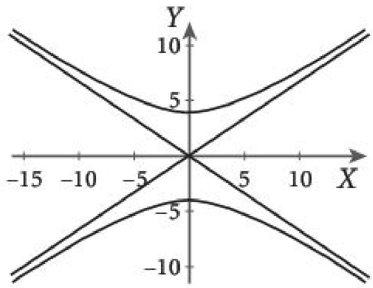


Figura 7.12

2. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma simétrica:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como el coeficiente de x^2 es positivo, entonces la hipérbola es horizontal; $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, por tanto,

$$a = 4 \quad \text{y} \quad b = 3.$$

Utilizamos las ecuaciones (7.10) y tenemos que las ecuaciones de las asíntotas son (figura 7.13):

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{4}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{4}x.$$

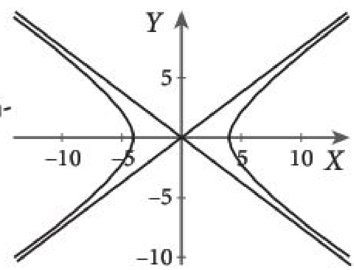


Figura 7.13

3. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V(0, 7)$, $V'(0, -7)$ y la pendiente de una de las asíntotas es igual a $\frac{7}{2}$.

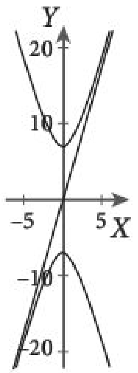


Figura 7.14

Solución:
Como el centro de la hipérbola es el punto medio de los vértices, entonces:

$$C\left(0,\frac{7-7}{2}\right)=C(0,0).$$

Además, $a = 7$, ya que a es la distancia del centro a cualquier vértice. La hipérbola es vertical, de modo que la pendiente de la asíntota es:

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{2};$$

o sea,

$$\frac{7}{b}=\frac{7}{2},$$

de donde $b = 2$. Por ser vertical, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1;$$

entonces la ecuación buscada es (figura 7.14):

$$\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{4}=1.$$

Ejemplos

Para determinar la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y vértices situados en uno de los ejes cartesianos, basta con conocer la ecuación de una de las asíntotas y las coordenadas de uno de los vértices, ya que con la ecuación de la asíntota podemos determinar b.

Ejemplo

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y=-\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{2}x$, y uno de los vértices es $V(-5, 0)$.

Solución:
Como ambas asíntotas pasan por el origen, entonces el centro de la hipérbola es $C(0, 0)$. Puesto que el vértice conocido está sobre el eje X, entonces la hipérbola es horizontal y su ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

La distancia del centro al vértice es $a = 5$ y la pendiente de la asíntota $y=\frac{1}{2}x$ es:

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{2},$$

entonces $b=\frac{5}{2}$. Así, la ecuación de la hipérbola es (figura 7.15):

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1.$$

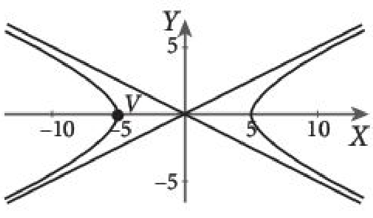


Figura 7.15

Observación:
Los ejes de simetría de la hipérbola, en este caso los ejes cartesianos, son las bisectrices de los ángulos formados por las asíntotas.

En resumen, las ecuaciones de las rectas asíntotas de la hipérbola son:

Tipo de hipérbola	Ecuación	Asíntotas
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x.$
Vertical	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$y=\frac{a}{b}x$ y $y=-\frac{a}{b}x.$

La excentricidad de la hipérbola

Comparemos las gráficas de las hipérbolas $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ y $\frac{x^2}{16}-y^2=1$ (figura 7.16).

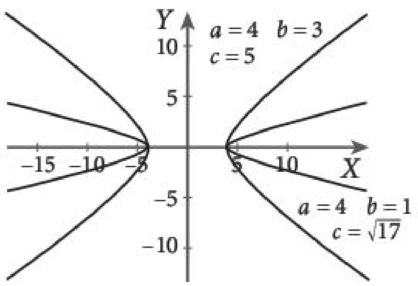


Figura 7.16

Solución:
En ambas hipérbolas el valor de a es 4. Para la primera de ellas, la distancia del centro a los focos es:

$$c=\sqrt{16+9}=5,$$

mientras que para la segunda,

$$c=\sqrt{16+1}\approx 4.12.$$

La excentricidad en la primera hipérbola vale:

$$\frac{5}{4}=1.25$$

y en la segunda:

$$\frac{\sqrt{17}}{4}\approx 1.03.$$

La relación $\frac{c}{a}$ es lo que determina qué tan abierta o cerrada es la hipérbola.

Si la excentricidad $e = \frac{c}{a}$ es tal que $e > 1$, la cónica es una hipérbola.

Para medir qué tan abierta es una hipérbola, se utiliza el concepto de *excentricidad*, que se define, igual que en el caso de la elipse, como el cociente de la distancia focal entre la distancia entre los vértices:

$$\boxed{e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},} \tag{7.12}$$

observa que como $c > a$, entonces $e > 1$.

La excentricidad mide qué tan *abierta o cerrada* es la hipérbola; en cambio, en el caso de las elipses, mide qué tan alargadas son estas.

En el ejemplo anterior, la primera hipérbola tiene excentricidad:

$$e = \frac{5}{4} = 1.25,$$

y la segunda tiene:

$$e = \frac{4.12}{4} = 1.03.$$

En las figuras 7.17 y 7.18 observa el triángulo rectángulo de catetos a, b y de hipotenusa c. Cuanto más cercana está la excentricidad a uno ($c \approx a$), el cateto b (recuerda que $b^2 = c^2 - a^2$) es más pequeño y, por tanto, la hipérbola está más cerrada (figura 7.17); y, cuanto más grande es la excentricidad (c es grande con respecto a a), b es mayor y la hipérbola está más abierta (figura 7.18).

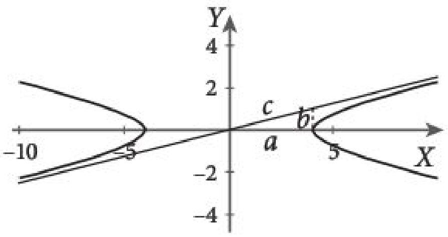


Figura 7.17

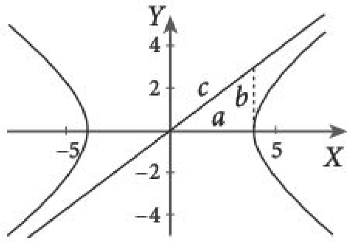


Figura 7.18

Ejemplo

1. Encontrar la excentricidad de la hipérbola $144x^2 - 25y^2 = 3600$.

Solución:
Dividimos la ecuación entre 3600:

$$\frac{144}{3600}x^2 - \frac{25}{3600}y^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

Entonces $a^2 = 25$ y $b^2 = 144$. Entonces:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{25+144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13. \end{aligned}$$

Ejemplo

Así, la excentricidad de la hipérbola es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{13}{5}.$$

Otra manera de definir la hipérbola. Directrices de la hipérbola

Veremos que una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a un punto F es igual a e veces la distancia de P a una recta ℓ donde e es un número mayor que 1. Más aún, F es uno de los focos de la hipérbola, e es su excentricidad y la recta ℓ será llamada una *directriz* de la hipérbola.

En este apartado vamos a hacer un análisis similar al que se hizo en "Directrices de la elipse" para encontrar las directrices de la hipérbola.

Partimos de la ecuación (7.5):

$$\boxed{4cx - k^2 = 2k\sqrt{(x-c)^2 + y^2},} \tag{7.13}$$

que está a la mitad del camino de la deducción de la fórmula de la hipérbola para el caso en el que la hipérbola es horizontal y su centro está en el origen, a partir de la caracterización "la hipérbola está formada por los puntos P tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos, llamados focos, es constante":

$$d(P,F) - d(P,F') = k.$$

Haciendo $k = 2a$ en (7.13), tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} 4cx - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ x - \frac{a^2}{c} &= \frac{a}{c}\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}} \tag{7.14}$$

En esta última ecuación, si (x, y) es un punto de la hipérbola, el miembro de la izquierda $x - \frac{a^2}{c}$ es la distancia dirigida de (x, y) a la recta vertical ℓ cuya ecuación es $x = \frac{a^2}{c}$, y el radical del lado derecho es la distancia de (x, y) al foco $F(c, 0)$. Así que la ecuación (7.14) puede interpretarse como

$$d(P,\ell) = \frac{a}{c} d(P,F),$$

o bien:

$$\boxed{\frac{c}{a}d(P,\ell)=d(P,F).} \tag{7.15}$$

Recordemos que la excentricidad de la hipérbola se define como:

$$e=\frac{c}{a},$$

entonces (7.14) puede escribirse como:

$$\boxed{ed(P,\ell)=d(P,F),} \tag{7.16}$$

es decir, la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos P cuya distancia a un punto F es igual a e veces la distancia de P a una recta ℓ, donde e es un número mayor que 1.

De manera análoga, trabajando con el foco $F'(-c,0)$ se obtiene que la hipérbola también es el lugar geométrico de los puntos tales que

$$ed(P,\ell)=d(P,F),$$

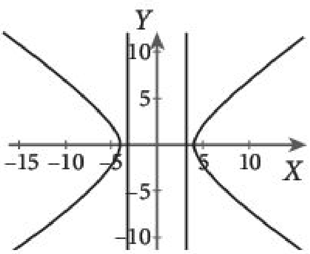


Figura 7.19

donde la recta ℓ' tiene por ecuación $x=-\frac{a^2}{c}$.

Las rectas ℓ y ℓ' se llaman *directrices* de la hipérbola.

La ecuación (7.16) es similar a la ecuación que determina la parábola, pero en ese caso $e=1$, y es igual que la ecuación (7.16), pero en ese caso, $e>1$.

Para el caso de las hipérbolas verticales con centro en el origen se hace un análisis similar y obtenemos:

Tipo de hipérbola	Directrices	Foco asociado
Horizontal	$x=\frac{a^2}{c}$	$F(c,0)$
Horizontal	$x=-\frac{a^2}{c}$	$F'(-c,0)$

Tipo de hipérbola	Directrices	Foco asociado
Vertical	$y=\frac{a^2}{c}$	$F(0,c)$
Vertical	$y=-\frac{a^2}{c}$	$F'(0,-c)$

(7.17)

Ejemplo

1. Encontrar las ecuaciones de las directrices de la hipérbola $\frac{x^2}{24^2}-\frac{y^2}{10^2}=1$ y graficarlas.

Solución:

Para encontrar las ecuaciones de las directrices de la elipse debemos determinar el valor de c:

$$c^2=a^2+b^2=24^2+10^2=576+100=676,$$

de donde $c=26$.

Ejemplo

Como la hipérbola es horizontal (figura 7.20), entonces las ecuaciones de las directrices son:

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{576}{26} = \frac{288}{13} \approx 22.15$$

$$x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{576}{26} = -\frac{288}{13} \approx -22.15.$$

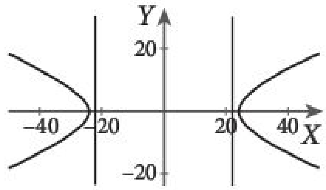


Figura 7.20

Ejercicios

1. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.
2. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{64} = 1$.
3. Con los mismos ejes coordenados dibuja las hipérbolas cuyos focos son $F'(0, -4)$, $F(0, 4)$ y con excentricidad $e = 4, 2, \frac{4}{3}, 8$ y 12.
4. Determina las ecuaciones de las directrices de la hipérbola $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{576} = 1$.

En cada caso, encuentra la ecuación de la hipérbola con los datos señalados.

5. Vértices $V'(-4, 0)$, $V(4, 0)$; excentricidad igual a 3.
6. Vértices $V'(-3, 0)$, $V(3, 0)$; una asíntota tiene pendiente igual a $\frac{5}{3}$.
7. Vértices $V'(0, -\frac{5}{4})$, $V(0, \frac{5}{4})$; una asíntota tiene pendiente igual a 4.
8. Vértice $V(0, -1)$, centro $C(0, 0)$; excentricidad igual a $\frac{5}{2}$.
9. Focos $F'\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $F\left(0, \frac{1}{2}\right)$; excentricidad igual a $\frac{6}{5}$.
10. Las asíntotas son $y = -\frac{8}{3}x$, $y = \frac{8}{3}x$ y uno de los vértices es $V\left(3\sqrt{2}, 0\right)$.
11. Las asíntotas son $y = -\frac{3}{4}x$, $y = \frac{3}{4}x$ y uno de los focos es $F(0, 10)$.
12. Los focos son $F'(-17, 0)$ y $F(17, 0)$ y la directriz asociada a F' es $x = -\frac{64}{17}$.
13. Encuentra la excentricidad de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.
14. Halla la excentricidad de la hipérbola con ecuación $-81x^2 + 25y^2 - 2025 = 0$.
15. Da con la excentricidad de la hipérbola equilátera $5y^2 - 5x^2 = 8$. Revisa su definición en el ejercicio 22 de la página 339.
16. Calcula las excentricidades de las hipérbolas con ecuaciones $9x^2 - 9y^2 = 144$ y $9y^2 - 9x^2 = 144$. ¿Qué relación hay entre dichas excentricidades?
17. Encuentra la hipérbola conjugada de $x^2 - 100y^2 - 100 = 0$, revisa su definición en el ejercicio 24 de la página 339 y da con las asíntotas de ambas hipérbolas. ¿Cómo son dichas asíntotas?
18. Halla los puntos de intersección de las asíntotas y la directriz asociada al foco con abscisa positiva, si la ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{24^2} - \frac{x^2}{7^2} = 1$.

Las ecuaciones de las directrices de la hipérbola horizontal $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con centro en el origen son $x = \frac{a^2}{c}$ y $x = -\frac{a^2}{c}$.

Las ecuaciones de las directrices de la hipérbola vertical $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ con centro en el origen son $y = \frac{a^2}{c}$ y $y = -\frac{a^2}{c}$.

Construcción de la hipérbola

Sugerencias para trazar una hipérbola

1. Localiza el centro. (Hasta este momento, únicamente hemos visto hipérbolas con centro en el origen, pero más adelante veremos el caso más general.)
2. Determina el valor de la distancia c del centro a los focos, la distancia a del centro a los vértices y el valor de b $\left(b=\sqrt{c^2-a^2}\right)$.
3. Determina si la hipérbola es horizontal o vertical de acuerdo con el signo que antecede a x^2 en la ecuación simétrica.
4. Localiza los vértices V y V' y los focos F y F'.
5. Construye el triángulo de lados abc y traza las asíntotas.
6. Localiza los extremos de los lados rectos. En el caso de la hipérbola horizontal están a $\frac{b^2}{a}$ unidades arriba y abajo de los focos. En el caso de la hipérbola vertical, están a $\frac{b^2}{a}$ unidades a la derecha e izquierda.
7. Une con una curva suave los puntos que están en la hipérbola: debe aproximarse a las asíntotas.

Ejemplos

1. Trazar la hipérbola cuya ecuación es $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

   Solución:
   El coeficiente de x^2 es negativo; entonces la hipérbola es vertical: $a^2=16$ y $b^2=36$. Por tanto,

   $$c^2=16+36=52,$$

   de donde:

   $$a=4,\quad b=6\quad \text{y}\quad c=\sqrt{52}\approx 7.21.$$

   Entonces tenemos que los focos son:

   $$F(0,\sqrt{52})\approx F(0,7.21)\quad \text{y}\quad F'(0,-\sqrt{52})\approx F'(0,-7.21);$$

   los vértices son:

   $$V(0,4)\quad \text{y}\quad V'(0,-4).$$

   Las asíntotas son las rectas:

   $$y=\frac{a}{b}x=\frac{4}{6}x=\frac{2}{3}x\quad \text{y}\quad y=-\frac{a}{b}x=-\frac{4}{6}x=-\frac{2}{3}x.$$

   Marcamos los vértices y trazamos los triángulos con catetos a y b como ayuda para trazar las asíntotas.

Encontramos los extremos de los lados rectos. Como:

$$\frac{b^2}{a}=\frac{36}{4}=9,$$

entonces estos extremos están 9 unidades a la derecha y 9 unidades a la izquierda de los focos, así que son los puntos:

$$\left(-9,-\sqrt{52}\right),\ \left(-9,\sqrt{52}\right),\ \left(9,-\sqrt{52}\right),\ \left(9,\sqrt{52}\right).$$

Ahora trazamos las ramas de la hipérbola como curvas suaves que salen de los vértices, pasan por los extremos de los lados rectos y se aproximan a las asíntotas (figura 7.21).

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'	Asíntotas
4	6	7.21	$C(0, 0)$	$F(0, 7.21)$ $F'(0, -7.21)$	$V(0, 4)$ $V'(0, -4)$	$B(6, 0)$ $B'(-6, 0)$	$y=\frac{2}{3}x$ $y=-\frac{2}{3}x$

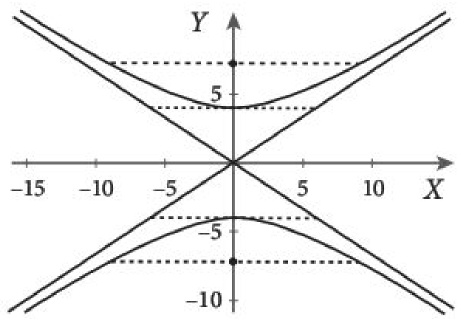


Figura 7.21

2. Dibujar la hipérbola cuya ecuación en su forma general es $9x^2-16y^2-144=0$.

Solución:
Escribimos la ecuación en la forma simétrica. Para ello, pasamos al otro lado de la ecuación el término independiente:

$$9x^2-16y^2=144,$$

y dividimos entre él toda la ecuación:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Como el coeficiente de x^2 es positivo, la hipérbola es horizontal; $a^2=16$, $b^2=9$ y, por tanto,

$$c^2=16+9=25.$$

Así que:

$$a = 4, \quad b = 3 \quad \text{y} \quad c = 5.$$

Los focos son:

$$F(5,0) \quad \text{y} \quad F'(-5,0).$$

Los vértices son:

$$V(4,0) \quad \text{y} \quad V'(-4,0).$$

Las asíntotas son las rectas:

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{4}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{4}x.$$

Podemos ahora marcar estos puntos. Trazamos los 4 triángulos de lados a, b y c, y marcamos sus vértices $(4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, 3)$ y $(-4, -3)$; por ahí pasan las asíntotas. Las trazamos también.

Los extremos de los lados rectos están a:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}$$

unidades arriba y abajo de los focos, así que sus coordenadas son:

$$\left(5, -\frac{9}{4}\right), \left(5, \frac{9}{4}\right), \left(-5, -\frac{9}{4}\right), \left(-5, \frac{9}{4}\right),$$

y ahora trazamos la hipérbola a partir de los vértices, acercándonos a las asíntotas y pasando por los extremos de los lados rectos (figura 7.22).

a	b	c	Centro	Focos	Vértices	B y B'	Asíntotas
4	3	5	$C(0, 0)$	$F(5, 0)$ $F'(-5, 0)$	$V(4, 0)$ $V'(-4, 0)$	$B(0, 3)$ $B'(0, -3)$	$y = \frac{3}{4}x$ $y = -\frac{3}{4}x$

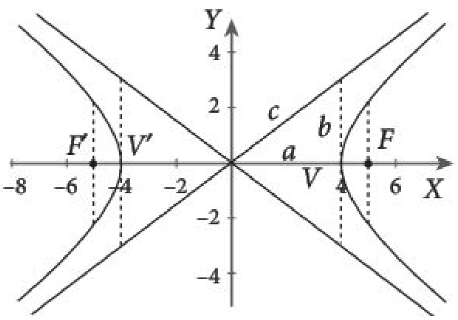


Figura 7.22

Ejemplos

Construcción de la hipérbola con el uso de instrumentos

Con regla y compás

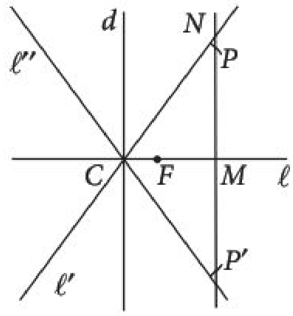


Figura 7.23

Al igual que con la parábola y la elipse, no es posible dibujar una hipérbola de un solo trazo utilizando regla y compás; sin embargo, se pueden utilizar estos instrumentos para localizar suficientes puntos y poder trazarla de una manera bastante precisa.

Conocemos un foco (F) su centro (C) y la excentricidad (e) de la hipérbola.

1. Trazamos el eje de la hipérbola (ℓ), que es la recta que pasa por F y C.
2. Por el centro C trazamos una recta d perpendicular a ℓ.
3. Consideremos que los ejes cartesianos coinciden con ℓ y d; de manera que C es el origen de ese sistema y tiene ℓ como eje X.
4. Construimos las rectas ℓ' y ℓ'' que pasan por el origen, con pendientes e y $-e$.
5. Por un punto M del eje X que se encuentre a la derecha de F, trazamos una vertical que corte la recta ℓ' en un punto N.
6. Con el compás apoyado en F marcamos los puntos P y P' en la recta MN de manera que $FP = MN = FP'$.
7. Los puntos P y P' pertenecen a una hipérbola con las características establecidas al inicio de esta construcción (figura 7.23).
8. Repetimos el procedimiento con tantos puntos sobre el eje X como deseemos, y trazamos una curva suave que pase por ellos (figura 7.24).

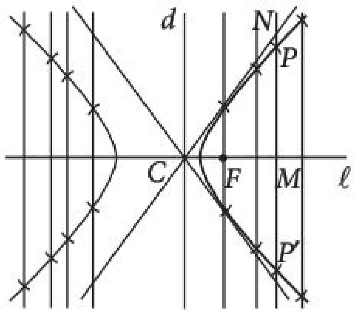


Figura 7.24

Los puntos P así construidos satisfacen las siguientes condiciones:

Su distancia a F es:

$$d(P,F) = MN.$$

Su distancia a la recta d es:

$$d(P,d) = MC.$$

Como la recta ℓ' tiene pendiente e, entonces:

$$e = \frac{MN}{MC},$$

así,

$$d(P,F) = e \cdot d(P,d).$$

Con hilo

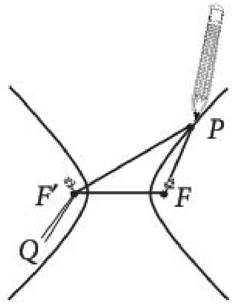


Figura 7.25

Conocemos la distancia $2a$ que hay entre los vértices y conocemos los focos F y F'.

1. Colocamos unos alfileres para marcar los focos F y F' de la hipérbola.
2. Amarramos un lápiz a la mitad de un hilo.
3. Pasamos una de las mitades del hilo bajo ambos alfileres, y la otra mitad sobre el alfiler puesto en F'.
4. Ajustamos el hilo de manera que $PF' - PF = 2a$.
5. Sujetamos firmemente los extremos del hilo en Q y tiramos de él de manera que, en cada momento, jalemos la misma cantidad de hilo de cada uno de los segmentos.
6. El punto P describe la hipérbola (figura 7.25).

Con papel doblado

Utilizamos una hoja rectangular de papel encerado.

1. Dibujamos un círculo con centro C y radio r, y marcamos un punto F fuera de él (figura 7.26).
2. Doblamos el papel de manera que el punto F coincida con un punto del círculo (figura 7.27).
3. Marcamos el doblez y desdoblamos.

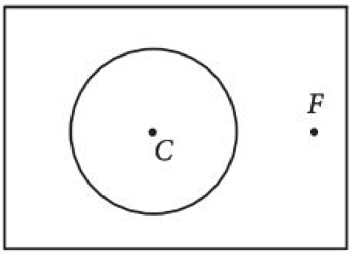


Figura 7.26

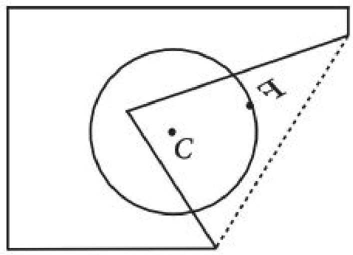


Figura 7.27

Continuamos doblando de manera que el punto F caiga sobre diferentes puntos del círculo (figura 7.28).

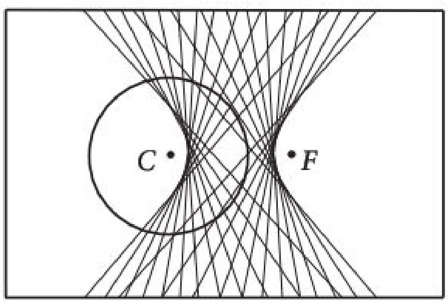


Figura 7.28

Si hacemos suficientes dobleces, nos daremos cuenta de que aparece una curva en forma de hipérbola. De hecho, cada doblez es tangente a ella.

La figura (7.29) muestra que al doblar la hoja a lo largo de la recta ℓ, de manera que el punto F coincida con el punto A del círculo, y al prolongar el radio CA, se forma un triángulo isósceles ADF, ya que ℓ es la mediatriz de AF. El punto D es el punto del doblez que pertenece a la hipérbola, ya que:

$$DC - DF = DC - DA = r,$$

donde r es el radio del círculo original. Así, para cualquier doblez, tenemos que el punto D, que es la intersección del radio AC con el doblez, pertenece a la hipérbola cuyos focos son F y C y en la que $2a = r$ (figura 7.29).

Puedes ver el ejemplo "conicaenvuelve" de la lista de construcciones de Geolab.

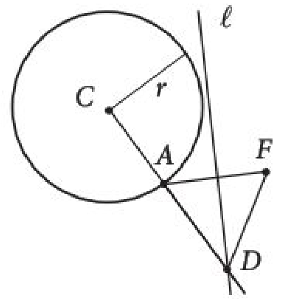


Figura 7.29

Hipérbolas con eje focal paralelo a un eje cartesiano

Ahora estudiemos las hipérbolas que tienen su centro en cualquier punto del plano y sus ejes de simetría son paralelos a los ejes. De nuevo utilizaremos la traslación de ejes vista en la unidad 3.

Comenzaremos con hipérbolas que tienen su eje focal paralelo al eje X.

Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F'(1, 1)$ y $F(5, 1)$ tal que la distancia entre los vértices sea 2.

Solución:
Los focos están en una recta horizontal, el centro es el punto medio de los focos $C(3, 1)$. Como el centro no está en el origen, no podemos utilizar directamente la fórmula (7.7). Primero, tenemos que hacer un cambio de coordenadas para trasladar los ejes de manera que el nuevo origen coincida con el centro de la hipérbola.

Para ello sustituimos:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - 3 \\ y' &= y - 1. \end{aligned}} \tag{7.18}$$

Para encontrar las coordenadas de los focos en el nuevo sistema, sustituimos sus coordenadas originales en (7.18):

$$\begin{aligned} x' &= 1 - 3 = -2 \\ y' &= 1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x' &= 5 - 3 = 2 \\ y' &= 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

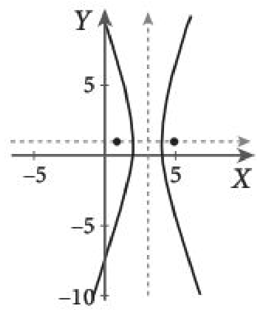


Figura 7.30

así que las nuevas coordenadas de los focos son $F'(-2, 0)$ y $F(2, 0)$. La distancia entre los vértices es $2a = 2$ y la distancia focal es $2c = 4$, por lo que:

$$b^2 = 2^2 - 1^2 = 3.$$

Así, la ecuación de la hipérbola, con respecto a las coordenadas $X'Y'$ es:

$$\frac{(x)^2}{1} - \frac{(y)^2}{3} = 1.$$

Ahora sustituimos x' y y' de acuerdo con (7.18), y obtenemos la ecuación en forma simétrica:

$$\frac{(x-3)^2}{1}-\frac{(y-1)^2}{3}=1;$$

si efectuamos las operaciones y pasamos todo al primer miembro de la ecuación, obtenemos la ecuación en su forma general (figura 7.30):

$$3x^2-y^2-18x+2y+23=0.$$

Si consideramos que el centro de la hipérbola es $C(h, k)$, el eje focal es paralelo al eje X; y si llamamos $2c$ a la distancia focal y $2a$ a la distancia entre los vértices, las coordenadas de los focos son $F(h+c, k)$ y $F'(h-c, k)$.

Como en el ejemplo anterior, trasladamos los ejes de manera que el centro quede en C. Para lograrlo, hacemos la sustitución:

$$\boxed{x'=x-h,\ y'=y-k.} \tag{7.19}$$

En el nuevo sistema de coordenadas, la ecuación de la hipérbola es:

La forma estándar de la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en $C(h, k)$ es $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$.

$$\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1,$$

donde $b^2=c^2-a^2$.

Sus asíntotas son las rectas:

$$y'=\frac{b}{a}x' \quad \text{y} \quad y'=-\frac{b}{a}x'.$$

Las asíntotas de la hipérbola horizontal $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ tienen ecuaciones $y-k=\frac{b}{a}(x-h)$ y $y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$.

Si en las tres ecuaciones anteriores sustituimos x' y y' de acuerdo con (7.19), obtenemos la *forma simétrica de la ecuación de la hipérbola*, también conocida como *forma canónica* o *estándar*:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1} \tag{7.20}$$

y las ecuaciones de las asíntotas:

$$y-k=\frac{b}{a}(x-h) \quad \text{y} \quad y-k=-\frac{b}{a}(x-h).$$

La forma estándar de la ecuación de una hipérbola vertical con centro en $C(h, k)$ es $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$.

En el caso de que el eje focal sea vertical, los denominadores de $(x-h)^2$ y $(y-k)^2$ en la ecuación de la hipérbola están intercambiados, por lo que el signo (–) afecta al término con la variable x así, tenemos:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1} \tag{7.21}$$

y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y-k=\frac{a}{b}(x-h) \quad \text{y} \quad y-k=-\frac{a}{b}(x-h).$$

Si en las ecuaciones (7.20) y (7.21) desarrollamos los cuadrados y simplificamos, obtenemos una ecuación de la forma

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,} \tag{7.22}$$

en la que solo hay que notar que A y C son distintos de cero y de *signo contrario*. Esta forma se conoce como la *forma general de la ecuación de la hipérbola*, y es un caso particular de la ecuación general de segundo grado.

En resumen:

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$C(h, k)$	$V(h+a, k)$ $V'(h-a, k)$	$F(h+c, k)$ $F'(h-c, k)$	$B(h, k+b)$ $B'(h, k-b)$
Vertical	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$C(h, k)$	$V(h, k+a)$ $V'(h, k-a)$	$F(h, k+c)$ $F'(h, k-c)$	$B(h+b, k)$ $B'(h-b, k)$

y

Posición	Ecuación	Asíntotas
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$y-k=\frac{b}{a}(x-h)$ y $y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$.
Vertical	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$y-k=\frac{a}{b}(x-h)$ y $y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$

Las asíntotas de la hipérbola vertical $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ tienen ecuaciones $y-k=\frac{a}{b}(x-h)$ y $y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$.

La ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ representa una hipérbola si A y C son distintos de cero y tienen signos contrarios. Dicha hipérbola puede ser degenerada.

Pensamiento crítico

Si en la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ se tiene que $A=1$, $C=-1$ y $D=E=F=0$, ¿qué hipérbola se obtiene?

La excentricidad de una hipérbola se define como $e=\frac{c}{a}$. La excentricidad de una hipérbola es siempre mayor que 1.

Pensamiento crítico

¿Cómo debe ser la excentricidad para que la hipérbola sea muy cerrada?

Ejemplos

1. Escribir la ecuación $8x^2-4y^2-24x-4y-15=0$ en la forma simétrica y trazar la hipérbola.

Solución:

Agrupamos los términos en x y en y y pasamos el término independiente al otro lado de la ecuación:

$$\left(8x^2-24x\right)-\left(4y^2+4y\right)=15.$$

Factorizamos los coeficientes de x^2 y de y^2 para que sea más sencillo completar los cuadrados perfectos:

$$8\left(x^2-3x\right)-4\left(y^2+y\right)=15.$$

En cada paréntesis completamos el trinomio cuadrado perfecto, recordando que debemos sumar la misma cantidad en el otro lado de la ecuación para que la igualdad no se altere:

$$8\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-4\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)=15+18-1,$$

simplificamos:

$$8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=32,$$

dividimos entre el término independiente y obtenemos:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{8}=1.$$

Como el coeficiente del paréntesis en x es positivo, la hipérbola es horizontal. El centro es $C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$:

$$a^2=4,\ b^2=8 \text{ y } c^2=4+8=12.$$

Así que la longitud del eje transversal es $2a = 4$ y la distancia focal es $2c=4\sqrt{3}$. Por tanto, los focos son:

$$F\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)\approx F(4.96,-0.5) \text{ y } F'\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)\approx F'(-1.96,-0.5),$$

y los vértices son:

$$V\left(\frac{3}{2}+2,-\frac{1}{2}\right)\approx V(3.5,-0.5) \text{ y } V'\left(\frac{3}{2}-2,-\frac{1}{2}\right)= V'(-0.5,-0.5).$$

Las asíntotas son:

$$y+\frac{1}{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) \text{ y } y+\frac{1}{2}=-\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right).$$

En resumen, la ecuación es:

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{4}-\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{8}=1.$$

y además tenemos la siguiente información sobre esta hipérbola:

Posición	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$C\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$V\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$ $V\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$F\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$ $F\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$	$B\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}+\sqrt{8}\right)$ $B\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}-\sqrt{8}\right)$

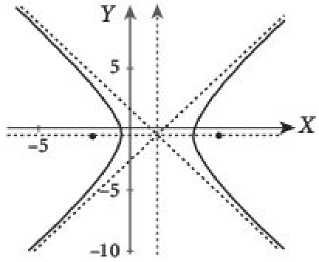


Figura 7.31

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola vertical cuyas asíntotas son:

$$x-2y+1=0 \quad \text{y} \quad x+2y-3=0,$$

y la longitud del eje transversal es 2.

Solución:
Resolvemos simultáneamente las ecuaciones de las asíntotas:

$$\begin{aligned} x-2y+1&=0\\ x+2y-3&=0. \end{aligned}$$

Si sumamos las ecuaciones y despejamos x, tenemos que $x=1$. Sustituimos este valor en cualquiera de las ecuaciones y obtenemos que $y=1$. Así, el centro es $C(1,1)$.

La longitud del eje transversal es $2a=2$, entonces $a=1$. Como la hipérbola es vertical y conocemos las pendientes de las asíntotas, tenemos:

$$\frac{1}{b}=\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{b}=-\frac{a}{b}=-\frac{1}{2},$$

de donde $b=2$ y la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(y-1)^2}{1}-\frac{(x-1)^2}{4}=1,$$

que en la forma general es $-x^2+4y^2+2x-8y-1=0$ (figura 7.32).

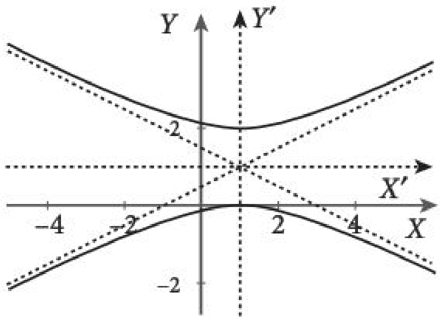


Figura 7.32

Pensamiento crítico

Dada la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, ¿cómo se determina si corresponde a una hipérbola? En caso de tratarse de una hipérbola, ¿cómo se sabe si es horizontal o vertical?

Ejemplos

Las ecuaciones de las directrices de una hipérbola horizontal con centro en (h, k) son $x-h=\frac{a^2}{c}$ y $x-h=-\frac{a^2}{c}$.

Directrices de la hipérbola con centro en $C(h, k)$

Las directrices de las hipérbolas horizontales y verticales con centro en $C(h, k)$ las podemos obtener a partir de las directrices de las hipérbolas con centro en (0, 0) mediante la traslación de ejes:

$$x' = x - h, \quad y' = y - k$$

que hemos estado usando en este apartado, así, a partir de la tabla (7.17) obtenemos:

Tipo de hipérbola	Directrices	Foco asociado
Horizontal	$x-h=\frac{a^2}{c}$	$F(h+c, k)$
Horizontal	$x-h=-\frac{a^2}{c}$	$F'(h-c, k)$
Vertical	$y-k=\frac{a^2}{c}$	$F(h, k+c)$
Vertical	$y-k=-\frac{a^2}{c}$	$F'(h, k-c)$

Las ecuaciones de las directrices de una hipérbola vertical con centro en (h, k) son $y-k=\frac{a^2}{c}$ y $y-k=-\frac{a^2}{c}$.

Ejemplos

1. Encontrar las ecuaciones de las directrices de la hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{(y-5)^2}{64}-\frac{(x+8)^2}{225}=1.$$

Solución:
La hipérbola es vertical. En la ecuación de la hipérbola observamos que:

$$a^2 = 64 \quad \text{y} \quad b^2 = 225,$$

de donde:

$$c^2 = 64 + 225 = 289,$$

así:

$$c = \sqrt{289} = 17.$$

Entonces las ecuaciones de las directrices son:

$$y-5=\frac{a^2}{c}=\frac{64}{17} \quad \text{y} \quad y-5=-\frac{a^2}{c}=-\frac{64}{17},$$

es decir,

$$y = \frac{149}{17} \approx 8.76 \quad \text{y} \quad y = \frac{21}{17} \approx 1.24.$$

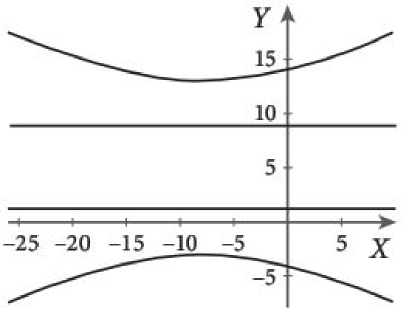


Figura 7.33

2. Considerar la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 36x + 160y - 940 = 0$. Encontrar la ecuación de la asíntota con pendiente negativa, la ecuación de la recta ℓ perpendicular a la asíntota que pasa por el foco que tiene abscisa negativa y la ecuación de la directriz correspondiente a ese foco. Demostrar que las tres rectas concurren, es decir, se cortan en un punto.

Solución:
Escribimos la ecuación de la hipérbola en la forma simétrica:

$$9x^2 - 36x - 16y^2 + 160y = 940$$
$$9\left(x^2 - 4x + 4\right) - 16\left(y^2 - 10y + 25\right) = 940 + 9(4) - 16(25)$$
$$9(x-2)^2 - 16(y-5)^2 = 576$$
$$\frac{(x-2)^2}{64} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1.$$

La hipérbola es horizontal, y su centro es $C(2, 5)$:

$$a^2 = 64, \quad b^2 = 36, \quad c^2 = 64 + 36 = 100,$$

entonces:

$$a = 8, \quad b = 6, \quad c = 10.$$

Los focos son:

$$F'(2-10,5) = F'(-8,5) \quad \text{y} \quad F(2+10,5) = F(12,5).$$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y - 5 = \frac{6}{8}(x-2) \qquad y - 5 = -\frac{6}{8}(x-2)$$

y

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2} \qquad y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{2}.$$

Las ecuaciones de las directrices son:

$$x-2=\frac{64}{10} \qquad \text{y} \qquad x-2=-\frac{64}{10}$$

$$x=\frac{42}{5} \qquad\qquad x=-\frac{22}{5}.$$

La asíntota con pendiente negativa es:

$$\boxed{y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}.} \tag{7.23}$$

La recta perpendicular a esta asíntota y que pasa por el foco $F'(-8, 5)$ tiene pendiente igual a $\frac{4}{3}$ y su ecuación es:

$$y-5=\frac{4}{3}(x+8),$$

es decir,

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{47}{3}.$$

Para encontrar el punto donde se corta esta recta con la asíntota anterior resolvemos la siguiente ecuación:

$$-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}=\frac{4}{3}x+\frac{47}{3}$$

$$x=-\frac{22}{5},$$

que es la abscisa de cualquier punto que está en la directriz; por tanto, las dos rectas se cortan sobre la asíntota. Sustituyendo este valor en la ecuación (7.23) tenemos:

$$y=-\frac{3}{4}\quad-\frac{22}{5}\quad+\frac{13}{2}=\frac{49}{5}.$$

El punto donde se cortan las tres rectas es $P\left(-\frac{22}{5},\frac{49}{5}\right)$.

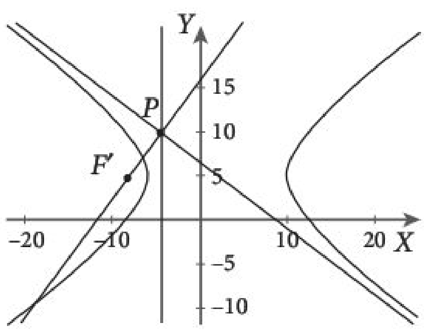


Figura 7.34

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso, encuentra las coordenadas de los focos, los vértices y el centro de las siguientes hipérbolas.

1. $\frac{(y-7)^2}{25}-\frac{(x+3)^2}{16}=1.$
2. $\frac{(x+4)^2}{9}-\frac{(y+6)^2}{4}=1.$
3. $\frac{(x+9)^2}{81}-\frac{(y-1)^2}{9}=1.$
4. $\frac{(y+3)^2}{25}-\frac{(x-3)^2}{36}=1.$

Escribe cada ecuación en su forma simétrica, da las coordenadas de los focos y los vértices, así como las ecuaciones de las asíntotas.

5. $x^2-y^2-4x-4y-400=0.$
6. $-25x^2+4y^2+32y-36=0.$
7. $4x^2-9y^2+8x-54y-113=0.$
8. $3x^2-2y^2+12x-12y-48=0.$
9. $-4x^2+49y^2-48x+98y-291=0.$
10. $x^2-4y^2-6x-8y-59=0.$
11. $-x^2+y^2+10x-8y-18=0.$
12. $-3x^2+2y^2+18x-20y+17=0.$
13. $4x^2-y^2-40x-8y+68=0.$
14. $3x^2-2y^2+12x+2y-14=0.$
15. $x^2-2y^2+4x+20y-50=0.$
16. $-3x^2+25y^2-18x+150y+798=0.$
17. $-8x^2+3y^2+128x-6y-557=0.$
18. $x^2-12y^2-14x+168y-551=0.$

19. Encuentra la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(7, 1)$, $V'(-3, 1)$ y con focos $F(9, 1)$, $F'(-5, 1)$.
20. Halla la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(4, -2)$, $V'(0, -2)$ que pasa por el punto $P\left(6,3\sqrt{3}-2\right)$.
21. Da con la ecuación de la hipérbola con vértices en $V(2, 7)$, $V'(2, -7)$ que pasa por el punto $P\left(4,7\sqrt{2}\right)$.

En cada caso, encuentra la ecuación simétrica de la hipérbola que tiene los siguientes datos.

22. Centro $C(-5, 3)$, vértice $V(-9, 3)$ y $x+2y-1=0$ como una asíntota.
23. Centro $C(1, 4)$, vértice $V\left(1,4+\sqrt{14}\right)$ y $x+y-5=0$ como una asíntota.
24. Vértices $V'(-11, -7)$, $V(5, -7)$ y $x-2y-11=0$ como una asíntota.
25. Vértices $V'(-2, -3)$, $V(-2, 7)$ y $x+5y-8=0$ como una asíntota.
26. Vértice $V(-4, 3)$, centro $C(-4, 5)$ y excentricidad de $\frac{5}{4}$.
27. Vértice $V\left(\frac{15}{2},1\right)$, centro $C(8, 1)$ y excentricidad de $\frac{7}{5}$.
28. Encuentra la ecuación del círculo cuyo centro coincide con el de la hipérbola $x^2-2y^2-8x+24y-60=0$ y cuyo radio es la mitad del eje transversal de la hipérbola.
29. Halla la ecuación de la parábola cuyo vértice se encuentra en el vértice inferior de la hipérbola $16y^2-25x^2-192y-250x-449=0$ y cuyo foco está en el centro de la hipérbola.
30. Encuentra la ecuación de la elipse horizontal cuyo centro se encuentra en el centro de la hipérbola $y^2-4x^2+48x+10y-47=0$, cuyo eje mayor es igual a la distancia entre los vértices de la hipérbola y cuyo eje menor está determinado por la longitud del segmento que une el centro de la hipérbola con el punto de intersección de esta con la recta $2x+y+5=0$.

31. Da la ecuación de la hipérbola vertical que tiene el mismo centro que la hipérbola $x^2 - 3y^2 + 16x + 36y - 53 = 0$, la misma longitud de eje focal y la misma distancia entre sus vértices.
32. Encuentra la ecuación de la hipérbola conjugada de la hipérbola cuyo centro es $C(-5, -2)$, $a = 7$ y $b = 9$. Revisa las fórmulas de las hipérbolas conjugadas en el ejercicio 24 del apartado "Hipérbola vertical".
33. Halla la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en $C(4, -3)$, $a = 12$ y que pasa por el punto $\left(-12, -3 + 3\sqrt{7}\right)$.
34. Demuestra que si las asíntotas de una hipérbola con centro en $C(h, k)$ son perpendiculares, entonces la hipérbola es equilátera. Recuerda que una hipérbola es equilátera si $a = b$.
35. Considera la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 54x - 8y + 113 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas y la distancia del foco que tiene ordenada negativa a cada una de ellas. Compara esta distancia con el valor de b.
36. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(10, 0)$ y es paralela a la asíntota de la hipérbola $25x^2 - 144y^2 - 50x - 1728y - 8759 = 0$ que tiene pendiente positiva. ¿En cuántos puntos corta esta recta la hipérbola?
37. Los vértices de una hipérbola son $V'(-3, 5)$ y $V(1, 5)$. Si tiene excentricidad de $\frac{7}{4}$, encuentra la longitud de cada lado recto, las ecuaciones de las asíntotas y de las directrices.

Aplicaciones de la hipérbola

Cuando un avión viaja a una velocidad mayor que la del sonido, es decir, a más de 1 mach, genera una onda de choque que tiene la forma de un cono y que en el piso forma una hipérbola. Las construcciones que se encuentran en el trayecto de esa hipérbola se ven afectadas por el sonido provocado por esa onda. Este fenómeno se conoce como *curva del estampido supersónico*.

Actualmente están prohibidos los vuelos supersónicos sobre las ciudades.

Propiedad de reflexión de la hipérbola

En 1609 Galileo Galilei presentó ante el senado de Venecia el primer telescopio que tenía 8 aumentos. En1610 anunció que la superficie lunar no era lisa, que tenía valles y montañas, y que Júpiter tenía cuatro satélites. En 1613, con un telescopio de 18 aumentos, pudo determinar que el Sol tenía manchas.

Imaginemos que una sola rama de la hipérbola es un espejo y quitemos la otra rama. Un rayo que emana del foco de la rama que quitamos se refleja en la otra rama y se dirige en dirección opuesta al otro foco (figura 7.35).

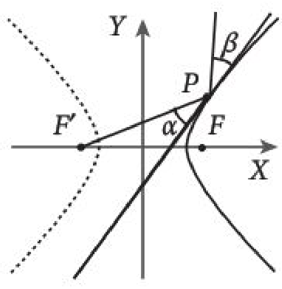


Figura 7.35

Dicho de otra manera, cuando un rayo dirigido hacia el foco F choca en la rama de la derecha, se refleja hacia el foco F'.

La propiedad de reflexión de la hipérbola se utiliza para construir telescopios parabólico-hiperbólicos en los que se combinan un espejo parabólico y otro hiperbólico (figura 7.36). El foco F es común a las dos cónicas y el foco F' de la hipérbola es el vértice de la parábola. Además, la distancia entre F y F' es el parámetro p de la parábola.

Propiedad de reflexión de la hipérbola. Si un rayo procedente del exterior de una hipérbola se dirige a uno de sus focos, al chocar contra ella, se refleja hacia el otro foco.

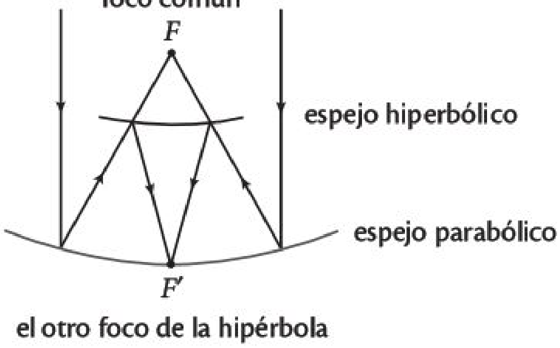


Figura 7.36

Ejemplos

1. Si en un telescopio como el de la figura 7.36 la ecuación de la hipérbola es $16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$ (espejo superior), ¿cuál es la ecuación de la parábola?

Solución:
Escribimos la ecuación de la hipérbola en la forma simétrica:

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$
$$\frac{y^2}{\frac{144}{16}} - \frac{x^2}{\frac{144}{9}} = 1$$
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1,$$

su centro está en el origen, la distancia del centro a cada foco es:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5,$$

así que la distancia entre los focos es $2c = 10$; luego, el foco de la hipérbola que coincide con el vértice de la parábola tiene coordenadas (0, −5) y la distancia focal es $p = 10$, así que la ecuación de la parábola es:

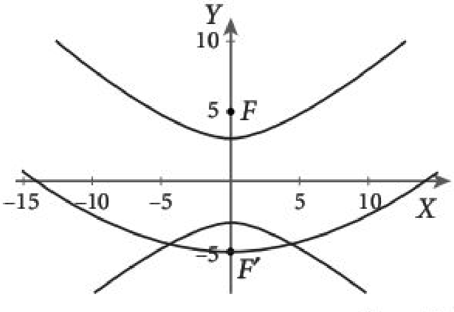


Figura 7.37

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$(x-0)^2 = 4(10)(y-(-5))$$
$$x^2 = 40(y+5).$$

2. Ricardo (R) y Juan (J) se encuentran en el campo en las coordenadas $R(0,0)$ y $J(10, 0)$, respectivamente, las unidades usadas son kilómetros. Durante una tormenta cae un rayo. Ricardo tarda 12 segundos más en escucharlo que Juan. Si la abscisa del lugar donde cayó el rayo es 10, ¿en qué lugar cayó? Dada la alta velocidad de la luz, se puede considerar que los dos sujetos ven el rayo simultáneamente y que la velocidad del sonido es de $\frac{1}{3}$ km/s.

Solución:
Si Ricardo tardó 12 segundos más que Juan en oír el rayo, la diferencia de las distancias del lugar P donde cayó a R y a J es $\frac{12}{3}$ km (la velocidad del sonido es $\frac{1}{3}$ km/s),

$$d(P,R)-d(P,J)=12\left(\frac{1}{3}\right)=4,$$

así que el rayo está en una hipérbola con focos R y J en la que $2a = 4$.
El centro de la hipérbola es el punto medio de los focos:

$$C\left(\frac{0+10}{2},\frac{0+0}{2}\right)=C(5,0).$$

La distancia entre los focos es $2c = 10$, de donde $c = 5$. Con estos datos es posible deducir los valores de b^2:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (5)^2 - (2)^2 = 21.$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1,$$

sustituimos $x = 10$ en la ecuación anterior,

$$\frac{(10-5)^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$$
$$\frac{(5)^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$$
$$\frac{25}{4}-\frac{y^2}{21}=1$$
$$\frac{25}{4}-1=\frac{y^2}{21}$$
$$\frac{21}{4}=\frac{y^2}{21}$$
$$21\left(\frac{21}{4}\right)=y^2$$
$$\frac{21^2}{2^2}=y^2$$

de donde y es:

$$y = \frac{21}{2} \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{21}{2}.$$

Por tanto, los dos lugares posibles donde pudo caer el rayo son $\left(10, \frac{21}{2}\right)$ y $\left(10, -\frac{21}{2}\right)$ (figura 7.38).

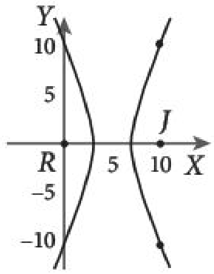


Figura 7.38

Ejemplos

Sistema de navegación Loran

Supongamos que en una costa recta se encuentran dos radiofaros, a 100 kilómetros de distancia uno del otro, que emiten simultáneamente una señal de radio. Un barco que se encuentra frente a ellos recibe estas señales; si el barco está más cerca de un radiofaro que del otro, puede con gran precisión determinar el tiempo que pasa entre el momento en que recibe la señal del faro cercano y la del lejano. Supongamos que este tiempo transcurrido es de 0.000083 segundos; si el barco avanza hacia la costa en una trayectoria en la que mantiene constante esta diferencia, ¿a qué lugar de la costa llegará?

Solución:

Denotemos por d_1 y d_2 las distancias del barco a los faros y por t_1 y t_2 los tiempos en que fueron recibidas las señales.

Las señales de radio viajan, como la luz, a 300 000 km/s, así que 0.000083 segundos corresponden a la distancia

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= (t_1 - t_2) \times 300\,000 \\ &= 0.000083 \times 300\,000 = 24.9 \text{ km.} \end{aligned}$$

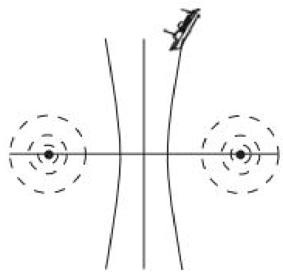


Figura 7.39

Esto es, la diferencia entre las distancias del barco a los radiofaros es de 24.9 km.

Si el barco avanza a la costa en una trayectoria en la que mantiene constante esta diferencia, se está moviendo sobre una hipérbola cuyos focos son los radiofaros y:

$$2a = 24.9.$$

Cuando llegue a la costa, el barco estará en uno de los vértices de la hipérbola, a 12.45 kilómetros del centro de ella, por lo que estará a:

$$50 - 12.45 = 37.55 \text{ km}$$

del radiofaro que estaba más cercano a él (figura 7.39).

Actualmente el sistema Loran está siendo sustituido por el sistema GPS (*global positioning system*, que significa "sistema de posicionamiento global"), el cual utiliza satélites para su operación. Este sistema empezó a operar en 1994 y usa intersecciones de hiperboloides para determinar una posición.

El sistema de navegación descrito en el ejemplo anterior se llama Loran (*Long Range Navigation*) por sus siglas en inglés, que significa "navegación de larga distancia". Fue desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial. El sistema Loran-C se desarrolló en 1957 para uso civil. Actualmente hay radiofaros Loran en gran parte de las costas de todo el mundo, en especial en Estados Unidos y Europa, y los equipos para recibir sus señales son cada vez más accesibles, aun para embarcaciones pequeñas.

Arquitectura

Vladimir Shújov (1853-1939), de nacionalidad rusa, fue el primero en construir una torre hiperbólica en 1896. Una de las torres que construyó fue la Torre Shábolovka en 1922. Tiene una altura de 160 m y es una torre de transmisión.

Otras extructuras hiperbólicas son las chimeneas de enfriamiento de las plantas de energía nuclear.

Torre Shábolovka.

Chimenea de enfriamiento.

El arquitecto Félix Candela Outeriño (1910-1997) desarrolló nuevas formas estructurales de hormigón armado donde utilizó paraboloides hiperbólicos para hacer muchas de sus famosas construcciones. Una de sus primeras construcciones de este tipo fue el restaurante Los manantiales en Xochimilco, México, en 1958.

Restaurante Los Manantiales.

Astronomía

La palabra *cometa* proviene de la palabra en latín *stella cometa*, que significa "estrella con cabellera".

Un cuerpo celeste que provenga del exterior del sistema solar y sea atraído por el Sol, describirá una órbita hiperbólica, teniendo como un foco al Sol y saldrá nuevamente del sistema solar. Esto sucede con algunos cometas.

El cometa C/2004 H6 (Swan) tiene una excentricidad de 1.000488 y, por tanto, su órbita es hiperbólica. El 31 de diciembre de 2010 se encontrará a una distancia de 19.633 UA de la Tierra.

El reloj de sol

El Sol describe diariamente en el cielo un arco de circunferencia. Este movimiento aparente se debe a la rotación de la Tierra y es la causa de que la sombra que proyecta un objeto fijo describa una cónica. Para construir un reloj de sol hay que tener en cuenta esto. Están provistos de un punzón que proyecta su sombra sobre una superficie plana donde están marcadas las horas. El extremo de la sombra indica la hora solar correspondiente. La línea que une el Sol, considerado como un punto, con el extremo del punzón recorre a lo largo del día parte de la superficie de un cono. Este cono es cortado por el plano del reloj donde se observa la sombra del extremo del punzón. La trayectoria que sigue esa sombra es la de una cónica. En ciertas latitudes esa cónica es una hipérbola, tanto más curvada cuanto más próximo esté del solsticio de verano o de invierno. En dos días del año, la trayectoria de la sombra que proyecta el punzón es una recta en todos los lugares de la Tierra. Esto ocurre en el equinoccio de primavera y de otoño.

Ejercicios

1. Si en un telescopio como el de la figura 7.36 la ecuación de la hipérbola es $144y^2 - 25x^2 - 3600 = 0$, ¿cuál es la ecuación de la parábola?
2. Un barco se encuentra frente a una costa donde hay dos faros Loran, a una distancia de 200 kilómetros entre ellos. El barco recibe la señal de los faros con una diferencia de 0.0001 segundos. ¿En qué punto tocará la costa si mantiene esta diferencia de tiempos?
3. Si el barco del ejercicio anterior desea entrar a un puerto que se encuentra entre los dos faros, a 50 kilómetros del faro más cercano a él, ¿qué diferencia de tiempos en las señales Loran debe buscar para seguir esa trayectoria?
4. Dos faros Loran están en una costa recta, separados por 100 kilómetros. Un barco navega en una trayectoria recta paralela a la costa, a una distancia de 50 kilómetros de ella. Si recibe las señales de los faros con una diferencia de 0.0002 segundos, ¿cuál es la posición del barco?
5. Dos personas, A y B, se encuentran en el campo en las coordenadas $A(0, 0)$, $B\left(\frac{25}{3},0\right)$; las unidades usadas son kilómetros. Durante una tormenta cae un rayo. La persona A tarda 5 segundos más en escucharlo que la persona B. Si la abscisa del lugar donde cayó el rayo es 6, ¿en qué lugar cayó? Dada la cercanía de los puntos, puedes considerar que los dos sujetos ven el rayo simultáneamente y que la velocidad del sonido es de $\frac{1}{3}$ km/s.
6. Dos observadores están en los puntos $A(-5, 0)$ y $B(5, 0)$ respectivamente. Un cañón se encuentra en un lugar $Q(x, 6)$. El observador en A escucha un disparo 18 segundos después del momento en el que lo oye el observador B. Encuentra la posición del cañón. Considera que el sonido viaja a $\frac{1}{3}$ km/s.
7. En un telescopio con espejos parabólico e hiperbólico, la distancia entre los focos es 8 y la excentricidad de la hipérbola es 2. Encuentra la ecuación de la hipérbola y de la parábola que generan los espejos. Coloca el origen del sistema de coordenadas en el punto medio entre los focos.

8. Dos faros Loran están en una costa recta a 300 kilómetros de distancia. ¿Qué diferencia en las lecturas de las señales debe buscar un barco para tocar tierra entre ellos a 50 kilómetros de uno de los faros?

Otra interpretación de la definición de la hipérbola

Hagamos un análisis similar al que hicimos en el caso de la elipse. Observemos nuevamente la ecuación simétrica de una hipérbola horizontal:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Veamos otra interpretación de esta ecuación.

Si el centro de la hipérbola es $C(h, k)$, entonces el eje focal de la hipérbola es la recta:

$$y=k,$$

y el eje no focal es la recta:

$$x=h.$$

De donde para un punto $P(x, y)$ cualquiera, el término $(x-h)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $x=h$, y $(y-k)^2$ es el cuadrado de la distancia de P a la recta $y=k$.

Así, si ℓ es la recta que contiene los focos de la hipérbola y ℓ' es la recta perpendicular a ℓ que pasa por el centro de la hipérbola, $2a$ es la distancia entre los vértices y $2c$ es la distancia entre los focos, entonces la ecuación de dicha hipérbola horizontal es:

$$\boxed{\frac{D(P,\ell')^2}{a^2}-\frac{D(P,\ell)^2}{b^2}=1,} \tag{7.24}$$

donde $b^2=c^2-a^2$, es decir,

$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1,} \tag{7.25}$$

donde (x', y') son las coordenadas de P con respecto a los ejes ℓ, ℓ'.

Esta manera de ver la ecuación de la hipérbola es particularmente útil cuando sus ejes no son paralelos a los ejes cartesianos.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(3, 6)$ y $F'(3, -4)$ y la distancia entre los vértices es 6.

Solución:
El centro de la hipérbola es el punto medio de los focos:

$$C\left(\frac{3+3}{2}, \frac{6-4}{2}\right) = C(3,1),$$

entonces el eje focal es $x = 3$ y, por tanto, la hipérbola es vertical. La recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro es $y = 1$, la distancia focal es:

$$2c = \sqrt{(3-3)^2 + (6+4)^2} = 10$$

y la longitud del eje transversal es $2a = 6$, así que $a = 3$ y, por tanto, los vértices son:

$$V'(3, -2) \text{ y } V(3, 4).$$

Por último,

$$b^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

Así, la ecuación de la hipérbola es (figura 7.40):

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1.$$

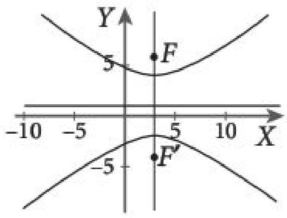


Figura 7.40

2. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(0, 0)$, $F'(4, 4)$ y la distancia entre sus vértices mide 2.

Solución:
El centro de la hipérbola es el punto medio entre los focos:

$$C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = C(2,2).$$

El eje focal de la hipérbola es la recta que contiene los focos:

$$\ell: \quad y = x,$$

la recta ℓ' perpendicular a la anterior que pasa por el centro de la hipérbola tiene pendiente −1 y su ecuación es:

$$\begin{aligned} y - 2 &= -(x-2) \\ y &= -x + 4. \end{aligned}$$

La distancia de un punto (x, y) a ℓ es:

$$\left|\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right|,$$

y a ℓ' es:

$$\left|\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right|.$$

Como la longitud del eje transversal es $2a = 2$, el valor de a es 1.
La distancia entre los focos es:

$$2c = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8},$$

así que $c = \sqrt{8}$, y:

$$b = \sqrt{8-1} = \sqrt{7}.$$

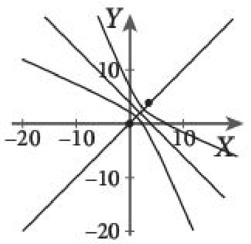


Figura 7.41

Al sustituir estos valores en la ecuación (7.24), obtenemos:

$$\frac{\left(\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} - \frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{7} = 1$$

$$\frac{(x+y-4)^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{14} = 1,$$

desarrollamos los cuadrados y multiplicamos por 14 para eliminar los denominadores:

$$7\left(x^2+2xy-8x+y^2-8y+16\right)-\left(x^2-2xy+y^2\right)=14,$$

a continuación, pasamos todos los términos al primer miembro de la ecuación y dividimos entre 2 para obtener (figura 7.41):

$$3x^2+3y^2+8xy-28x-28y+49=0.$$

3. Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $V'(-1,-1)$, $V(1,1)$ y la distancia entre sus focos mide 4.

Solución:
El centro de la hipérbola es el punto medio entre los vértices:

$$C\left(\frac{-1+1}{2},\frac{-1+1}{2}\right) = C(0,0).$$

El eje focal de la hipérbola es la recta que contiene los focos y los vértices:

$$\ell: \quad y = x,$$

la recta ℓ', perpendicular a la anterior y que pasa por el centro de la hipérbola, tiene pendiente –1 y su ecuación es:

$$y = -x.$$

La distancia de un punto $P(x, y)$ a ℓ es:

$$\left|\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right|,$$

y a ℓ' es:

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right|.$$

La distancia entre los focos es 4, entonces $2c = 4$, de donde $c = 2$. La distancia entre los vértices es:

$$2a = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

así que $a = \sqrt{2}$, y:

$$b = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (7.24), obtenemos:

$$\frac{D(P,\ell')^2}{a^2} - \frac{D(P,\ell)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

$$\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - \left(x^2 - 2xy + y^2\right)}{4} = 1$$

$$xy = 1.$$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es (figura 7.42):

$$xy = 1.$$

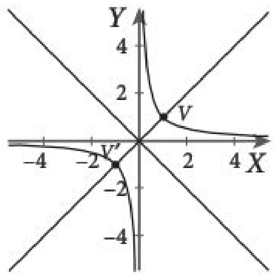


Figura 7.42

Es muy importante hacer notar que en la ecuación anterior aparece un término en xy. Como veremos en la unidad de la ecuación general de segundo grado, este término indica que los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes cartesianos.

4. El producto de dos números es 1 y la diferencia de sus cuadrados es $\frac{80}{9}$. Encontrar los números.

Solución:
Llamamos x y y a los números buscados.

Sabemos que el producto de dos números es 1, es decir,

$$xy = 1$$

y la diferencia de sus cuadrados es $\frac{80}{9}$, de donde:

$$x^2 - y^2 = \frac{80}{9}.$$

Observemos que cada ecuación representa una hipérbola. Entonces lo que estamos buscando son los puntos de intersección de ambas hipérbolas. Debemos resolver el sistema formado por estas dos ecuaciones:

$$xy = 1$$
$$x^2 - y^2 = \frac{80}{9}.$$

Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = \frac{1}{x},$$

la sustituimos en la segunda y simplificamos la ecuación:

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{80}{9}$$
$$x^4 - 1 = \frac{80}{9}x^2$$
$$9x^4 - 9 - 80x^2 = 0.$$

Ahora hacemos un cambio de variable $z = x^2$ de donde:

$$9x^4 - 80x^2 - 9 = 0$$
$$9z^2 - 80z - 9 = 0.$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} z &= \frac{80 \pm \sqrt{80^2 - 4(9)(-9)}}{2(9)} \\ &= \frac{80 \pm \sqrt{6724}}{2(9)} \\ &= \frac{80 \pm 82}{2(9)} \\ &= \frac{40 \pm 41}{9}, \end{aligned}$$

de donde:

$$z = \frac{40 + 41}{9} = 9 \quad \text{o} \quad z = \frac{40 - 41}{9} = -\frac{1}{9}.$$

Como $z = x^2$, entonces solo consideramos la solución positiva. Así:

$$x^2 = 9,$$

es decir,

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = -3.$$

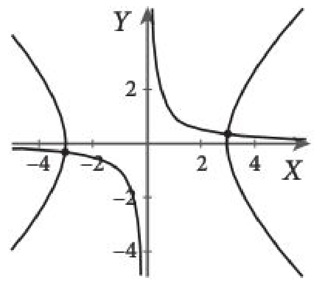


Figura 7.43

Si $x = 3$, entonces $y = \frac{1}{3}$.
Si $x = -3$, entonces $y = -\frac{1}{3}$.

Comprobación:
Si $x = 3$, $y = \frac{1}{3}$, entonces:

Primera ecuación: $\quad xy = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1.$

Segunda ecuación: $\quad x^2 - y^2 = 3^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9 - \frac{1}{9} = \frac{80}{9}.$

Si $x = -3$, $y = -\frac{1}{3}$, entonces:

Primera ecuación: $\quad xy = -3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1.$

Segunda ecuación: $\quad x^2 - y^2 = (-3)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 9 - \frac{1}{9} = \frac{80}{9}.$

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la hipérbola con los datos indicados.

1. Focos $F'(-1, -8)$, $F(1, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 2.
2. Focos $F'(-5, 6)$, $F(3, 2)$ y la distancia entre sus vértices es 6.
3. Focos $F'(-5, -2)$, $F(7, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 12.
4. Focos $F'(3, 4)$, $F(-1, -2)$ y la distancia entre sus vértices es 2.
5. Focos $F'(3, 3)$, $F(11, 3)$ y la distancia entre sus vértices es 4.
6. Focos $F'(0, 0)$, $F(12, -2)$ y la distancia entre sus vértices es 10.
7. Focos $F'(-8, -1)$, $F(-2, -7)$ y la distancia entre sus vértices es 6.
8. Focos $F'(-1, 11)$, $F(13, 1)$ y la distancia entre sus vértices es 14.
9. Focos $F'\left(\frac{1}{2}, 8\right)$, $F\left(\frac{5}{2}, -2\right)$ y la distancia entre sus vértices es 8.
10. Focos $F'(-9, -11)$, $F(11, 5)$ y la distancia entre sus vértices es 4.
11. Focos $F'(5, 5)$, $F(-7, -7)$ y la distancia entre sus vértices es 8.
12. Focos $F'(0, 10)$, $F(16, 8)$ y la distancia entre sus vértices es 8.
13. El producto de dos números es 1 y la diferencia de sus cuadrados es $\frac{255}{16}$. Encuentra los números e interpreta el problema geométricamente.
14. El producto de dos números es 27 y la diferencia de sus cuadrados es 72. Halla los números e interpreta el problema geométricamente.

15. El producto de dos números es 3 y la suma de sus cuadrados es 10. Encuentra los números e interpreta el problema geométricamente.
16. Una fuente tiene una base rectangular. Su perímetro mide 22 metros y su área 24 metros cuadrados. Sobre el ancho de la base se quiere construir una pared cuadrada. ¿Cuánto mide el área de la pared?

Las funciones cuadráticas y las hipérbolas

Un automóvil tarda hora y media en recorrer 120 kilómetros. ¿A qué velocidad promedio los recorrió? ¿A qué velocidad tendría que ir si quiere llegar en 1 hora?

Solución:
Como la distancia d es igual a la velocidad v por el tiempo t, entonces:

$$d = vt,$$

de donde:

$$v = \frac{d}{t}.$$

Así:

$$v = \frac{120}{1.5} = 80.$$

El automóvil iba a una velocidad promedio de 80 km/h.
Para llegar en 1 hora tendría que viajar a una velocidad promedio de

$$v = \frac{120}{1} = 120.$$

Observamos que conforme el tiempo disminuye la velocidad aumenta.

Dos cantidades se dice que son inversamente proporcionales si al aumentar una, la otra disminuye, es decir, y es *inversamente proporcional* a x si:

$$y = \frac{k}{x},$$

donde k es la *constante de proporcionalidad*.

Ejemplos

1. A temperatura constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

$$V = \frac{k}{P}.$$

El volumen de un gas es 400 cm^3 bajo una presión de 16 kg/cm^2. ¿Cuál será el volumen bajo una presión de 20 kg/cm^2?

Solución:
Primero determinamos la constante de proporcionalidad. Sabemos que:

$$V = \frac{k}{P},$$

de donde:

$$\begin{aligned} k &= VP \\ &= (400)16 \\ &= 6400. \end{aligned}$$

El volumen bajo una presión de 20 kg/cm^2 es:

$$V = \frac{6400}{20} = 320.$$

Por tanto, el volumen del gas es de 320 cm^3 bajo una presión de 20 kg/cm^2.

2. El tiempo t requerido para realizar una obra es inversamente proporcional al número de trabajadores A. Si 6 trabajadores levantan una barda en 72 horas, en jornadas de 8 horas diarias, ¿cuántos trabajadores se necesitarían para hacer la misma barda en 18 horas?

Solución:
Primero determinamos la constante de proporcionalidad. Sabemos que:

$$t = \frac{k}{A},$$

de donde:

$$\begin{aligned} k &= At \\ &= 6(72) \\ &= 432. \end{aligned}$$

Así:

$$t = \frac{432}{A}.$$

Como debemos encontrar el número de trabajadores, despejamos A de la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} A &= \frac{k}{t} \\ &= \frac{432}{18} = 24. \end{aligned}$$

Por tanto, se necesitan 24 trabajadores.

Ejemplos

Los científicos: Boyle (1627-1691), Charles (1746-1823), Avogadro (1776-1856) y Gay-Lussac (1778-1850) fueron los que descubrieron las leyes de los gases: $\frac{PV}{T} = \frac{P'V'}{T'}$.

y es inversamente proporcional a x, si $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Ejercicios

Encuentra la constante de proporcionalidad y la ecuación si y es inversamente proporcional a x.

1. $y = 5, x = 30.$
2. $y = 24, x = 6.$
3. $y = 8, x = 3.$
4. $y = 35,\ x = \frac{1}{7}.$
5. $y = 32,\ x = \frac{1}{4}.$
6. $y = \frac{1}{2}, x = 5.$
7. Para un área fija, la altura de un triángulo es inversamente proporcional a la base. Si la base mide 5, la altura mide 8. ¿Cuánto mide la altura si la base mide 4? ¿Cuál es el área de estos triángulos?
8. En una zona arqueológica hay 20 arqueólogos y tienen víveres para 6 meses. Como la zona descubierta es muy grande llegan 12 arqueólogos más. ¿Para cuántos meses tienen víveres?
9. El aire contenido en un cilindro está a una atmósfera de presión. Si mediante un pistón el volumen del cilindro se reduce a la tercera parte, ¿a qué presión estará el aire dentro del cilindro?
10. Anita infla un globo en la Ciudad de México, de manera que este tiene un volumen de 1 dm³, y hace un viaje en coche con sus papás a Acapulco. La presión atmosférica en la Ciudad de México, cuando infló el globo, era de 580 mm de mercurio y la temperatura de 25 grados. Cuando llegaron a Acapulco, la presión era de 760 mm de mercurio y, como ya estaba anocheciendo, la temperatura también era de 25 grados. Anita notó que su globo se achicó, ¿cuál es el volumen del globo en Acapulco?

Desigualdades y la hipérbola

Describe los tres subconjuntos del plano determinados por la hipérbola $16x^2 - 25y^2 - 64x - 150y - 561 = 0.$

Solución:

Escribimos la ecuación en forma simétrica:

$$\boxed{\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1,} \tag{7.26}$$

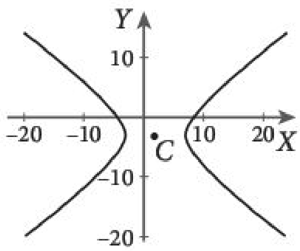


Figura 7.44

Vemos que se trata de una hipérbola horizontal con centro en $C(2, -3)$, $a = 5$ y $b = 4$ (figura 7.44).

La hipérbola divide el plano en tres conjuntos:

- El de puntos que están en la hipérbola.
- El de puntos que están fuera de la hipérbola, es decir, donde está el centro de la hipérbola.
- El de puntos que están dentro de alguna rama de la hipérbola; por ejemplo, los focos.

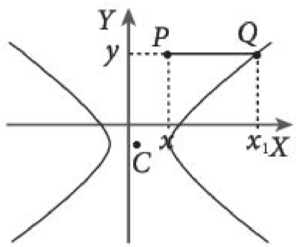


Figura 7.45

Ahora consideremos cualquier punto $P(x, y)$ que no esté en la hipérbola, por ejemplo, que esté fuera de ella (figura 7.45).

Construimos el punto $Q(x_1, y_1)$ en la hipérbola de tal manera que se encuentre en la misma horizontal que P, es decir, $y_1 = y$.

De acuerdo con la ecuación (7.24), $(x_1 - 2)^2$ y $(y_1 + 3)^2$ son los cuadrados de las distancias de Q a los ejes de la hipérbola (punteados en la figura 7.45). Como P está a la misma distancia que Q del eje horizontal de la hipérbola, entonces:

$$(y+3)^2 = (y_1 + 3)^2,$$

y como P está más cerca del eje horizontal de la hipérbola que Q, entonces,

$$(x-2)^2 < (x_1 - 2)^2;$$

así,

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} < \frac{(x_1-2)^2}{25} - \frac{(y_1+3)^2}{16} = 1,$$

la última igualdad se cumple, ya que Q está en la hipérbola.

Todos los puntos que están fuera de la hipérbola satisfacen:

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} < 1.$$

Los puntos que están en la hipérbola satisfacen la ecuación:

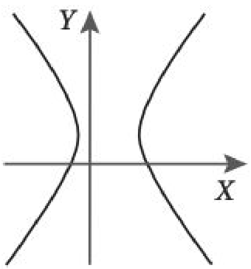
$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Los puntos que están dentro de la hipérbola satisfacen la desigualdad:

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y+3)^2}{16} > 1.$$

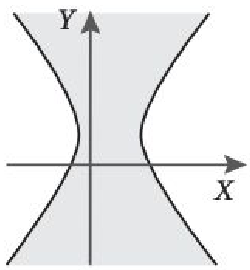
Una hipérbola divide el plano en tres conjuntos:

- El de puntos que están en la hipérbola (figura 7.46).
- El de puntos que están fuera de la hipérbola (figura 7.47).
- El de puntos que están dentro de alguna rama de la hipérbola (figura 7.48).



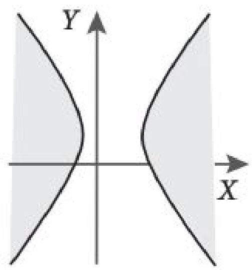
en

Figura 7.46



fuera

Figura 7.47



dentro

Figura 7.48

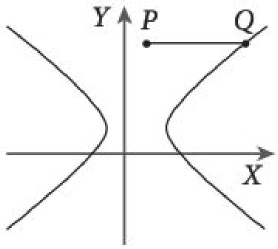


Figura 7.49

Consideremos la hipérbola horizontal con ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Los puntos que están en la hipérbola son los que satisfacen la igualdad.

Ahora tomemos un punto $P(x, y)$ fuera de la hipérbola, como se muestra en la figura 7.49.

Trazamos una recta paralela al eje X que pase por P. Esta recta corta la hipérbola en el punto $Q(x_1, y_1)$, el cual dista del eje horizontal de la hipérbola lo mismo que P, así que, de acuerdo con la ecuación (7.24),

$$\frac{(y-k)^2}{b^2}=\frac{(y_1-k)^2}{b^2}$$

y está más lejos del eje vertical de la hipérbola que P, así que:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}<\frac{(x_1-h)^2}{a^2},$$

por lo cual:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}<\frac{(x_1-h)^2}{a^2}-\frac{(y_1-k)^2}{b^2}=1,$$

ya que Q está en la hipérbola. Así, P satisface la desigualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}<1.$$

Los puntos que se encuentran dentro de la hipérbola horizontal con ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ satisfacen la desigualdad $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}>1$.

Los puntos que se encuentran fuera de la hipérbola horizontal con ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ satisfacen la desigualdad $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}<1$.

Si $P(x, y)$ está dentro de una de las ramas de la hipérbola y construimos Q de la misma manera que antes, tenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}>\frac{(x_1-h)^2}{a^2},$$

por lo que, en este caso,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}>\frac{(x_1-h)^2}{a^2}-\frac{(y_1-k)^2}{b^2}=1$$

y, por tanto, P satisface la desigualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}>1.$$

De manera similar, si tenemos una hipérbola vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

los puntos $P(x, y)$ que están fuera de la hipérbola satisfacen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}<1$$

y los que están dentro de alguna rama de la hipérbola satisfacen:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}>1.$$

Los puntos que se encuentran dentro de la hipérbola vertical con ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ satisfacen la desigualdad $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}>1$.

Los puntos que se encuentran fuera de la hipérbola vertical con ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ satisfacen la desigualdad $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}<1$.

Las condiciones algebraicas que encontramos para determinar las regiones interior y exterior de una hipérbola también pueden expresarse de la siguiente manera:

Si la hipérbola tiene los focos F y F' y la constante $2a$, los puntos de la región dentro de alguna de las ramas de la hipérbola satisfacen:

$$d(P,F)-d(P,F\ )>2a.$$

Los puntos fuera de la hipérbola satisfacen:

$$d(P,F)-d(P,F\ )<2a.$$

En resumen:

- Un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola si satisface:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

  según sea el tipo de hipérbola.
- Un punto $P(x, y)$ está dentro de la hipérbola si satisface la desigualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}>1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}>1,$$

  según sea el tipo de hipérbola.
- Un punto $P(x, y)$ está fuera de la hipérbola si satisface la desigualdad:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}<1 \quad \text{o} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}<1$$

  según sea el tipo de hipérbola.

Ejemplos

1. Dibuja los conjuntos determinados por la hipérbola $-16x^2 + 25y^2 + 64x - 150y - 239 = 0$ y describe analíticamente dichos conjuntos.

Solución:
Escribimos la hipérbola en la forma simétrica. Para ello, agrupamos los términos en cada variable y completamos los cuadrados:

$$-16\left(x^2-4x\right)+25\left(y^2-6y\right)=239$$
$$-16\left(x-2\right)^2+25\left(y-3\right)^2=239-64+225;$$

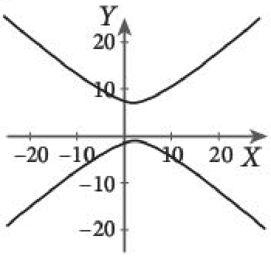


Figura 7.50

por último, dividimos entre el término independiente (figura 7.50):

$$\boxed{\frac{\left(y-3\right)^2}{16}-\frac{\left(x-2\right)^2}{25}=1.} \qquad (7.27)$$

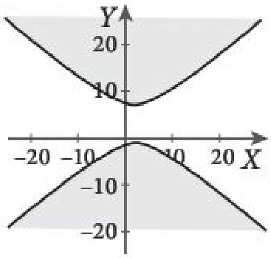


Figura 7.51

Los puntos que están en la hipérbola satisfacen la ecuación (7.27), los puntos que están dentro de una de las ramas de la hipérbola satisfacen la desigualdad (figura 7.51):

$$\frac{\left(y+3\right)^2}{16}-\frac{\left(x-2\right)^2}{25}>1$$

y los puntos que están fuera de la hipérbola satisfacen la desigualdad (figura 7.52):

$$\frac{\left(y+3\right)^2}{16}-\frac{\left(x-2\right)^2}{25}<1.$$

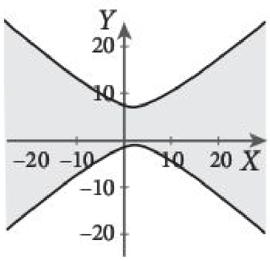


Figura 7.52

2. Dibuja la región que se encuentra dentro de alguna rama de la hipérbola $4y^2-9x^2-36=0$, debajo de la recta $3x-y=0$ y dentro del círculo $x^2+y^2-2x-24=0$.

Solución:
Escribimos la ecuación de la hipérbola en su forma simétrica:

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1.$$

Y vemos que es una hipérbola vertical con centro en el origen.

La ecuación de la recta la escribimos en la forma pendiente-ordenada $y=3x$. Esta recta pasa por el origen y tiene pendiente 3.
Por último, la ecuación del círculo la escribimos en la forma estándar:

$$\left(x-1\right)^2+y^2=25.$$

Ejemplos

Entonces, el círculo tiene centro en $(1, 0)$ y radio 5.
Las desigualdades que describen la región buscada son (figura 7.53):

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} > 1$$
$$y < 3x$$
$$(x-1)^2 + y^2 < 25.$$

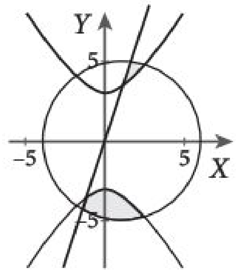


Figura 7.53

Ejercicios

1. Traza la región que se encuentra dentro de la curva dada por $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ y fuera de $x^2 - y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
2. Grafica la región que se encuentra dentro del círculo con centro en $C(-3, 2)$ y radio 4, debajo de la recta que pasa por $P(-2, 1)$ y tiene pendiente 1, y fuera de la parábola $x^2 + 2x - y + 9 = 0$. Anota las desigualdades correspondientes.
3. Traza la región que se encuentra dentro de la elipse $16x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ y de la hipérbola $-3x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ y debajo de la recta $2x + y - 2 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
4. Grafica la región que se encuentra fuera del círculo $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 30 = 0$, y de la hipérbola $x^2 - y^2 + 10x + 6y + 12 = 0$ y dentro de la parábola $x^2 + 10x + 4y - 11 = 0$. Anota las desigualdades correspondientes.
5. Traza la región que está arriba de la recta $3x - y + 21 = 0$ y dentro de la hipérbola $-25x^2 + y^2 - 250x - 14y - 601 = 0$ y del círculo $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 52 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.
6. Grafica la región que está debajo de la recta $x - 2y + 10 = 0$ y dentro de la elipse $x^2 + 4y^2 + 4x - 32y + 52 = 0$ y de la hipérbola $3x^2 - y^2 + 12x + 8y - 16 = 0$. Anota las desigualdades correspondientes.
7. Traza la región que se encuentra fuera del círculo con ecuación $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 47 = 0$ y dentro del círculo $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 128 = 0$ y de las hipérbolas $x^2 - y^2 - 10x - 6y - 65 = 0$ y $-x^2 + y^2 + 10x + 6y - 97 = 0$. Escribe las desigualdades correspondientes.

Recta tangente a una hipérbola

De nuevo, recordemos que en el apartado de la tangente al círculo vimos que una recta ℓ es *tangente* a una cónica en un punto P si la corta únicamente en P y todos sus demás puntos están en una sola de las regiones determinadas por la cónica. En la figura 7.54, la recta corta la hipérbola en dos puntos; en la figura 7.55, la recta corta la hipérbola en un punto y hay puntos de la recta en más de una de las regiones determinadas por la hipérbola; en la figura 7.56, la recta toca la hipérbola en un solo punto y se queda fuera de ella, esa es la tangente en dicho punto.

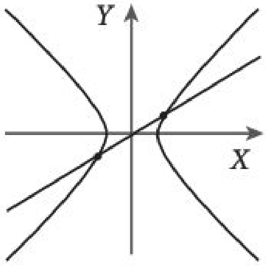


Figura 7.54

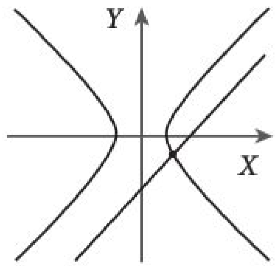


Figura 7.55

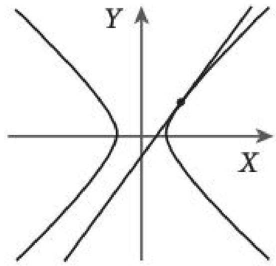


Figura 7.56

Ahora veremos que la tangente a la hipérbola tiene la propiedad de ser bisectriz de cierto ángulo.

La tangente en el punto P de la hipérbola

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{7.28}$$

es la bisectriz del ángulo formado por las rectas FP y $F'P$ que, con excepción de P, está formada por puntos ubicados fuera de la hipérbola.

En la figura 7.57, R es el punto simétrico de F' con respecto a ℓ, por tanto,

$$d(F',Q)=d(Q,R) \quad \text{y} \quad d(F',P)=d(P,R),$$

ya que ℓ es la mediatriz del segmento $F'R$.

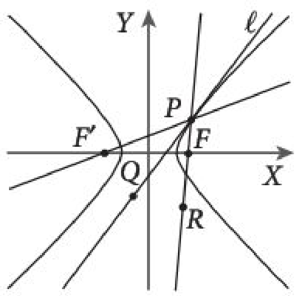


Figura 7.57

Por la desigualdad del triángulo aplicada en el triángulo QFR tenemos:

$$d(F,Q)-d(Q,R)<d(F,R).$$

Por todos estos hechos, para cualquier punto Q de ℓ distinto de P tenemos:

$$d(F,Q)-d(F\ ,Q)=d(F,Q)-d(Q,R)<d(F,R)$$

y

$$d(F,R) = -d(F,P) + d(P,R) = d(F\ ,P) - d(P,F) = 2a;$$

así,

$$d(F,Q) - d(F\ ,Q) < 2a$$

y, por tanto, Q está fuera de la hipérbola. Como esto pasa para todo punto $Q \neq P$ de la bisectriz ℓ entonces ℓ, es la recta tangente en P a la hipérbola.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto $P(x_1, y_1)$ lo que debemos hacer es encontrar la ecuación de la bisectriz. Dicha ecuación es:

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.} \tag{7.29}$$

La recta tangente a la hipérbola horizontal $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$.

Es decir, sustituimos x^2 por $x_1 x$ y y^2 por $y_1 y$.

Para el caso de la hipérbola vertical, se intercambian los papeles de las x y las y, y obtenemos:

$$\boxed{\frac{y_1 y}{a^2} - \frac{x_1 x}{b^2} = 1.} \tag{7.30}$$

La recta tangente a la hipérbola vertical $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{y_1 y}{a^2} - \frac{x_1 x}{b^2} = 1$.

Ejemplo

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $P\left(5, \frac{8}{3}\right)$.

Solución:
Sustituimos las coordenadas de P en la ecuación (7.29):

$$\frac{5x}{9} - \frac{\left(\frac{8}{3}\right)y}{4} = 1,$$

simplificamos y obtenemos:

$$5x - 6y - 9 = 0.$$

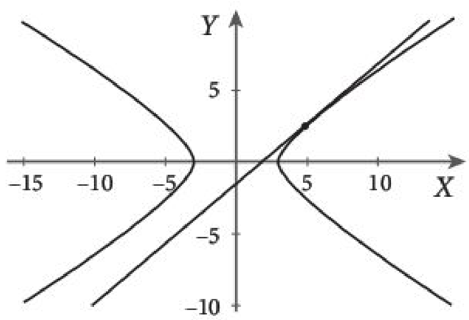


Figura 7.58

Pensamiento crítico

El punto $P\left(\frac{16}{3}, -5\right)$ pertenece a la hipérbola $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. Un foco de esta es $F(0, 5)$. La recta perpendicular a PF que pasa por F corta la directriz del lado de ese foco en $Q\left(-6, \frac{9}{5}\right)$. ¿Qué propiedad tiene la recta PQ respecto a la hipérbola?

Ahora veamos cómo encontrar la ecuación de la recta tangente a una hipérbola vertical con centro $C(h, k)$ en el punto $P(x_1, y_1)$.

La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

La recta tangente a la hipérbola horizontal $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} = 1.$

Trasladamos los ejes para que el origen quede en C mediante la sustitución:

$$\boxed{x' = x-h \quad \text{y} \quad y' = y-k,} \tag{7.31}$$

las coordenadas de P con respecto a los nuevos ejes son:

$$\boxed{x_1' = x_1 - h \quad \text{y} \quad y_1' = y_1 - k;} \tag{7.32}$$

como la hipérbola es vertical, entonces, por (7.30):

$$\frac{y_1'y'}{a^2} - \frac{x_1'x'}{b^2} = 1,$$

La recta tangente a la hipérbola vertical $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ tiene ecuación $\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2} - \frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2} = 1.$

sustituimos x', y' de acuerdo con (7.31) y x'_1, y'_1 de acuerdo con (7.32) y obtenemos la ecuación de la recta tangente a la hipérbola vertical en $P(x_1, y_1)$:

$$\boxed{\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2} - \frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2} = 1.} \tag{7.33}$$

Análogamente, podemos encontrar la ecuación de la recta tangente a una hipérbola horizontal en un punto $P(x_1, y_1)$ dado:

$$\boxed{\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2} = 1.} \tag{7.34}$$

Ejemplo

1. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y^2 - 6y - 56 - x^2 - 16x = 0$ en el punto $P(-8, 4)$.

Solución:

Escribimos la ecuación de la hipérbola en la forma simétrica:

$$\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x+8)^2}{1} = 1.$$

El punto P está en la hipérbola, como podemos comprobar al sustituir sus coordenadas en la ecuación anterior:

$$\frac{(4-3)^2}{1} - \frac{(-8+8)^2}{1} = 1.$$

Como la hipérbola es vertical, utilizamos la ecuación (7.33):

$$\frac{(4-3)(y-3)}{1}-\frac{(-8+8)(x+8)}{1}=1$$

$$y-3=1$$

$$y=4.$$

Así, la recta tangente a P es la recta horizontal $y=4$. Observa que en este caso P es un vértice de la hipérbola (figura 7.59).

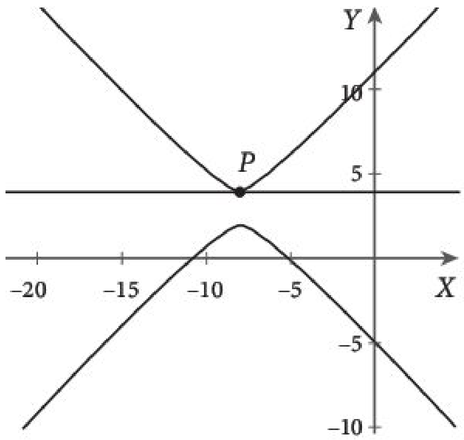


Figura 7.59

Ejemplo

Ejercicios

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en el punto dado.

1. $-x^2+y^2-6x-14y+39=0$ en el punto $P(-3,6)$.
2. $2x^2-y^2-20x-6y+37=0$ en el punto $P(7,-1)$.
3. $-3x^2+y^2+144x-32y-1481=0$ en el punto $P(27,22)$.
4. $x^2-4y^2+22x-64y-151=0$ en el punto $P\left(-17,\sqrt{5}-8\right)$.
5. $2x^2-3y^2-6=0$ en el punto $P(-3,-2)$.
6. $x^2-9y^2-18x-54y-81=0$ en el punto $P(24,1)$.
7. $-x^2+2y^2-20y+48=0$ en el punto $P(4,8)$.
8. $-9x^2+4y^2+54x+32y-161=0$ en el punto $P\left(6,\frac{7}{2}\right)$.
9. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola cuya ecuación general es $16x^2-9y^2-192x-54y-81=0$ en los extremos del lado recto que pasa por el foco $F(16,-3)$. Encuentra el punto de intersección de estas dos rectas tangentes y demuestra que se halla sobre el eje focal.

Ecuaciones paramétricas de la hipérbola

Un móvil recorre una curva de manera que en cada tiempo t entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ su abscisa toma el valor $\sec t$ y su ordenada $\tan t$. Describir la curva recorrida por el móvil.

Solución:

Tenemos una función definida en un intervalo de tiempo, de manera que a cada instante le corresponde el punto donde se encuentra el móvil en ese momento.

Para cada t tenemos dos funciones:

$$x(t) = \sec t, \quad y(t) = \tan t, \tag{7.35}$$

que describen la abscisa y la ordenada del punto donde está el móvil en el instante t.

Trazando algunos puntos para algunos valores de t, nos damos cuenta de que la curva parece ser una rama de una hipérbola horizontal (figura 7.60):

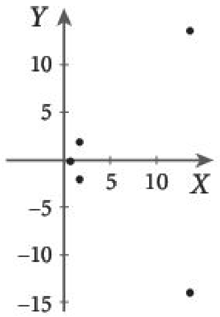


Figura 7.60

t	–1.55	–1.5	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	1.5	1.55
x	48.09	14.14	2	1.41	1.15	1	1.15	1.41	2	14.14	48.09
y	–48.08	–14.10	–1.73	–1	–0.58	0	0.58	1	1.73	14.10	48.08

Para comprobar nuestra apreciación, partimos de la identidad trigonométrica:

$$\sec^2 t - \tan^2 t = 1$$

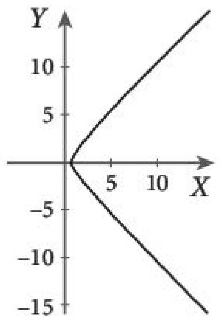


Figura 7.61

y sustituimos $\sec t$ y $\tan t$ por su valor en las ecuaciones paramétricas (7.35):

$$x(t)^2 - y(t)^2 = 1;$$

así, efectivamente, para cada t los puntos $(x(t), y(t))$ satisfacen la ecuación de la hipérbola (figura 7.61):

$$x^2 - y^2 = 1.$$

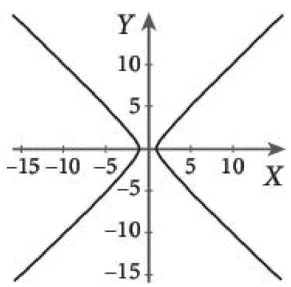


Figura 7.62

Observemos que $\sec t > 0$ si $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$; por tanto, el móvil solo recorre una rama de la hipérbola.

La otra rama de la hipérbola se obtiene al elegir valores de t correspondientes al segundo y tercer cuadrantes; por ejemplo, $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2}$ (figura 7.62).

Consideremos la hipérbola horizontal con centro en $C(h, k)$, dada por la ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{7.36}$$

Consideremos también la identidad trigonométrica:

$$\sec^2 t - \tan^2 t = 1. \tag{7.37}$$

Si hacemos la sustitución:

$$\boxed{\frac{x-h}{a}=\sec t, \qquad \frac{y-k}{b}=\tan t,} \tag{7.38}$$

nos damos cuenta de que las ecuaciones (7.36) y (7.37) son equivalentes, es decir, si un punto $P(x, y)$ satisface la ecuación (7.36), entonces, el punto

$$Q\left(\frac{x-h}{a},\frac{y-k}{b}\right)$$

satisface la ecuación (7.37) mediante la sustitución (7.38).

Despejamos x y y de las ecuaciones (7.38), escribiendo $x(t)$ y $y(t)$ para hacer hincapié en que ambas dependen de t:

$$\boxed{x(t)=h+a\sec t, \quad y(t)=k+b\tan t.} \tag{7.39}$$

De esta manera hemos obtenido unas *ecuaciones paramétricas* de la hipérbola.

Conforme t recorre el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, el punto $(a\sec t, b\tan t)$ recorre una rama de la hipérbola horizontal con centro en el origen, semieje horizontal igual a a y semieje vertical igual a b. Al sumar h y k a la abscisa y ordenada de dicho punto se produce una traslación del centro de la hipérbola al punto (h, k), por lo que el punto:

$$\left(h+a\sec t,\ k+b\tan t\right)$$

recorre una rama de la hipérbola con centro en (h, k), longitud del semieje transversal igual a a y longitud del semieje conjugado igual a b.

La otra rama se obtiene al hacer variar t en ángulos que correspondan al segundo y tercer cuadrantes; por ejemplo, $\frac{\pi}{2}<t<\frac{3\pi}{2}$.

Para parametrizar una hipérbola vertical:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,$$

se procede de manera similar a como se obtuvieron las ecuaciones (7.39) y ahora tenemos:

$$x(t)=h+b\tan t, \quad y(t)=k+a\sec t.$$

Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola horizontal $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ son $x(t)=h+a\sec t$, $y(t)=k+b\tan t$.

Ejemplos

1. Parametrizar la hipérbola $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(y-5)^2}{9}=1.$

Solución:
Hacemos:

$$\sec^2 t=\frac{(x-3)^2}{4}, \qquad \tan^2 t=\frac{(y-5)^2}{9}.$$

Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola vertical $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ son $x(t)=h+b\tan t$, $y(t)=k+a\sec t$.

Despejamos x y y:

$$x(t) = 3 + 2\sec t \qquad\qquad y(t) = 5 + 3\tan t,$$

obteniendo así unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola con (ver figura 7.63):

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

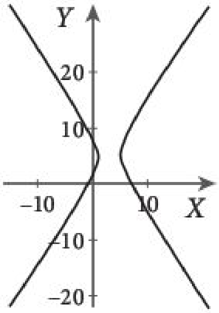


Figura 7.63

La siguiente rutina en Visual Basic dibuja una rama de la hipérbola $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$.

```
h = 2000
k = 2000
Escala = 100
pi = 3.14159
n = 100
PSet (5, 1)
For t = -n To n

x = h + Escala*(1 + 4 *
(1 / Cos(pi * t / (2 * n))))

y = k - Escala*(2 + 3
* Sin(pi * t / (2 * n)) /
Cos(pi * t / (2 * n)))

Line -(x, y)
Next
```

La variable Escala permite dibujar la hipérbola del tamaño deseado en la pantalla.

Al dibujar en computadora, hay que tener cuidado con las coordenadas, ya que el origen está en la esquina superior izquierda de la pantalla y la parte positiva del eje Y apunta hacia abajo. Es por eso que hay que utilizar las variables h, k, para llevar la figura al centro de la pantalla y poner un signo (–) en el cálculo de y.

2. Parametrizar la hipérbola $-9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 89 = 0$.

Solución:
Completamos los cuadrados para escribirla en la forma simétrica:

$$\frac{(y-2)^2}{3^2} - \frac{(x+1)^2}{4^2} = 1,$$

entonces, es una hipérbola vertical cuyo centro es el punto $C(-1, 2)$ con $a = 3$ y $b = 4$.

Así, unas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = -1 + 4\tan t \qquad y(t) = 2 + 3\sec t\,.$$

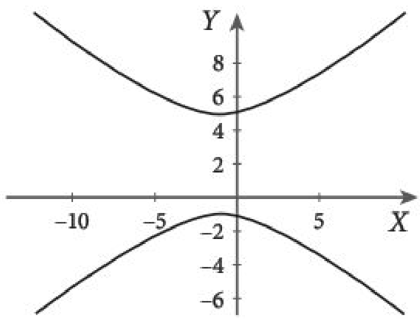


Figura 7.64

3. Escribir la ecuación general de la hipérbola cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = -6 + 7\sec t, \quad y(t) = -5 + 9\tan t.$$

Solución:
Despejamos $\sec t$ y $\tan t$:

$$\sec t = \frac{x+6}{7} \qquad \tan t = \frac{y+5}{9},$$

de donde:

$$\sec^2 t - \tan^2 t = 1$$

$$\frac{(x+6)^2}{49} - \frac{(y+5)^2}{81} = 1;$$

entonces, la ecuación general de la hipérbola es:

$$81x^2 - 49y^2 + 972x - 490y - 2278 = 0.$$

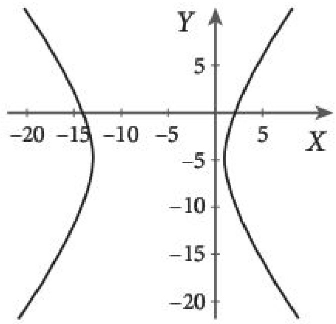


Figura 7.65

En resumen:

Posición	Ecuación	Paramétricas
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$x(t) = h + a\sec t$ $y(t) = k + b\tan t$
Vertical	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$x(t) = h + b\tan t$ $y(t) = k + a\sec t.$

Ejemplos

Ejercicios

En cada caso, encuentra la ecuación de la hipérbola que corresponda a las ecuaciones paramétricas dadas.

1. $(5 + \tan t, -2 + 3\sec t)$.
2. $(2\sec t, -6 + \tan t)$.
3. $\left(\frac{8}{5} + \tan t, \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sec t\right)$.
4. $\left(\frac{1}{8} + 2\tan t, \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\sec t\right)$.
5. $(-9 + \sec t, -4 + 2\tan t)$.
6. $(-1 + 7\sec t, 2 + 6\tan t)$.

Escribe en cada caso unas ecuaciones paramétricas para la hipérbola dada en la forma general.

7. $49x^2 - 9y^2 + 294x + 18y - 9 = 0.$
8. $3x^2 - 2y^2 + 6x + 12y + 21 = 0.$
9. $x^2 - 12y^2 + 10x + 1 = 0.$
10. $x^2 - y^2 + 4x + 2y + 19 = 0.$
11. $10x^2 + 100x + 234 - y^2 + 12y = 0.$
12. $5x^2 - 6y^2 - 84y - 444 = 0.$

13. Escribe unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola horizontal con centro en el punto $C(3, -2)$, excentricidad igual a 2 y distancia entre los focos igual a 6.
14. Si las ecuaciones paramétricas de una hipérbola son $(2 + 3\sec t, 2\tan t)$, ¿cuáles son las coordenadas de sus vértices?
15. Si las ecuaciones paramétricas de una hipérbola son $(5 + 2\tan t, 3 + 5\sec t)$, ¿cuál es su excentricidad?

16. Escribe unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola cuyos focos son $F'(7,-6)$ y $F(7,5)$ y cuya excentricidad sea igual a 2.
17. Si las ecuaciones paramétricas de una hipérbola son $\left(3+\sqrt{2}\tan t, \frac{1}{3}+\sqrt{7}\sec t\right)$, ¿cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas?
18. Si las ecuaciones paramétricas de una hipérbola son $\left(8+3\sec t, 3+2\tan t\right)$, ¿cuáles son las coordenadas de su centro?
19. Escribe unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola vertical cuyos focos son $F'(6,-30)$, $F(6,22)$ y cuyos vértices son $V'(6,20)$, $V(6,-28)$.

Resolución de problemas

Lugares geométricos

En este apartado veremos algunos problemas que involucran lugares geométricos relacionados con las hipérbolas.

Consideramos los puntos $A(4,0)$, $P(1,3)$ y $P'(1,-3)$. Por A trazamos una recta cualquiera que corte $y=x$ en el punto C y la recta $y=-x$ en el punto C'. Unimos P con C y P' con C' y llamamos M al punto de intersección de estas dos rectas. Encontrar el lugar geométrico descrito por M cuando la recta CC' gira alrededor de A (figura 7.66).

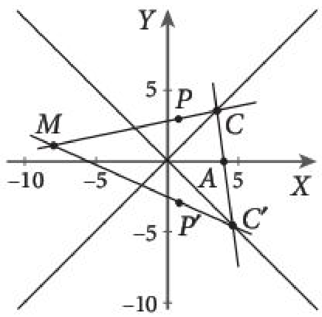


Figura 7.66

Solución:
Como $A(4,0)$ está en la recta CC' entonces tenemos que:

$$y-0=\mu(x-4),$$

o sea, $y=\mu(x-4)$ es la ecuación de la recta CC', donde μ es la pendiente de dicha recta, la cual variará al girar la recta CC'.

Como $C(x_0, y_0)$ está en esa recta, se tiene que:

$$y_0=\mu(x_0-4).$$

También está en la recta:

$$\boxed{y = x; \text{ es decir, } \quad y_0 = x_0,} \tag{7.40}$$

entonces, resolvemos el sistema formado por esas dos ecuaciones para encontrar las coordenadas de C:

$$\begin{aligned} \mu(x_0 - 4) &= x_0 \\ \mu x_0 - x_0 &= 4\mu \\ x_0 &= \frac{4\mu}{\mu - 1}. \end{aligned}$$

De donde:

$$y_0 = \frac{4\mu}{\mu - 1}.$$

Así,

$$C\left(\frac{4\mu}{\mu-1}, \frac{4\mu}{\mu-1}\right).$$

Análogamente, como $C'(x_0', y_0')$ está en la recta:

$$y = \mu(x - 4)$$

y también está en la recta:

$$\boxed{y = -x,} \tag{7.41}$$

entonces, resolvemos el sistema formado:

$$\begin{aligned} y_0' &= \mu(x_0' - 4) \\ y_0' &= -x_0'. \end{aligned}$$

Por igualación:

$$\begin{aligned} \mu(x_0' - 4) &= -x_0' \\ \mu x_0' + x_0' &= 4\mu \\ x_0' &= \frac{4\mu}{\mu + 1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$y_0' = \frac{-4\mu}{\mu + 1},$$

de donde:

$$C'\left(\frac{4}{\mu+1},\frac{-4\mu}{\mu+1}\right).$$

La ecuación de la recta que pasa por $P(1, 3)$ y $C\left(\frac{4\mu}{\mu-1},\frac{4\mu}{\mu-1}\right)$ es:

$$y-3=\left(\frac{\frac{4\mu}{\mu-1}-3}{\frac{4\mu}{\mu-1}-1}\right)(x-1);$$

simplificando, tenemos:

$$y-3=\frac{4\mu-3\mu+3}{4\mu-\mu+1}(x-1)$$

$$y-3=\frac{\mu+3}{3\mu+1}(x-1)$$

$$(y-3)(3\mu+1)=(\mu+3)(x-1)$$

$$(y-3)(3\mu+1)-(\mu+3)(x-1)=0,$$

que podemos escribir como:

$$3\mu y-8\mu-\mu x+y-3x=0.$$

La ecuación de la recta que pasa por $P'(1, -3)$ y $C'\left(\frac{4\mu}{\mu+1},\frac{-4\mu}{\mu+1}\right)$ es:

$$y+3=\left(\frac{\frac{-4\mu}{\mu+1}+3}{\frac{4\mu}{\mu+1}-1}\right)(x-1);$$

simplificamos y tenemos:

$$y+3=\frac{-4\mu+3\mu+3}{4\mu-\mu-1}(x-1)$$

$$(y+3)(3\mu-1)=(-\mu+3)(x-1)$$

$$(y+3)(3\mu-1)-(-\mu+3)(x-1)=0,$$

que podemos escribir como:

$$3\mu y+8\mu+\mu x-y-3x=0.$$

Las coordenadas de $M(x, y)$ deben satisfacer el sistema:

$$\begin{aligned}3\mu y-8\mu-\mu x+y-3x&=0\\3\mu y+8\mu+\mu x-y-3x&=0.\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned}6\mu y-6x&=0\\\mu&=\frac{x}{y}.\end{aligned}$$

Esto nos da una relación entre las coordenadas de M y la pendiente de la recta CC'. Sustituimos este valor en la primera ecuación del sistema:

$$3\left(\frac{x}{y}\right)y-8\left(\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{x}{y}\right)x+y-3x=0,$$

de donde se cumple:

$$-x^2+y^2-8x=0.$$

Es decir, M está en la hipérbola que tiene esta ecuación. Para identificar los elementos de la hipérbola, la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}-\left(x^2+8x\right)+y^2&=0\\-\left(x^2+8x+16\right)+y^2&=-(16)\\-(x+4)^2+y^2&=-16\\\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{y^2}{-16}&=1;\end{aligned}$$

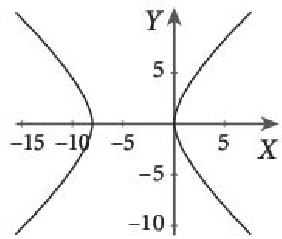


Figura 7.67

entonces (ver figura 7.67),

$$\frac{(x+4)^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Encontrar el lugar geométrico de los centros de los círculos que son tangentes externamente a los círculos $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ y $(x-4)^2+(y-3)^2=4$.

Solución:
El centro del círculo $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ es $C'(-4, 3)$ y su radio es 5. El centro del otro es $C(4, 3)$ y su radio es 2.

Llamamos $P(x, y)$ al centro de un círculo tangente a los dos dados y a a su radio (figura 7.68).

Como el círculo $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ y el buscado son tangentes, entonces, la distancia de P a C' es la suma de los radios, es decir,

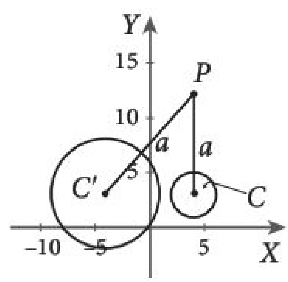


Figura 7.68

$$\overline{PC}=5+a,$$

y la distancia de P a C es la suma de los radios, es decir,

$$\overline{PC} = 2 + a,$$

de donde:

$$\overline{PC} - \overline{PC} = 5 + a - (2 + a) = 3.$$

Entonces, el punto P se encuentra en la hipérbola con focos en C y C' y $2a = 3$. Veamos ahora qué ecuación tiene la hipérbola.

El punto medio de los focos es el centro de la hipérbola,

$$\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{3+3}{2}\right) = (0,3).$$

La distancia de cualquiera de los focos al centro es $c = 4$. Sabemos que $a = \frac{3}{2}$; entonces,

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{55}{4}.$$

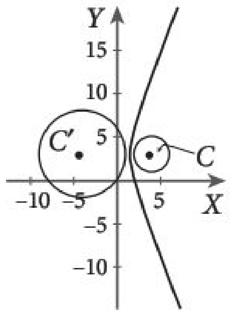


Figura 7.69

La ecuación buscada es:

$$\frac{(x-0)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(y-3)^2}{\frac{55}{4}} = 1,$$

es decir,

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{(y-3)^2}{\frac{55}{4}} = 1.$$

Consideraremos solo una rama de la hipérbola, ya que los puntos que están sobre la otra rama satisfacen la igualdad:

$$PC - PC = -3.$$

El lugar geométrico buscado es la rama derecha de la hipérbola (figura 7.69).

Veamos uno de los círculos tangentes a los dos dados:

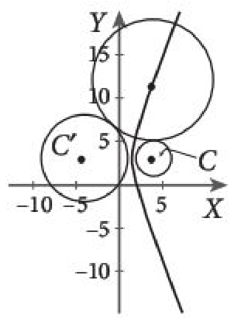


Figura 7.70

Ejercicios

1. Considera las rectas $y = x$ y $y = -x$. Toma el punto $A(5, 0)$ y los puntos $P(7, 2)$ y $P'(7, -2)$. Por A traza una recta cualquiera que corte $y = x$ en el punto C y la recta $y = -x$ en el punto C'. Une P con C y P' con C' y llama M al punto de intersección de estas dos rectas. Halla el lugar geométrico descrito por M cuando la recta CAC' gira alrededor de A.
2. Un triángulo tiene vértices $A(5, 8)$, $B(5, -1)$. Encuentra el lugar geométrico que describe el vértice C si el producto de las pendientes de los lados AC y BC del triángulo es igual a 6.
3. Da con el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia al punto $Q(0, 5)$ es 8 veces su distancia a la recta $y = 3$.

Mundo virtual

Geolab

1. **Hipérbola dados los focos y el semieje mayor.** Encuentra la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F1(5, 0)$ y $F2(-5, 0)$ tal que la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos sea 4. Para ello, construye los puntos y el escalar $a = 2$; luego, utiliza el constructor *Focos y a* del menú de cónicas. ¿Qué pasa si haces $a = 3$? En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón de la hipérbola y oprime el botón *Datos* para ver todos los elementos de la hipérbola.
2. **Hipérbola dados los focos y un punto.** Encuentra la hipérbola que pasa por el punto $P(2, 3)$ y cuyos focos son $F1(1, 1)$ y $F2(-3, -1)$. Utiliza el constructor *Hipérbola, focos y punto* del menú de cónicas. También construye la elipse con los mismos focos y que pase por P. ¿Cómo son las dos cónicas en los puntos de intersección?
3. **Hipérbola dados el centro y los semiejes.** Encuentra la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en el origen y que satisface que el semieje transversal mide 5 y el semieje no focal mide 3. Sugerencia: Usa el teorema de Pitágoras para encontrar el valor de c y con él encuentra los focos. Puedes construir los focos como *Puntos calculados*, poniendo c o $-c$ en la coordenada x y 0 en la coordenada y. Luego, utiliza el constructor *Focos y a* del menú de cónicas.
4. **Hipérbola dada la ecuación.** Grafica la hipérbola cuya ecuación es $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Para ello, utiliza el constructor *Cónica calculada* con los valores adecuados para los coeficientes $A\ldots F$.
5. **Hipérbola dada la ecuación.** Encuentra las coordenadas de los focos, el centro y los vértices de la hipérbola cuya ecuación es $3x^2 - y^2 - 18x + 2y + 23 = 0$ y grafícala.
6. **Familias de hipérbolas.** Encuentra las hipérbolas con focos en $F1(-5, 0)$ y $F2(5, 0)$, variando la excentricidad en $1 < e \leq 5$. Geolab no tiene constructor para *Focos y excentricidad*, pero sí tiene para *Focos y a*. Si $c = 5$, tenemos que $a = 5/e$.
   - Construye dos números directos $c = 5$ y $e = 2$.
   - Construye los focos como puntos calculados $F1(-c, 0)$ y $F2(c, 0)$.

- Construye el número calculado $a = c/e$.
- Construye la cónica con estos focos y el valor de a.
- Anima el número e entre 1.01 y 5.
- Ejecuta la animación, indicando que la cónica tiene traza.

7. **Hipérbola por 5 puntos.** Construye la hipérbola que pasa por $A(-6, 7)$, $B(-2, 6)$, $C(0, 1)$, $D(0, 7)$, $E(4, 6)$. Utiliza el constructor *Cónica por 5 puntos*.
8. **Tangente a la hipérbola.** Utiliza la hipérbola del ejercicio anterior. Construye la tangente a la hipérbola desde el punto $F(0, -3)$, la cual se encuentra del mismo lado que el punto A. También construye la tangente que está del otro lado de A. ¿Puedes construir una tangente desde $Q(-1, 0)$?
9. **Elementos de la hipérbola.** Utiliza la hipérbola del ejercicio 7. Encuentra las intersecciones de las tangentes construidas en el ejercicio 8 con el eje focal de la cónica. Para ello, construye el eje transversal de la cónica. Utiliza el constructor *Rectas de una Cónica->Eje Focal* del menú de rectas. Una vez construida esta recta, construye sus intersecciones con las tangentes dadas. Observa que usando los menús *Puntos de una Cónica, Rectas de una Cónica, Escalares de una Cónica* tienes posibilidad de acceder a todos los elementos importantes de la cónica.
10. **Lugar geométrico.** Tomamos los puntos $A(4, 0)$, $P(1, 3)$ y $P1(1, -3)$. Por A trazamos una recta cualquiera ℓ que corte la recta $y = x$ en el punto C y la recta $y = -x$ en el punto C. Unimos P con C y $P1$ con $C1$ y llamamos M al punto de intersección de estas rectas. Encuentra el lugar geométrico descrito por M cuando la recta $CAC1$ gira alrededor de A.
    - Dibuja los puntos directos $A(4, 0)$, $P(1, 3)$, $P1(1, -3)$.
    - Define un escalar directo a de valor 1.
    - Traza un círculo *cir* con centro en A y radio a. En la ventana Nivel sustituye el 3 por el 5.
    - Define Q un punto en el círculo *cir*. En la ventana Nivel escribe 5.
    - Dibuja la recta ℓ que une los puntos A y Q.
    - Define las rectas directas $\ell 1 : A = 1, B = -1, C = 0$ (esta es la recta $y = x$) y $\ell 2 : A = 1, B = 1, C = 0$ (esta es la recta $y = -x$).
    - Llama C al punto de intersección de las rectas ℓ y $\ell 1$ y $C1$ al punto de intersección de las rectas ℓ y $\ell 2$.
    - Traza las rectas $t1$ (que unen los puntos C y P) y $t2$ que une los puntos $C1$ y $P1$.
    - Define M el punto de intersección de las rectas $t1$ y $t2$. Pide a M que deje traza.
    - Construye una animación de Q de 0 a 0.5. En la ventana PASOS escribe 360.
    - Ve a la pantalla gráfica, y apaga el nivel 5.
    - Prende los botones *T* y *E* en la pantalla gráfica para ver la traza y los ejes cartesianos.
    - Ejecuta la animación.
    - Ahora cambia los puntos P y $P1$. Escribe $P(3, 5)$ y $P1(3, -5)$, regresa a la pantalla gráfica y ejecuta la animación.

Geolab

- Vuelve a la pantalla de construcción y cambia A, escribe $A(4.25, 0)$, regresa a la pantalla gráfica y ejecuta la animación.
- Por último vuelve a la pantalla de construcción y cambia A, escribe $A(5, 0)$, regresa a la pantalla gráfica y ejecuta la animación.

Resumen de la unidad

- Si la hipérbola tiene centro en el origen y sus ejes son paralelos a los ejes cartesianos:

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$C(0, 0)$	$V(a, 0)$ $V'(-a, 0)$	$F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$	$B(0, b)$ $B'(0, -b)$
Vertical	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$C(0, 0)$	$V(0, a)$ $V'(0, -a)$	$F(0, c)$ $F'(0, -c)$	$B(b, 0)$ $B'(-b, 0)$

- Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}$.
- Asíntotas.

  Hipérbola horizontal: $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$.

  Hipérbola vertical: $y=\frac{a}{b}x$, $y=-\frac{a}{b}x$.
- Directrices.

  Hipérbola horizontal: $x=\frac{a^2}{c}$; $F(c, 0)$, $x=-\frac{a^2}{c}$; $F'(-c, 0)$.

  Hipérbola vertical: $y=\frac{a^2}{c}$; $F(0, c)$, $y=-\frac{a^2}{c}$; $F'(0, -c)$.
- Recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$.

  Hipérbola horizontal: $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$.

  Hipérbola vertical: $\frac{y_1y}{a^2}-\frac{x_1x}{b^2}=1$.

- Si la hipérbola tiene centro en $C(h, k)$ y sus ejes son paralelos a los ejes cartesianos:

Posición	Ecuación	Centro	Vértices	Focos	B y B'
Horizontal	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$C(h, k)$	$V(h+a, k)$ $V'(h-a, k)$	$F(h+c, k)$ $F'(h-c, k)$	$B(h, k+b)$ $B'(h, k-b)$
Vertical	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	$C(h, k)$	$V(h, k+a)$ $V'(h, k-a)$	$F(h, k+c)$ $F'(h, k-c)$	$B(h+b, k)$ $B'(h-b, k)$

- Asíntotas.

  Hipérbola horizontal: $y-k=\frac{b}{a}(x-h)$, $y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$.

  Hipérbola vertical: $y-k=\frac{a}{b}(x-h)$, $y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$.

- Directrices.

  Hipérbola horizontal: $x-h=-\frac{a^2}{c}$; $F(h+c,k)$, $x-h=-\frac{a^2}{c}$; $F(h-c,\ k)$.

  Hipérbola vertical: $y-k=\frac{a^2}{c}$; $F(h,\ k+c)$, $y-k=-\frac{a^2}{c}$; $F(h,k-c)$.

- Recta tangente en el punto $P(x_1,y_1)$.

  Hipérbola horizontal: $\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}-\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1$.

  Hipérbola vertical: $\frac{(y_1-k)(y-k)}{a^2}-\frac{(x_1-h)(x-h)}{b^2}=1$.

- Forma general de la ecuación de la hipérbola: $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde $A\neq 0$, $C\neq 0$, A y C tienen signo contrario.
- Unas ecuaciones paramétricas.

  Hipérbola horizontal: $x(t)=h+a\sec t$, $y(t)=k+b\tan t$.
  Hipérbola vertical: $x(t)=h+b\tan t$, $y(t)=k+a\sec t$.

Ejercicios de repaso

1. Escribe la ecuación de la hipérbola que describe un punto que se mueve de tal manera que el producto de sus distancias a las rectas $2x-y=0$ y $2x+y=0$ es 4. Demuestra que las dos rectas son las asíntotas de la hipérbola.
2. Encuentra los puntos de tangencia a la hipérbola $4x^2-25y^2-100=0$ para que las tangentes corten el eje Y en el punto $P(0,4)$.
3. Demuestra que las hipérbolas $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ y $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{5}=1$ tienen las mismas asíntotas.
4. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2-y^2-1=0$ en el punto $P(\sqrt{2},1)$ y escribe las coordenadas de los puntos en los que corta las asíntotas.
5. Halla la excentricidad de las siguientes hipérbolas.

   a. $y^2-x^2-16=0$.
   b. $y^2-x^2-49=0$.
   c. $x^2-y^2-25=0$.
   d. $x^2-y^2-2=0$.
   e. $x^2-y^2-a^2=0$.
   f. $x^2-y^2-10x-14y-105=0$.

6. Prueba que la recta $3x + 2y - 19 = 0$ corta la hipérbola $-36x^2 + 16y^2 - 108x - 160y - 257 = 0$ en un único punto. Escribe las coordenadas del punto.
7. Encuentra el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola $2x^2 - y^2 - 4x - 12y - 38 = 0$ y la tangente a esa hipérbola en el punto $P\left(1+\sqrt{2},-6\right)$.
8. ¿Por qué no es posible encontrar una hipérbola cuyos focos sean $F'(-3, -6)$ y $F(-3, 2)$ tal que la distancia entre sus vértices sea 10?
9. Demuestra que las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 - 81 = 0$ son perpendiculares.
10. Dos rectas tangentes a la hipérbola $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$ se cortan en el punto $P(0, 1)$. Encuentra los puntos de tangencia.
11. Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 0)$ y es tangente a la hipérbola $8x^2 - 3y^2 - 48 = 0$.
12. Demuestra que las hipérbolas $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$, $\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{14} = 1$ y $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{13} = 1$ tienen los mismos focos. Escribe la ecuación de otra hipérbola con los mismos focos.
13. Encuentra la ecuación del círculo que pasa por los focos de las hipérbolas $16x^2 - 9y^2 - 1 = 0$ y $9y^2 - 16x^2 - 1 = 0$.
14. Halla la excentricidad de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 - 1 = 0$ y llámala e_1. Después, encuentra la excentricidad de la hipérbola $4y^2 - 5x^2 - 1 = 0$ y llámala e_2. Demuestra que $e_1^2 e_2^2 = e_1^2 + e_2^2$.
15. Demuestra que la elipse $25x^2 + 16y^2 - 1 = 0$ y la hipérbola $100y^2 - 80x^2 - 1 = 0$ tienen los mismos focos.
16. Considera el triángulo cuyos vértices son $A(-2,0)$, $B(2, 0)$ y $C(x, y)$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico que describe el vértice C, si el ángulo B es la mitad del ángulo A.
17. Dos faros Loran están en una costa recta a 200 kilómetros de distancia. ¿Qué diferencia en las lecturas de las señales debe buscar un barco para tocar tierra entre ellos a 50 kilómetros de uno de los faros?
18. Un cañón se encuentra en un lugar $Q(10, y)$. Dos observadores están en los puntos $A(-10, 0)$ y $B(10, 0)$, respectivamente. El observador en A oye un disparo 24 segundos después del momento en el que lo oye el observador B. Encuentra la posición del cañón. Considera que el sonido viaja a $\frac{1}{3}$ km/s.
19. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a los vértices de las hipérbolas $16x^2 - 9y^2 + 128x + 108y - 644 = 0$ y $-16x^2 + 9y^2 - 128x - 108y - 508 = 0$. Encuentra las coordenadas de los cuatro puntos de intersección de dichas rectas y da la ecuación del círculo cuyo centro es el centro de ambas hipérbolas y pasa por los puntos que encontraste. Demuestra que los cuatro focos están sobre este círculo.
20. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes de la hipérbola $-3x^2 + 2y^2 + 60x - 24y - 264 = 0$ que tienen pendiente igual a $\frac{3}{4}$.
21. Considera las rectas $y = x$ y $y = -x$; entonces, el eje X es la bisectriz del ángulo formado por estas rectas. Toma el punto $A\left(\frac{25}{7},0\right)$ y los puntos $B(3, 4)$ y $B'(3, -4)$. Por A traza una recta cualquiera que corte $y = x$ en el punto C y la recta $y = -x$ en el punto C'. Une B con C y B' con C' y llama M al punto de intersección de estas dos rectas. Halla el lugar geométrico descrito por M, cuando la recta CAC' gira alrededor de A.

Autoevaluación

1. Encuentra la ecuación simétrica de la hipérbola cuyos focos son $F'(0, -10)$ y $F(0, 10)$ tal que la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es 16.

   a. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1.$
   b. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$
   c. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1.$
   d. $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 337.

2. Encuentra la ecuación general de la hipérbola cuyos focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ tal que la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es 8.
   a. $-16x^2+9y^2-144=0.$
   b. $9x^2-16y^2-144=0.$
   c. $9x^2+16y^2-144=0.$
   d. $16x^2+9y^2-144=0$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 334.

3. Encuentra las coordenadas de los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$.
   a. $(13, 0)$ y $(-13,0)$.
   b. $(5, 0)$ y $(-5, 0)$.
   c. $(0, 13)$ y $(0, -13)$.
   d. $(12, 0)$ y $(-12, 0)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta las páginas 333 y 337.

4. Encuentra la excentricidad de la hipérbola $-144x^2+25y^2=3600$.

   a. $\frac{13}{5}$.
   b. $\frac{12}{13}$.
   c. $\frac{5}{13}$.
   d. $\frac{13}{12}$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 344.

5. Encuentra el centro de la hipérbola $16x^2-25y^2-64x+200y-736=0$.
   a. $(2, 4)$.
   b. $(4, 2)$.
   c. $(-2, -4)$.
   d. $(2, -4)$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 353.

6. Encuentra la forma simétrica de la hipérbola con excentricidad $\frac{5}{4}$ vértices en $(5, -5)$ y $(-3, -5)$

   a. $\frac{(x+5)^2}{4^2}-\frac{(y-1)^2}{3^2}=1.$
   b. $\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y+5)^2}{3^2}=1.$
   c. $\frac{(x-1)^2}{4^2}-\frac{(y+5)^2}{3^2}=1.$
   d. $\frac{(y+5)^2}{4^2}-\frac{(x-1)^2}{3^2}=1.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 353.

7. Encuentra la constante de proporcionalidad si y es inversamente proporcional a x y para $x=\frac{1}{4}$ se tiene $y=36$.
   a. $k=9$.
   b. $k=\frac{1}{9}$
   c. $k=144$.
   d. $k=\frac{1}{6}$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 374.

8. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2-y^2-2x-10y-23=0$ que pasa por el punto $(1, -4)$
   a. $y=-4$.
   b. $x=6$.
   c. $x=-6$.
   d. $x=-4$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 381.

Heteroevaluación

1. Encuentra los focos de la hipérbola con ecuación $45x^2 - 36y^2 + 180x + 24y + 896 = 0$.

2. Encuentra los vértices de la hipérbola con ecuación $15x^2 - 8y^2 - 120x + 80y - 80 = 0$.

3. Encuentra la ecuación simétrica de la hipérbola con excentricidad $\frac{6}{5}$ y focos $F'(0, -3)$ y $F(12, -3)$.

4. Encuentra la ecuación simétrica de la hipérbola si una de las directrices tiene ecuación $y = -\frac{29}{7}$ y sus vértices son $V\left(-9, -7 - 2\sqrt{5}\right)$ y $V\left(-9, -7 + 2\sqrt{5}\right)$.

5. Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 - 128x - 18y - 473 = 0$.

6. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $x^2 - 5y^2 + 2x + 10y - 24 = 0$ en el punto $P(9, -3)$.

Plaza de San Pedro, Roma, Italia.

Unidad 8

La ecuación general de segundo grado

En las unidades anteriores, con la ayuda de la traslación de los ejes coordenados, se obtuvieron las ecuaciones de las cónicas horizontales y verticales que tienen sus centros (elipses e hipérbolas) o su vértice (parábolas) fuera del origen del sistema cartesiano.

Ahora se consideran cónicas con ejes no paralelos a los ejes del sistema. Sus ecuaciones se caracterizan porque en ellas aparece el producto xy. Mediante la rotación de los ejes coordenados se establecen nuevos sistemas cartesianos y con respecto a ellos se obtienen las ecuaciones estándar de dichas cónicas.

Se estudia la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y con ayuda de la expresión $B^2 - 4AC$, conocida como discriminante, se establece un criterio para determinar la clase de cónica que representa una ecuación de tal tipo. No se tratan con detalle, pero se llegan a considerar, los casos en que la ecuación anterior representa alguna de las llamadas *cónicas degeneradas* (dos rectas, un punto y el vacío). El criterio al que nos hemos referido no sirve para reconocer estas situaciones excepcionales, pero consideramos que, en una primera presentación del tema, lo aquí expuesto resulta conveniente y suficiente.

A lo largo del libro se ha trabajado con las ecuaciones estándar de las cónicas. Ahora se usará la ecuación general de segundo grado para desarrollar los distintos temas antes vistos.

En esta unidad revisarás los siguientes temas. Obsérvalos y reflexiona acerca de lo que sabes sobre ellos.

La ecuación general de segundo grado

- Rotación de los ejes de coordenadas
- Ecuación general de las cónicas
  - Caso $B=0$ Traslación de ejes
  - Caso $B\neq 0$ Rotación de ejes
- Discriminante de la ecuación general
- Resolución de problemas
  - Lugares geométricos

Rotación de los ejes de coordenadas

Antena parabólica.

Una antena parabólica es un paraboloide orientado hacia un satélite.

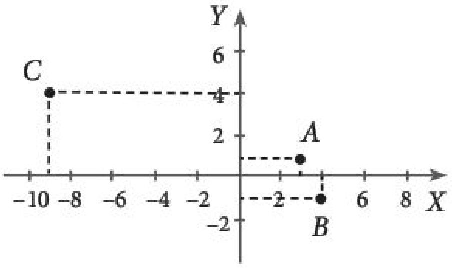
Dar las coordenadas de los puntos $A(3,1)$, $B(4,-1)$ y $C(-9,4)$ con respecto al sistema de coordenadas $X'Y'$ que se obtiene al girar 90° en sentido positivo (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) los ejes cartesianos XY.

Solución:

Marcamos los puntos A, B y C en el sistema XY, como en la figura 8.1.

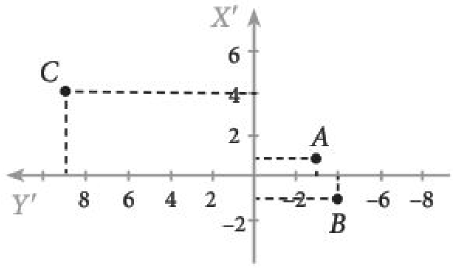
Ahora, dibujamos un nuevo par de ejes $X'Y'$ girando los originales 90° en sentido positivo. De esta manera, el semieje positivo X' queda colocado donde estaba el semieje positivo Y y el semieje positivo Y' queda colocado donde estaba el semieje negativo X (figura 8.2).

Llamamos sentido positivo de giro al que es contrario al movimiento de las manecillas del reloj y sentido negativo al que coincide con el movimiento de ellas.



(a)

Figura 8.1



(b)

Figura 8.2

Vemos ahora que las coordenadas de los puntos A, B y C, respecto al nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$, son $A(1,-3)$, $B(-1,-4)$ y $C(4,9)$.

¿Observas un patrón para obtener esas coordenadas a partir de las originales $(3,1)$, $(4,-1)$ y $(-9,4)$?

¿Podrías dar las nuevas coordenadas del punto $D(7,8)$, sin necesidad de dibujarlo?

Veamos ahora el caso general.

Tomemos un punto $P(x,y)$ en el plano XY. Giremos los ejes cartesianos un ángulo θ (el sentido del giro es positivo si $\theta > 0$ y el sentido es negativo si $\theta < 0$), obteniendo los ejes $X'Y'$. En la figura 8.3 se usa un ángulo $0 < \theta < 90°$.

Llamemos (x', y') a las coordenadas respecto a los ejes $X'Y'$, que deseamos determinar. Para ver la relación entre (x,y) y (x',y') tracemos el segmento OP y llamemos φ al ángulo formado por el segmento OP y el semieje positivo X, y sea r la distancia del punto P al origen O (figura 8.4).

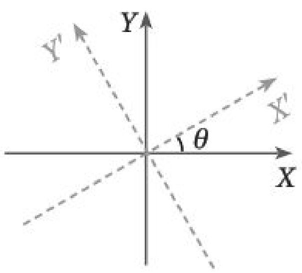


Figura 8.3

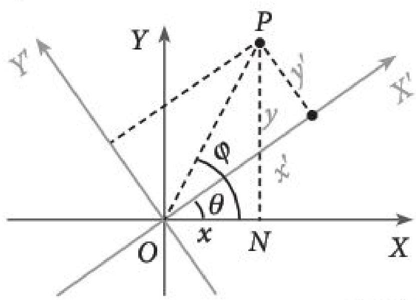


Figura 8.4

Con el uso del triángulo OPM, tenemos que:

$$OM = x' = r\cos(\varphi - \theta).$$

Aplicamos la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos y obtenemos:

$$x' = r(\cos\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta) = (r\cos\varphi)\cos\theta + (r\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\theta.$$

Por otro lado, en el triángulo OPN, vemos que:

$$ON = x = r\cos\varphi \qquad PN = y = r\operatorname{sen}\varphi,$$

así que,

$$x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta.$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} y' &= r\operatorname{sen}(\varphi - \theta) \\ &= r(\operatorname{sen}\varphi\cos\theta - \cos\varphi\operatorname{sen}\theta) \\ &= -(r\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta + (r\operatorname{sen}\varphi)\cos\theta \\ &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

Las fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ y' &= -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned}} \tag{8.1}$$

se llaman *fórmulas de rotación* de ejes y dan las coordenadas de P, en relación con el nuevo sistema $X'Y'$, en términos de las coordenadas, respecto al sistema original de coordenadas XY.

Si tenemos las coordenadas (x, y) de un punto respecto a un sistema XY y queremos encontrar sus coordenadas (x', y') respecto a un sistema $X'Y'$ obtenido por una rotación, de un ángulo θ, del sistema XY, utilizamos las fórmulas
$x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$
$y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$

Ejemplos

1. Dar las coordenadas de los puntos $A(3,1)$, $B(4,-1)$ y $C(-9,4)$, con respecto al sistema de coordenadas que se obtiene al girar los ejes cartesianos un ángulo de 90°.

   Solución:
   Este es el ejemplo introductorio; resolvámoslo ahora por medio de las fórmulas de rotación.

   Como conocemos las coordenadas (x, y) de los puntos A, B y C, y buscamos sus coordenadas (x', y'), utilizamos las fórmulas (8.1). Recordemos que

   $$\operatorname{sen} 90° = 1 \quad \text{y} \quad \cos 90° = 0$$

así que las nuevas coordenadas de los puntos son, para el punto A:

$$x' = 3\cos 90° + 1\,\mathrm{sen}\,90° = 3\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1,$$
$$y' = -3\,\mathrm{sen}\,90° + 1\cos 90° = -3\cdot 1 + 1\cdot 0 = -3,$$

para el punto B:

$$x' = 4\cos 90° + (-1)\,\mathrm{sen}\,90° = 4\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -1,$$
$$y' = -4\,\mathrm{sen}\,90° + (-1)\cos 90° = -4\cdot 1 + (-1)\cdot 0 = -4,$$

para el punto C:

$$x' = (-9)\cos 90° + 4\,\mathrm{sen}\,90° = (-9)\cdot 0 + 4\cdot 1 = 4,$$
$$y' = -(-9)\,\mathrm{sen}\,90° + 4\cos 90° = -(-9)\cdot 1 + 4\cdot 0 = 9.$$

Así, las nuevas coordenadas de los puntos son: $A(1,-3)$, $B(-1,\,-4)$, $C(4,9)$, que son las mismas coordenadas que obtuvimos anteriormente.

Para un punto $P(x,y)$ arbitrario, obtenemos que sus nuevas coordenadas son:

$$x' = x\cos 90° + y\,\mathrm{sen}\,90° = x\cdot 0 + y\cdot 1 = y,$$
$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,90° + y\cos 90° = -x\cdot 1 + y\cdot 0 = -x.$$

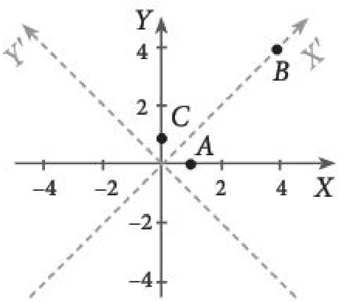


Figura 8.5

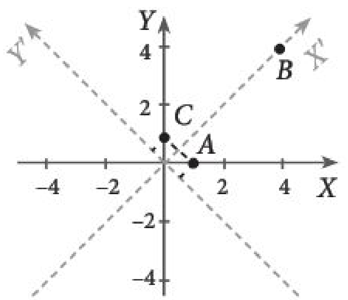


Figura 8.6

2. Dar las coordenadas de los puntos $A(1,0)$, $B(4,4)$ y $C(0,1)$, con respecto al sistema de coordenadas que se obtiene al girar los ejes cartesianos 45°.

Solución:

- Primera solución:

  Marquemos los puntos A, B y C en el sistema XY. Ahora tracemos los nuevos ejes $X'Y'$ girando 45° los ejes originales.

  Desde A tracemos paralelas a los nuevos ejes; como en la figura 8.6, observemos que se forman dos triángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa común OA vale 1, donde O es el origen común de los dos sistemas. Así, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, los catetos valen $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de modo que las nuevas coordenadas de A son $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

  El punto B se encuentra sobre la parte positiva del eje X', así que su primera coordenada es su distancia al origen, que, nuevamente por el teorema de Pitágoras, es $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, y su segunda coordenada es cero; así, las nuevas coordenadas de B son $B\left(4\sqrt{2}, 0\right)$.

  Finalmente, para encontrar las coordenadas de C, trazamos paralelas a los nuevos ejes desde C y observamos nuevamente que se forman dos triángulos rectángulos isósceles, cuya hipotenusa común OC mide 1, de modo que las nuevas coordenadas de C son $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

- Segunda solución:

Resolvámoslo ahora de la manera sistemática que nos proporciona la fórmula (8.1), recordando que:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Las nuevas coordenadas de los puntos son, para el punto A:

$$x' = 1\cos 45^\circ + 0\operatorname{sen} 45^\circ = 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y' = -1\operatorname{sen} 45^\circ + 0\cos 45^\circ = -1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

para el punto B:

$$x' = 4\cos 45^\circ + 4\operatorname{sen} 45^\circ = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2},$$

$$y' = -4\operatorname{sen} 45^\circ + 4\cos 45^\circ = -4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

para el punto C:

$$x' = 0\cos 45^\circ + 1\operatorname{sen} 45^\circ = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y' = -0\operatorname{sen} 45^\circ + 1\cos 45^\circ = -0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Así, las nuevas coordenadas de los puntos son $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(4\sqrt{2}, 0\right)$ y $C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, como habíamos encontrado en la primera solución geométrica.

Ejemplos

Veamos ahora cómo se transforman las ecuaciones de algunos lugares geométricos al girar los ejes cartesianos.

Supongamos que la recta ℓ tiene ecuación:

$$x - \sqrt{3}y + 3 = 0.$$

Queremos obtener la ecuación de la recta con respecto a los ejes $X'Y'$ obtenidos al girar los ejes XY un ángulo de 30°. Así, en lugar de la variables x y y deberán aparecer x' y y'.

Solución:

De acuerdo con las fórmulas (8.1), la rotación de los ejes cartesianos mediante un ángulo de 30° está dada por:

$$x' = x\cos 30^\circ + y \operatorname{sen} 30^\circ,$$
$$y' = -x \operatorname{sen} 30^\circ + y\cos 30^\circ.$$

Recordemos que:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y obtendremos:

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \qquad y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

Lo que necesitamos ahora es escribir x y y en términos de x' y y'. Para ello, resolvemos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y.

Multiplicamos la segunda ecuación por $\sqrt{3}$ y la sumamos a la primera:

$$x' + \sqrt{3}y' = 2y,$$

despejamos y,

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'.$$

Sustituimos en la primera ecuación el valor de y:

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right).$$

Despejamos x:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'.$$

Así, las ecuaciones que expresan x y y, en términos de x' y y', son:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y',$$
$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación de la recta:

$$x - \sqrt{3}y + 3 = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right) - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 3 = 0$$

$$-2y' + 3 = 0.$$

Observa que no hay término en x', lo que significa que la recta es paralela al eje X', lo cual era de esperarse, ya que la recta forma un ángulo de 30° con el eje X (figura 8.7).

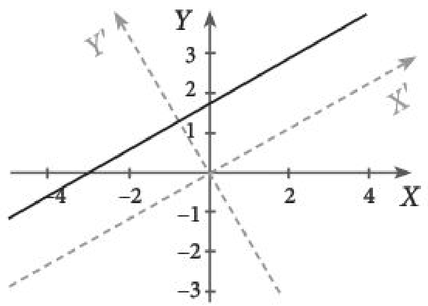


Figura 8.7

Veamos el caso general. Si tenemos la ecuación respecto a un sistema XY de un lugar geométrico y queremos encontrar su ecuación respecto a un sistema $X'Y'$ obtenido por una rotación del sistema XY, lo que debemos hacer es despejar x y y de las fórmulas de rotación (8.1). Para ello, podemos proceder como lo hicimos en el ejemplo anterior, resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y, o pensar en la rotación de ejes que manda a los ejes cartesianos $X'Y'$ en XY. Si los ejes $X'Y'$ se obtuvieron mediante una rotación de un ángulo θ, la rotación de ejes que manda $X'Y'$ en XY es una rotación de un ángulo $-\theta$. Intercambiando los papeles de x, y con los de x', y' en las fórmulas de rotación (8.1) obtenemos:

$$x = x'\cos(-\theta) + y'\operatorname{sen}(-\theta)$$
$$y = -x'\operatorname{sen}(-\theta) + y'\cos(-\theta)$$

y recordemos que:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \cos(-\theta) = \cos\theta,$$

de modo que obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned}} \tag{8.2}$$

que son las fórmulas que nos permiten encontrar la ecuación del lugar geométrico, en términos de x' y y', cuando se giran los ejes cartesianos un ángulo θ.

Si tenemos la ecuación respecto a un sistema XY de un lugar geométrico y queremos encontrar su ecuación respecto a un sistema $X'Y'$ obtenido por una rotación, de un ángulo θ, del sistema XY, utilizamos las fórmulas $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$ $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$.

Ejemplos

1. Encontrar la ecuación del lugar geométrico dado por la ecuación:

$$\frac{43}{4}x^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}xy + \frac{57}{4}y^2 = 144,$$

respecto a los ejes $X'Y'$, obtenidos al girar los ejes cartesianos $30°$, e identificarlo.

Solución:
Utilizaremos las fórmulas (8.2):

$$x = x'\cos 30° - y'\operatorname{sen} 30°,$$
$$y = x'\operatorname{sen} 30° + y'\cos 30°.$$

Recordemos que:

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}.$$

Así, sustituimos:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \qquad y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

en la ecuación:

$$\frac{43}{4}x^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}xy + \frac{57}{4}y^2 = 144,$$

y obtenemos:

$$\frac{43}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 - \frac{7}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + \frac{57}{4}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 144,$$

que después de simplificar queda como sigue:

$$9(x')^2 + 16(y')^2 = 144.$$

Al escribirla en la forma simétrica:

$$\frac{(x')^2}{4^2} + \frac{(y')^2}{3^2} = 1,$$

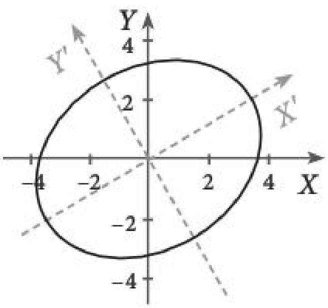


Figura 8.8

la reconocemos como una elipse en la que $a = 4$ y $b = 3$, cuyo eje mayor está sobre el eje X' y el eje menor está sobre el eje Y'.

Como estos ejes están girados $30°$ respecto a los ejes XY, entonces la elipse está girada $30°$ respecto a estos ejes.

2. Encontrar la ecuación de la parábola vertical $y-5=2(x+6)^2$ respecto al sistema que se obtiene al girar los ejes un ángulo de $45°$.

Solución:
Utilizaremos las fórmulas (8.2):

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45°$$
$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45°.$$

Recordemos que:

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

de donde:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Sustituimos en la ecuación de la parábola:

$$y-5=2(x+6)^2$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 5 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 6\right)^2$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 5 = 2\left(\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 + 36 - x'y' + \frac{12}{\sqrt{2}}x' - \frac{12}{\sqrt{2}}y'\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 5 = (x')^2 + (y')^2 + 72 - 2x'y' + \frac{24}{\sqrt{2}}x' - \frac{24}{\sqrt{2}}y'$$
$$(x')^2 + (y')^2 + 72 - 2x'y' + \frac{24}{\sqrt{2}}x' - \frac{24}{\sqrt{2}}y' - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 5\right) = 0$$
$$(x')^2 + (y')^2 - 2x'y' + \frac{23}{\sqrt{2}}x' - \frac{25}{\sqrt{2}}y' + 77 = 0.$$

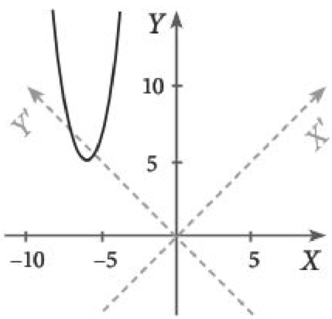


Figura 8.9

La ecuación buscada es $(x')^2 + (y')^2 - 2x'y' + \frac{23}{\sqrt{2}}x' - \frac{25}{\sqrt{2}}y' + 77 = 0.$

Ejemplos

Pensamiento crítico

Considera una elipse horizontal con centro en el origen y ejes paralelos a los ejes coordenados. Si aplicamos una rotación de 90°, ¿cómo es la elipse con respecto al nuevo sistema?

Ejercicios

En cada caso, encuentra las coordenadas de los puntos dados con respecto al sistema de coordenadas que se obtiene al girar los ejes cartesianos el ángulo indicado.

1. $A(1,-2), B(-8,-4), C(4,7)$; $30°$.
2. $A(0,-3), B(-1,1), C(-4,-5)$; $-135°$.
3. $A(2,6), B(9,-1), C(-10,8)$; $-45°$.
4. $A(-3,-3), B(2,0), C(7,-2)$; $90°$.
5. $A(-1,0), B(2,-3), C(5,7)$; $180°$.
6. $A(-7,2), B(2,5), C(4,3)$; $45°$.
7. $A(0,-2), B(-3,2), C(7,5)$; $120°$.
8. $A(8,-2), B(1,-4), C(6,-1)$; $90°$.
9. $A(2,7), B(1,8), C(-3,-1)$; $-60°$.
10. $A(0,0), B(3,4), C(0,-1)$; $135°$.
11. $A(7,1), B(8,-8), C(35,2)$; $360°$.
12. $A(-4,-3), B(5,-1), C(4,17)$; $-30°$.

Encuentra la ecuación de la recta dada con respecto a los ejes $X'Y'$, obtenidos al girar los ejes XY en un ángulo θ.

13. $\sqrt{2}x + y - 5 = 0;\ \ \theta = 90°$.
14. $x + \sqrt{3}y + 4 = 0;\ \ \theta = 60°$.
15. $2\sqrt{3}x + 2y + 9 = 0;\ \ \theta = 30°$.
16. $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 13 = 0;\ \ \theta = 45°$.
17. $5x - 4y - 7 = 0;\ \ \theta = 90°$.
18. $x + y - 1 = 0;\ \ \theta = 60°$.
19. $2x - y + 7 = 0;\ \ \theta = 90°$.
20. $x + 3y - 4 = 0;\ \ \theta = 45°$.
21. $5x - 8y + 5 = 0;\ \ \theta = 30°$.
22. $9x - 6 = 0;\ \ \theta = 360°$.
23. $x - y = 0;\ \ \theta = 120°$.
24. $3x + y - 1 = 0;\ \ \theta = 120°$.

Encuentra la ecuación de la cónica dada con respecto a los ejes $X'Y'$, obtenidos al girar los ejes XY en el ángulo θ.

25. $y^2 - x^2 = 1;\ \ \theta = 90°$.
26. $2xy = 1;\ \ \theta = 45°$.
27. $x^2 + xy + y^2 = 6;\ \ \theta = 45°$.
28. $x^2 + y^2 = 9;\ \ \theta = 30°$.
29. $x^2 - y^2 = 2;\ \ \theta = 90°$.
30. $3x^2 - 7xy + 3y^2 = 10;\ \ \theta = 45°$.
31. $y^2 - 5x - 2y - 5 = 0;\ \ \theta = 90°$.
32. $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 - 4 = 0;\ \ \theta = 60°$.
33. $7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 1;\ \ \theta = 30°$.
34. $5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1;\ \ \theta = -60°$.
35. $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0;\ \ \theta = 45°$.
36. $x^2 + 2xy + y^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{2}y - 5 = 0;\ \ \theta = 45°$.
37. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 14\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 118 = 0;\ \ \theta = 45°$.
38. $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 + 4\left(1 + 5\sqrt{3}\right)x + 4\left(\sqrt{3} - 5\right)y + 116 = 0;\ \ \theta = 60°$.
39. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y - 24 = 0;\ \ \theta = -60°$.

40. Considera los puntos $P(6,2)$ y $Q(-5,4)$. Encuentra la distancia entre ellos. Aplica una rotación de 45°. Llama P_1 y Q_1 a los puntos correspondientes a P y Q, después de la rotación. Calcula la distancia entre P_1 y Q_1. Compara esta distancia con la primera.

41. Prueba que las rectas $3x + y - 7 = 0$ y $x - 3y - 27 = 0$ son perpendiculares. Aplica una rotación de $60°$ y encuentra el ángulo entre las rectas obtenidas después de la rotación.
42. Encuentra la ecuación de la directriz de la parábola obtenida al girar $y^2 - 5x - 8y - 19 = 0$ en un ángulo de $30°$.
43. Aplica una rotación de $45°$ a la elipse $41x^2 - 18xy + 41y^2 - 800 = 0$ y encuentra las coordenadas de sus vértices en el nuevo sistema de coordenadas.
44. Aplica una rotación de $60°$ a la hipérbola cuya ecuación general es:

$$1679x^2 - 1250\sqrt{3}xy + 429y^2 + 12\left(960\sqrt{3} - 49\right)x - 12\left(960 + 49\sqrt{3}\right)y - 57060 = 0$$

y encuentra las coordenadas de sus focos en el nuevo sistema de coordenadas.

Ejercicios

Ecuación general de las cónicas

Veamos ahora cómo reconocer el lugar geométrico determinado por una ecuación de segundo grado en su forma general:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.} \tag{8.3}$$

Caso $B=0$. Traslación de ejes

A lo largo del libro hemos trabajado básicamente con ecuaciones de segundo grado que no tienen término en xy, es decir, el coeficiente B de la ecuación (8.3) es igual a 0. Esta condición caracteriza a las cónicas que tienen sus ejes paralelos a los ejes cartesianos. Con la ayuda de la traslación de los ejes coordenados, se obtuvieron las ecuaciones de las cónicas horizontales y verticales que tienen sus centros (elipses e hipérbolas) o sus vértices (parábolas) fuera del origen del sistema cartesiano.

Recordemos que si trasladamos un sistema XY a un sistema $X'Y'$ cuyo origen O' tiene coordenadas (h,k) en el sistema original XY, entonces las nuevas coordenadas (x',y') de cada punto P se relacionan con sus originales (x,y) por las fórmulas:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{aligned}} \tag{8.4}$$

Para reconocer qué cónica representa la ecuación general de segundo grado en las variables x y y, con $B = 0$, y determinar sus elementos principales, obtendremos a partir de dicha ecuación general la ecuación estándar, tal y como hicimos en los casos particulares analizados en las unidades correspondientes a cada una de las cónicas.

Por ejemplo, consideremos la ecuación:

$$\boxed{4x^2 - 40x + 9y^2 - 144y + 532 = 0.} \tag{8.5}$$

Completamos dos trinomios cuadrados perfectos: uno de ellos formado con los términos que contienen x y el segundo con los términos que contienen y; y dejamos el término independiente en el lado derecho. Así, escribimos:

$$\boxed{\begin{aligned}\left(4x^2-40x\qquad\right)+\left(9y^2-144y\qquad\right)&=-532\\ 4\left(x^2-10x+25\right)+9\left(y^2-16y+64\right)&=-532+100+576\\ 4\left(x-5\right)^2+9\left(y-8\right)^2&=144.\end{aligned}} \tag{8.6}$$

Finalmente, dividimos entre 144 y obtenemos la forma estándar de la ecuación:

$$\frac{4\left(x-5\right)^2}{144}+\frac{9\left(y-8\right)^2}{144}=1$$

$$\frac{\left(x-5\right)^2}{\frac{144}{4}}+\frac{\left(y-8\right)^2}{\frac{144}{9}}=1$$

$$\frac{\left(x-5\right)^2}{36}+\frac{\left(y-8\right)^2}{16}=1.$$

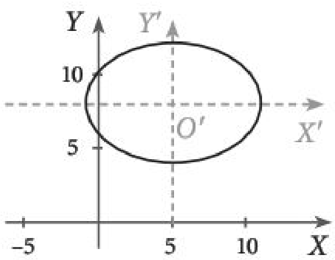


Figura 8.10

O sea, la ecuación representa una elipse horizontal con centro en $(5,8)$, con semiejes mayor y menor que valen $a=6$ y $b=4$, respectivamente.

Con la traslación de ejes:

$$\boxed{\begin{aligned}x'&=x-5\\ y'&=y-8\end{aligned}} \tag{8.7}$$

obtenemos un sistema $X'Y'$ cuyo origen es el centro de la elipse y con respecto al cual la ecuación de la elipse es (figura 8.10):

$$\frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{16}=1.$$

En general, si queremos encontrar la forma estándar de una ecuación del tipo:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

donde al menos uno de los dos coeficientes A o C es distinto de cero, procedemos como a continuación se indica:

- Si $A\neq 0$ y $C=0$, completamos dos trinomios cuadrados perfectos para llevarla a la forma:

$$\boxed{A\left(x-h\right)^2+C\left(y-k\right)^2=F'} \tag{8.8}$$

lo que nos permite identificarla como una elipse o una hipérbola, dependiendo de los signos de A, C y F', con centro en (h,k).

- Si $A \neq 0$ y $C = 0$, completamos el trinomio cuadrado perfecto con los términos que tienen x y obtenemos:

$$A(x-h)^2 = -Ey + F',$$

por lo que si $E \neq 0$, factorizamos E en el miembro derecho:

$$A(x-h)^2 = -E\left(y - \frac{F'}{E}\right),$$

de donde, llamando $k = \dfrac{F'}{E}$ tenemos:

$$A(x-h)^2 = -E(y-k),$$

así,

$$(x-h)^2 = -\frac{E}{A}(y-k)$$

y la identificamos como una parábola vertical con vértice en (h,k) y $4p = -\frac{E}{A}$.

- Si $A = 0$ y $C \neq 0$, completamos ahora el trinomio cuadrado perfecto con los términos que tienen y, procediendo de manera similar al caso anterior; obtenemos, finalmente, la parábola horizontal cuya ecuación es:

$$(y-k)^2 = -\frac{D}{C}(x+h).$$

Con $h = \frac{F'}{D}$ si $D \neq 0$ y para la cual $4p = -\frac{D}{C}$.

En todos los casos la traslación de ejes:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x-h \\ y' &= y-h \end{aligned}} \tag{8.9}$$

determina un sistema $X'Y'$ que tiene su origen en el centro o vértice de la cónica correspondiente.

Si $B = 0$ en la ecuación de segundo grado, lo que debemos hacer para encontrar la ecuación estándar es completar los cuadrados perfectos en las variables que aparezcan al cuadrado y dejar en el miembro izquierdo dichos cuadrados perfectos.

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A \neq 0$ y $C \neq 0$, corresponde a una elipse, si los signos de A y C son iguales, o una hipérbola si estos coeficientes tienen signo distinto.

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A \neq 0$ y $C = 0$, corresponde a una parábola vertical.

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $A = 0$ y $C \neq 0$, corresponde a una parábola horizontal.

Ejemplos

1. Identificar la cónica $x^2 - 8x + y^2 + 14y + 25 = 0$, dar sus elementos principales y la traslación de ejes que hace que su centro o vértice esté en el origen del nuevo sistema.

Solución:
Debemos completar 2 trinomios cuadrados perfectos: el primero con los términos que contienen x y el segundo con los términos que contienen y.

$$\left(x^2 - 8x \quad\right) + \left(y^2 + 14y \quad\right) = -25$$
$$\left(x^2 - 8x + 16\right) + \left(y^2 + 14y + 49\right) = -25 + 16 + 49$$
$$(x-4)^2 + (y+7)^2 = 40.$$

Esta es la forma estándar de un círculo con centro en $C(h,k)=C(4,-7)$ y radio $r=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. La traslación buscada es:

$$x'=x-h=x-4 \qquad y'=y-k=y+7.$$

2. Identificar la cónica $2x^2+20x+59-3y=0$, dar sus elementos principales y la traslación de ejes que hace que su centro o vértice esté en el origen del nuevo sistema.

Solución:
Completamos el cuadrado perfecto respecto a la variable que está al cuadrado:

$$2\left(x^2+10\quad\right)=3y-59$$
$$2\left(x^2+10x+25\right)=3y-59+50$$
$$2(x+5)^2=3(y-3),$$

y obtenemos la ecuación:

$$(x+5)^2=\frac{3}{2}(y-3)$$

que reconocemos como la ecuación estándar de la parábola vertical que abre hacia arriba con vértice:

$$V(h,k)=V(-5,3)$$

y $4p=\frac{3}{2}$. Entonces su foco es el punto:

$$F(h,k+p)=F\left(-5,3+\frac{3}{8}\right)=F\left(-5,\frac{27}{8}\right).$$

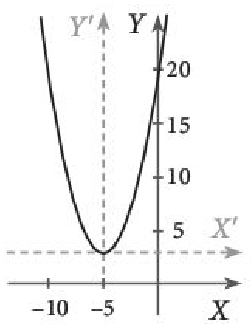


Figura 8.11

La directriz de la parábola es la recta:

$$y=k-p=3-\frac{3}{8}=\frac{21}{8}.$$

La traslación buscada es (figura 8.11):

$$x'=x-h=x+5 \qquad y'=y-k=y-3.$$

3. Identificar la cónica $4x^2-16x+y^2-8y-40=0$, dar sus elementos principales y la traslación de ejes que hace que su centro o vértice esté en el origen del nuevo sistema.

Solución:

Completamos los cuadrados perfectos respecto a las variables que están al cuadrado; en este caso, las dos variables x y y:

$$4x^2 - 16x + y^2 - 8y - 40 = 0$$
$$4\left(x^2 - 4x + 4\right) + \left(y^2 - 8y + 16\right) = 40 + 16 + 16$$
$$4\left(x-2\right)^2 + \left(y-4\right)^2 = 72$$
$$\frac{\left(x-2\right)^2}{18} + \frac{\left(y-4\right)^2}{72} = 1$$
$$\frac{\left(x-2\right)^2}{\left(3\sqrt{2}\right)^2} + \frac{\left(y-4\right)^2}{\left(6\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

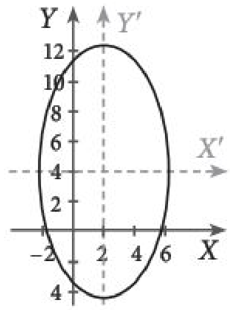


Figura 8.12

Identificamos esta ecuación como la estándar de una elipse vertical (figura 8.12), con centro en el punto:

$$C\left(h, k\right) = C\left(2, 4\right)$$

y semiejes $a = 6\sqrt{2}$ y $b = 3\sqrt{2}$. De donde:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{72 - 18} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Los focos de la elipse son:

$$F'\left(h, k-c\right) = F'\left(2, 4 - 3\sqrt{6}\right) \approx F'\left(2, -3.35\right),$$
$$F\left(h, k+c\right) = F\left(2, 4 + 3\sqrt{6}\right) \approx F\left(2, 11.35\right).$$

Entonces:

$$\frac{a^2}{c} = \frac{\left(6\sqrt{2}\right)^2}{3\sqrt{6}} = \frac{72}{3\sqrt{6}} = 4\sqrt{6}$$

y, por consiguiente, las directrices son las rectas:

$$y = k - \frac{a^2}{c} \qquad \text{y} \qquad y = k + \frac{a^2}{c}$$
$$y = 4 - 4\sqrt{6} \qquad\qquad y = 4 + 4\sqrt{6}$$
$$y = 4\left(1 - \sqrt{6}\right) \qquad\qquad y = 4\left(1 + \sqrt{6}\right)$$

asociadas a los focos F' y F, respectivamente.

La traslación de ejes que coloca el origen del nuevo sistema de coordenadas en el centro de la elipse es:

$$x' = x - 2 \qquad\qquad y' = y - 4.$$

4. Traslada los ejes de coordenadas para que la cónica $3x^2 - 9x + y - 6 = 0$ quede colocada de manera que su centro o vértice sea el origen del nuevo sistema de coordenadas y encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.

Solución:
Completamos el cuadrado perfecto respecto a la única variable que está al cuadrado (x):

$$3\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + y = 6 + \frac{27}{4}$$
$$3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y = 6 + \frac{27}{4}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -y + \frac{51}{4}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{3}\left(y - \frac{51}{4}\right). \qquad (8.10)$$

Reconocemos esta como la ecuación estándar de la parábola vertical que abre hacia abajo, con vértice:

$$V(h,\ k) = V\left(\frac{3}{2},\ \frac{51}{4}\right),$$

y $4p = \frac{1}{3}$ (figura 8.13).

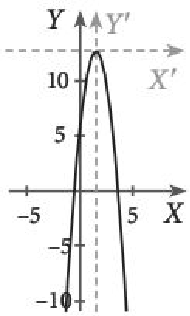


Figura 8.13

El foco es:

$$F(h, k - p) = \left(\frac{3}{2}, \frac{51}{4} - \frac{1}{12}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{38}{3}\right)$$

y la directriz es:

$$y = k + p = \frac{51}{4} + \frac{1}{12} = \frac{77}{6}.$$

La traslación buscada es:

$$x' = x - \frac{3}{2}$$
$$y' = y - \frac{51}{4}.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación (8.10) obtenemos la ecuación en el nuevo sistema $X'Y'$:

$$x'^2 = -\frac{1}{3}y'.$$

Pensamiento crítico

Si en la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, $A = C = 0$ y al menos uno de los coeficientes D o E es distinto de cero, ¿qué representa la ecuación?

Ejemplos

Ejercicios

1. Identifica la cónica $4x^2 - 16x + y^2 - 8y + 8 = 0$ y da sus elementos principales.
2. Identifica la cónica $5x^2 - 4y^2 + 30x + 56y - 251 = 0$ y dar sus elementos principales. Traslada los ejes de coordenadas para que su centro quede colocado en el origen del nuevo sistema de coordenadas. Encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.
3. Da los elementos principales de la parábola $7y^2 + 12x - 112y + 508 = 0$ y la traslación de ejes que haga que su vértice sea el origen del nuevo sistema de coordenadas. Encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.
4. Traslada los ejes de coordenadas para que la cónica $2x^2 + y^2 + 24x + 4y + 64 = 0$ quede colocada de manera que su centro sea el origen del nuevo sistema de coordenadas y encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.
5. Traslada los ejes de coordenadas para que la cónica $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 8 = 0$ quede colocada de manera que su centro sea el origen del nuevo sistema de coordenadas y encuentra la ecuación correspondiente en dicho sistema.

Caso $B \neq 0$. Rotación de ejes

Cuando en la ecuación general de la cónica:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.} \tag{8.11}$$

hay término en xy, es decir $B \neq 0$, lo que hay que hacer es girar los ejes cartesianos XY un ángulo θ adecuado para escribir la cónica respecto a un nuevo sistema cartesiano $X'Y'$, girado respecto al original, de manera que la nueva ecuación ya no tenga término en xy y podamos llevarla a la forma estándar en ese sistema.

El ejemplo más sencillo de ecuación de segundo grado con $B \neq 0$ es $xy = 1$, que como ya vimos representa una hipérbola con centro en el origen y cuyos ejes se obtienen al girar 45° en sentido positivo los ejes cartesianos XY.

Consideremos la cónica determinada por la ecuación de segundo grado (8.11), en la que suponemos que $B \neq 0$.

Si giramos los ejes un ángulo θ y sustituimos los valores de x y y de acuerdo con las ecuaciones (8.2):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}} \tag{8.12}$$

en la ecuación (8.11) obtenemos:

$$\boxed{\begin{gathered} A\left(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta\right)^2 + B\left(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta\right)\left(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta\right) \\ +C\left(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta\right)^2 + D\left(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta\right) \\ +E\left(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta\right) + F = 0. \end{gathered}} \tag{8.13}$$

Desarrollamos estos productos y agrupamos, y tenemos una ecuación de la forma:

$$\boxed{A'\left(x'\right)^2+B'x'y'+C'\left(y'\right)^2+D'x'+E'y'+F=0} \tag{8.14}$$

donde A', B', C', D', E' y F' son números que dependen de θ y de los coeficientes originales.

De momento, el único valor que nos interesa es el de B'. Los términos en $x'y'$ aparecen en los 3 primeros términos del lado izquierdo de la ecuación (8.13). Al hacer las operaciones, obtenemos:

$$\begin{aligned} B' &= -2A\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta+B\left(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\,\theta\right)+2C\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ &= B\left(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\,\theta\right)-\left(A-C\right)2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ &= B\cos 2\theta-\left(A-C\right)\mathrm{sen}\,2\theta. \end{aligned}$$

Lo que deseamos es que no haya término en $x'y'$ en la nueva ecuación (8.14); entonces, necesitamos que $B'=0$, así que debemos tener:

$$B\cos 2\theta-\left(A-C\right)\mathrm{sen}\,2\theta=0.$$

Para encontrar el valor de θ que resuelve la ecuación anterior, hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} B\cos 2\theta-\left(A-C\right)\mathrm{sen}\,2\theta&=0 \\ B\cos 2\theta&=\left(A-C\right)\mathrm{sen}\,2\theta \\ \frac{\cos 2\theta}{\mathrm{sen}\,2\theta}&=\frac{A-C}{B}, \end{aligned}$$

y obtenemos:

$$\boxed{\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}.} \tag{8.15}$$

Con ayuda de una calculadora podemos encontrar el valor de $0°<\theta<90°$ que resuelve esta ecuación, y luego el de $\mathrm{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$. Sustituimos estos valores en (8.13) y obtenemos la ecuación:

$$A'\left(x'\right)^2+C'\left(y'\right)^2+D'x'+E'y'+F=0$$

que ya no tiene término en $x'y'$.

En la práctica lo que hacemos es:

- Resolver la ecuación (8.15):

$$\boxed{\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}.} \tag{8.16}$$

- Calcular los valores de $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.
- Sustituir estos valores en las ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta. \end{aligned}} \tag{8.17}$$

- Finalmente, sustituir los valores de x y y en la ecuación original (8.11) y agrupar los términos semejantes.

Ejemplos

1. Eliminar, mediante una rotación de ejes, el término xy en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 4$. Determinar el tipo de cónica y encontrar sus elementos principales.

Solución:

Sustituimos los valores de $A = 1$, $B = -1$ y $C = 1$ en la ecuación (8.16):

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Así buscamos un ángulo $0° < \theta < 90°$ tal que la cotangente de 2θ vale 0; así que $2\theta = 90°$ y, por tanto, $\theta = 45°$. Como:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tenemos que al sustituir estos valores en (8.12), obtenemos:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación original $x^2 - xy + y^2 = 4$, se tiene:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 = 4.$$

Efectuamos las operaciones y simplificamos:

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{3}{2}(y')^2 = 4,$$

dividimos entre el término independiente para escribirla en la forma simétrica:

$$\frac{(x')^2}{8} + \frac{(y')^2}{\frac{8}{3}} = 1.$$

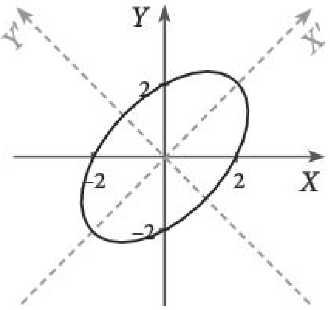


Figura 8.14

Reconocemos que es una elipse horizontal con centro en el origen $(h', k') = (0, 0)$, radio mayor $a = \sqrt{8}$ y radio menor $b = \sqrt{\frac{8}{3}}$. De donde:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = 4\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Las coordenadas de los focos de la elipse en el sistema $X'Y'$ son:

$$F'(h' - c, 0) = F'\left(0 - 4\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) = F'\left(-4\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) \approx F'(-2.31, 0) \text{ y}$$

$$F(h' + c, 0) = F\left(0 + 4\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) = F\left(4\sqrt{\frac{1}{3}}, 0\right) \approx F(2.31, 0).$$

Sus coordenadas en el sistema XY se encuentran con las fórmulas:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Así, tenemos que las coordenadas de los focos en el sistema XY son:

$$F'\left(\frac{-4}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{-4}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}\right), \qquad F\left(4\sqrt{\frac{1}{3}}, 4\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Por otra parte, como:

$$\frac{a^2}{c} = \frac{\left(\sqrt{8}\right)^2}{4\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$$

las directrices son las rectas que en el sistema $X'Y'$ tienen las siguientes ecuaciones:

$$x' = h' - \frac{a^2}{c} \quad \text{y} \quad x' = h' + \frac{a^2}{c}$$

$$x' = -2\sqrt{3} \qquad x' = 2\sqrt{3};$$

la primera está asociada al foco F' y la segunda a F.

Sus ecuaciones en el sistema XY se obtienen usando las fórmulas (8.1) con $\theta = 45°$:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y' &= -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}. \end{aligned}} \qquad (8.18)$$

Con las que obtenemos:

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$$

o sea,

$$x+y=-2\sqrt{6} \qquad \text{y} \qquad x+y=2\sqrt{6}.$$

2. Identificar la cónica degenerada $16x^2+24xy+9y^2-20x-15y-150=0$.

Solución:
Sustituimos los valores $A=16$, $B=24$ y $C=9$ en la ecuación (8.16):

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{16-9}{24}=\frac{7}{24}.$$

En lugar de usar la calculadora, observemos que 2θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 7 y 24. Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa vale 25 (figura 8.15), así que:

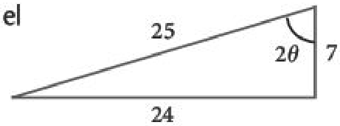


Figura 8.15

$$\cos 2\theta=\frac{7}{25}.$$

Utilizamos las fórmulas del coseno y del seno de medio ángulo y llegamos a:

$$\operatorname{sen}\theta=\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\frac{3}{5} \qquad \cos\theta=\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}}=\frac{4}{5}.$$

Sustituimos estos valores en (8.12):

$$x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y' \qquad y=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'$$

y, ahora en la ecuación original:

$$16\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'\right)^2+24\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'\right)\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'\right)+9\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'\right)^2$$

$$-20\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'\right)-15\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'\right)-150=0.$$

Después de simplificar, obtenemos:

$$(x')^2-x'-6=0.$$

Esta ecuación de segundo grado no tiene término $x'y'$, por lo que procedemos como antes, es decir, completamos el cuadrado de los términos en x':

$$\begin{aligned}(x')^2 - x' &= 6\\ (x')^2 - x' + \frac{1}{4} &= 6 + \frac{1}{4}\\ \left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4}\\ \left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} &= 0\\ \left(\left(x' - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{2}\right)\left(\left(x' - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Esta ecuación no representa a una cónica, pues no tiene término en y'.

Despejamos x' y obtenemos:

$$x' - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = 0 \quad \text{o} \quad x' - \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 0,$$

es decir,

$$x' = 3 \quad \text{o} \quad x' = -2$$

que son las ecuaciones de dos rectas verticales en el plano $X'Y'$. Como los ejes $X'Y'$ se obtuvieron al hacer girar los ejes en un ángulo $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 37°$, estas rectas están inclinadas el mismo ángulo, con respecto a los ejes XY (figura 8.16).

Este es un caso de cónica degenerada.

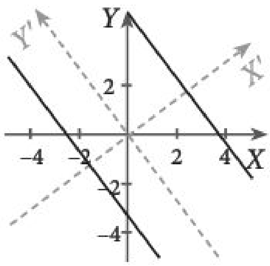


Figura 8.16

Ejemplos

Discriminante de la ecuación general

Hemos visto que si a una ecuación general de segundo grado:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{8.19}$$

le aplicamos las fórmulas de rotación de los ejes (8.2):

$$\begin{aligned}x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta\\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta,\end{aligned}$$

obtenemos:

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

y que, para un ángulo θ adecuado, podemos lograr que el coeficiente B' de $x'y'$ valga cero. Una vez hecho esto, podemos identificar de qué cónica se trata y cuáles son sus elementos.

Queremos ver ahora que es posible identificar la cónica dada por la ecuación (8.19), sin tener que hacer en cada caso todos los cálculos antes mencionados. Para ello definimos el número:

$$\boxed{B^2 - 4AC} \tag{8.20}$$

que se llama el *discriminante* de la ecuación (8.19).

Mediante el uso de relaciones e identidades trigonométricas es posible probar que el discriminante es invariante bajo rotaciones; esto es, se puede demostrar el siguiente resultado:

Si:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una ecuación general de segundo grado y:

$$A'(x')^2 + B'x'y' + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

es la ecuación resultante después de aplicar la rotación:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta, \end{aligned}$$

entonces:

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC.$$

El discriminante nos sirve para saber qué tipo de cónica representa la ecuación (8.19).

Hemos visto ya que podemos elegir θ de manera que desaparezca el término en xy, es decir, podemos lograr una rotación que nos lleve a una ecuación de la forma:

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$

Por el resultado, tenemos que el discriminante de la cónica es:

$$\text{discriminante} = -4A'C'$$

y sabemos que la ecuación:

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

El discriminante de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es $B^2 - 4AC$.

El número $A + C$ obtenido a partir de la ecuación general de segundo grado $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se llama la *traza* y es también invariante bajo rotaciones.

¡Cuidado! En la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para determinar el tipo de cónica, no basta con analizar los signos de A y C, por ejemplo, en la ecuación $3x^2 + 8xy + 4y^2 - 9x + 4y - 5 = 0$, $A, C \neq 0$ y tienen el mismo signo, pero la ecuación no corresponde a una elipse; utilizando el discriminante sabemos que es una hipérbola.

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a una elipse si $B^2 - 4AC < 0$.

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ corresponde a una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.

es una elipse cuando A' y C' tienen el mismo signo, es decir, $-4A'C' < 0$; es una hipérbola cuando A' y C' tienen signo contrario, es decir, $-4A'C' > 0$; y es una parábola si alguno de los dos coeficientes A' o C' vale cero, así que, en este caso, $-4A'C' = 0$.

Hemos probado que si:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es la ecuación de una cónica, entonces:

- Es una elipse cuando $B^2 - 4AC < 0$.
- Es una hipérbola cuando $B^2 - 4AC > 0$.
- Es una parábola cuando $B^2 - 4AC = 0$.

Ejercicios

Determina la transformación que debe aplicarse, en cada caso, para eliminar el término en xy.

1. $xy = 3$.
2. $9x^2 + 24xy + 2y^2 + 75x - 40y - 194 = 0$.
3. $8x^2 + 8xy + 2y^2 - 3x - 7y - 5 = 0$.
4. $2x^2 - 5xy + 2y^2 + 8x + 6y - 10 = 0$.
5. $4xy + 3x^2 = 5$.
6. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 156x - 65y = 0$.

Analiza el discriminante y di si la ecuación dada representa una parábola, elipse o hipérbola.

7. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8x - 8y = 0$.
8. $-x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 14y + 39 = 0$.
9. $5x^2 + 4y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$.
10. $x^2 - 2xy + 8y^2 - 12x - 64y + 148 = 0$.
11. $3xy - 2x + y - 1 = 0$.
12. $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$.
13. $xy - 20 = 0$.
14. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 10y - 1 = 0$.

En cada caso, aplica la transformación adecuada para eliminar el término xy, determina el tipo de cónica y dibújala.

15. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 8\left(1 - 2\sqrt{3}\right)x + 8\left(\sqrt{3} + 2\right)y + 64 = 0$.
16. $11x^2 + 122xy + 11y^2 + 366\sqrt{2}x + 66\sqrt{2}y - 1602 = 0$.
17. $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 114\sqrt{2}x + 66\sqrt{2}y + 450 = 0$.
18. $27x^2 - 18\sqrt{3}xy + 9y^2 + 12\left(2 - 9\sqrt{3}\right)x + 12\left(9 + 2\sqrt{3}\right)y + 244 = 0$.

Pensamiento crítico

¿Qué puedes decir de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = C \neq 0$ tienen el mismo signo que F y $B = D = E = 0$?

Pensamiento crítico

¿Qué cónica representa la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando $A = C$ tienen signo opuesto al de F y $B = D = E = 0$?

Resolución de problemas

Lugares geométricos

Veamos algunos ejemplos de lugares geométricos.

1. Encontrar el lugar geométrico formado por los puntos tales que su distancia al punto $Q(-2,1)$ es igual a la mitad de su distancia a la recta $x-y-4=0$.

   Solución:

   Llamemos $P(x,y)$ a un punto de dicho lugar geométrico y ℓ a la recta $x-y-4=0$.

   Las condiciones del problema nos dicen que

$$\boxed{d(P,Q)=\frac{1}{2}d(P,\ell).} \tag{8.21}$$

La distancia de P a Q es:

$$\boxed{d(P,Q)=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+4x+4+y^2-2y+1}.} \tag{8.22}$$

La distancia de P a ℓ es:

$$\boxed{d(P,\ell)=\frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}}.} \tag{8.23}$$

Sustituyendo (8.21) y (8.22) en (8.23), obtenemos:

$$\sqrt{x^2+4x+4+y^2-2y+1}=\frac{1}{2}\ \frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x^2+4x+y^2-2y+5}=\frac{1}{2}\ \frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}}\quad .$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado y simplificamos:

$$8\left(x^2+4x+y^2-2y+5\right)=(x-y-4)^2$$

$$8x^2+8y^2+32x-16y+40=x^2-2xy+y^2-8x+8y+16$$

$$7x^2+2xy+7y^2+40x-24y+24=0.$$

Para determinar qué tipo de cónica es, calculamos el discriminante:

$$B^2-4AC=2^2-4(7)(7)=4(1-49)<0.$$

Como el discriminante es negativo, se trata de una elipse.

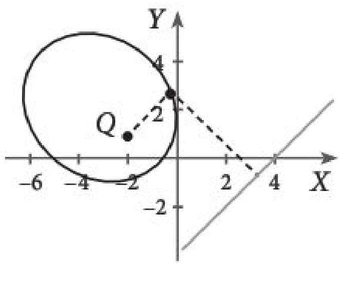


Figura 8.17

2. Consideremos el triángulo con vértices $P(x, y)$, $Q(0,1)$ y $R(1,1)$. ¿Sobre qué cónica se mueve $P(x, y)$ si se desplaza de modo tal que la suma de las pendientes de los lados PQ y PR es 3?

Solución:

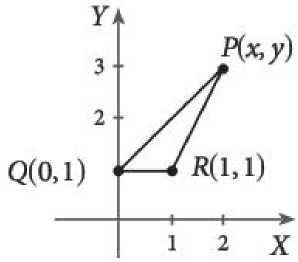


Figura 8.18

Encontramos, primero, las pendientes de los lados del triángulo:

$$\text{pendiente del lado } PQ: \frac{y-1}{x},$$

$$\text{pendiente del lado } PR: \frac{y-1}{x-1}.$$

Según las condiciones del problema, debe cumplirse:

$$\frac{y-1}{x}+\frac{y-1}{x-1}=3,$$

simplificando, tenemos:

$$\frac{(y-1)(x-1)+(y-1)x}{x(x-1)}=3$$

$$(y-1)(x-1)+(y-1)x=3x(x-1)$$

$$(y-1)(x-1+x)=3x^2-3x$$

$$-3x^2+2yx+x-y+1=0.$$

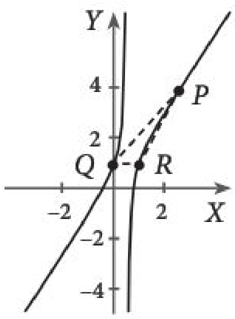


Figura 8.19

Para saber qué tipo de cónica representa la ecuación, calculamos el discriminante:

$$B^2-4AC=2^2-4(-3)(0)=4>0.$$

Así, P se mueve sobre una hipérbola.

Ejercicios

1. Encuentra el lugar geométrico formado por los puntos tales que su distancia al punto $Q(5,2)$ es igual a tres medios de su distancia a la recta $4x+2y+10=0$.
2. Encuentra el lugar geométrico formado por los puntos tales que su distancia al punto $Q(-3,-7)$ es igual a su distancia a la recta $5x-3y+9=0$.
3. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan del círculo cuya ecuación es $x^2+y^2-2x+10y-10=0$ y de la recta $2x-y+3=0$.

Mundo virtual

Geolab

1. **Traslaciones.** Construye la cónica W cuya ecuación es: $16x^2+25y^2-32x+150y-159=0$. Para ello, utiliza el constructor *Cónica calculada*. En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón donde está la cónica y oprime el botón *Datos*. Observa que la pantalla indica que el centro de la cónica está en $(1,-3)$. Construye una traslación que manda el punto $(1,-3)$ al origen, para ello define los puntos $C(1,-3)$ y $O(0,0)$ y después, define la traslación, T, que manda el punto C al punto O. Construye la cónica trasladada S indicando que es la imagen de W bajo la transformación T. ¿Qué ecuación tiene S? Comprueba que esta ecuación es la misma que obtienes si haces el cambio de variables $x=x'-1;\ y=y'+3$ en la ecuación original.
2. **Traslaciones.** Haz un ejercicio similar al anterior pero con la ecuación $y^2-8y-4x+8=0$, correspondiente a una parábola. Construye la traslación que manda el vértice de la parábola al origen.
3. **Rotaciones.** Construye la cónica, Q cuya ecuación es $\frac{43}{4}x^2-\frac{7}{2}\sqrt{3}xy+\frac{57}{4}y^2-144=0$. Para ello, utiliza el constructor *Cónica calculada*. En la pantalla de datos analíticos, coloca el cursor sobre el renglón donde está la cónica y oprime el botón *Datos*. Observa que la pantalla indica que el centro de la cónica está en el origen y el ángulo que tiene respecto al eje x es 0.523599 radianes. Construye una rotación, R, con centro en el origen y ángulo igual a -0.523599 radianes. Para ello, define el punto $O(0,0)$ y el ángulo $a=-0.523599$ radianes y luego construye la rotación. Construye la cónica girada U indicando que es la imagen de Q bajo la transformación R. ¿Qué ecuación tiene U?, ¿la ecuación tiene término xy?, ¿qué ángulo tiene respecto al eje X? El ángulo 0.523599 radianes es igual a 30°. Comprueba que obtienes la misma ecuación si haces el cambio de variables:

$$x=x'\cos 30°-y'\operatorname{sen} 30°,$$

$$y=x'\operatorname{sen} 30°+y'\cos 30°.$$

Geolab

4. **Rotaciones y traslaciones.** Construye la cónica $5x-2y+xy-11=0$. Siguiendo las ideas del ejercicio 3, gira la cónica para que sus ejes queden paralelos a los ejes cartesianos y, después, trasládala para que su centro quede en el origen de coordenadas.
5. **Rotaciones y traslaciones.** Usa la misma cónica que en el ejercicio anterior, pero ahora traslada primero el centro de la cónica al origen y después gírala para que sus ejes coincidan con los ejes de coordenadas. ¿Usaste las mismas rotaciones y traslaciones que en el ejercicio 4?

Resumen de la unidad

- Fórmulas de rotación de los ejes:

$$x' = x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta,$$
$$y' = -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

- Para analizar la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ con $B\neq 0$, se procede de la siguiente manera:
  - Se resuelve la ecuación:

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}.$$

  - Se encuentran $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.
  - Se sustituyen estos valores en las ecuaciones:

$$x = x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta,$$
$$y = x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta.$$

  - Finalmente, se sustituyen los valores de x y y en la ecuación original y se agrupan los términos semejantes.

- Si $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ es la ecuación de una cónica, entonces:

  - Cuando $B^2-4AC<0$, se trata de una elipse.
  - Cuando $B^2-4AC>0$, se trata de una hipérbola.
  - Cuando $B^2-4AC=0$, se trata de una parábola.

Ejercicios de repaso

En cada caso, aplica la transformación adecuada para eliminar el término xy, y determina el tipo de cónica.

1. $109x^2 + 70\sqrt{3}xy + 39y^2 + 24\left(1 - 18\sqrt{3}\right)x - 24\left(\sqrt{3} + 18\right)y + 1296 = 0.$
2. $3x^2 - 5xy - 9y^2 + 32x - 161 = 0.$
3. Considera la ecuación $kx^2 + 5xy + 3y^2 - 6x + 3y - 15 = 0$. Dependiendo de k, determina qué tipo de cónica representa.
4. Traslada los ejes de coordenadas para que el punto de intersección de las rectas $6x + 4y + 2 = 0$ y $-x + 5y - 23 = 0$ sea el origen del nuevo sistema de coordenadas, y encuentra las ecuaciones correspondientes en dicho sistema.
5. Encuentra la ecuación de la cónica en la que se encuentran los puntos que satisfacen la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$ y di qué tipo de cónica es. Sugerencia: eleva dos veces al cuadrado.
6. Encuentra las coordenadas de los vértices de la elipse $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0.$
7. Encuentra las coordenadas de los focos de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 + 24xy - 6y^2 + 4x + 48y + 34 = 0.$

Autoevaluación

1. Encuentra la ecuación de la recta $3x+2y-1=0$ con respecto a los ejes $X'Y'$, obtenidos al girar los ejes XY un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes.
   a. $\left(2+3\sqrt{3}\right)x'+\left(-3+2\sqrt{3}\right)y'-2=0.$
   b. $\left(-2+3\sqrt{3}\right)x'+\left(3+2\sqrt{3}\right)y'-2=0.$
   c. $\left(3+2\sqrt{3}\right)x'+\left(2-3\sqrt{3}\right)y'-2=0.$
   d. $\left(-3+2\sqrt{3}\right)x'+\left(2-3\sqrt{3}\right)y'-2=0.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 409.

2. Encuentra la ecuación de la cónica $xy-1=0$ con respecto a los ejes $X'Y'$, obtenidos al girar los ejes XY un ángulo de 45°.
   a. $(x')^2-(y')^2-1=0.$
   b. $-(x')^2+(y')^2-2=0.$
   c. $(x')^2-(y')^2-2=0.$
   d. $-(x')^2+(y')^2-1=0.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 409.

3. Traslada los los ejes cartesianos de manera que el centro del círculo $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ quede en el origen y encuentra la ecuación del círculo respecto al nuevo sistema de coordenadas.
   a. $(x')^2+(y')^2-12=0.$
   b. $(x')^2+(y')^2-25=0.$
   c. $(2x')^2+(3y')^2-1=0.$
   d. $(x')^2+(y')^2-1=0.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 413.

4. ¿Qué ángulo forma el eje mayor de la cónica $41x^2+18xy+41y^2-132\sqrt{2}x-68\sqrt{2}y-568=0$ con el eje X?
   a. $\frac{\pi}{2}$.
   b. 0.
   c. $\frac{\pi}{4}$.
   d. $\frac{\pi}{3}$.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 419.

5. Analiza el discriminante para determinar qué tipo de cónica es $x^2+5xy+y^2+4x-y+10=0$.
   a. Elipse.
   b. Hipérbola.
   c. Círculo.
   d. Parábola.

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 424.

6. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos tales que su distancia a la recta $x=5$ es igual a tres veces su distancia al punto $(1,0)$.
   a. $8x^2+9y^2-8x-16=0.$
   b. $2x^2+3y^2+4x-22=0.$
   c. $9x^2+9y^2-17x+4=0.$
   d. $8x^2-y^2-88x+224=0.$

   En caso de que tu respuesta sea incorrecta, consulta la página 427.

Heteroevaluación

1. Encuentra la ecuación de la parábola $(y-1)^2 = 8(x-2)$ respecto al sistema que se obtiene al girar los ejes un ángulo de 60°.

2. Encuentra la ecuación que se obtiene al aplicar la transformación adecuada para eliminar el término xy en la ecuación $34\sqrt{2}x^2 - 32\sqrt{2}xy + 34\sqrt{2}y^2 - 384x + 816y + 1998\sqrt{2} = 0$, e identifica la cónica en el nuevo sistema de coordenadas.

3. Determina el tipo de cónica que representa la ecuación $5x^2 - 9xy + 4y^2 - 10x - 7y - 20 = 0$.

Reloj solar del escultor polaco Grzegorz Kowalsky.

Apéndice

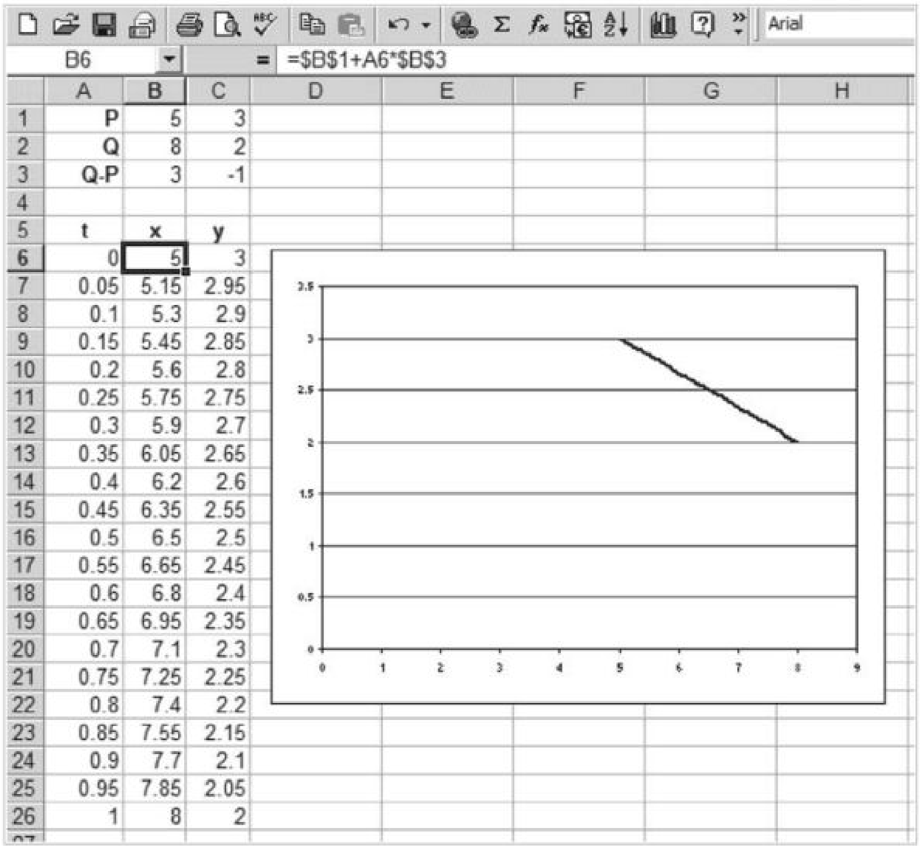
Uso de una hoja de cálculo para hacer gráficas

Las ecuaciones paramétricas de las curvas son sumamente útiles cuando se quiere trazar una curva utilizando una computadora. Todos los programas gráficos las utilizan, aunque no nos demos cuenta. La mayor parte de las figuras de este libro están construidas usando ecuaciones paramétricas. El Geolab, el programa encartado en este libro, también traza las curvas de esta manera.

Para entender mejor cómo funcionan estos programas, usaremos una hoja de cálculo electrónica (Excel, OpenOffice, StarOffice, etcétera) para trazar curvas utilizando ecuaciones paramétricas.

Ecuaciones paramétricas de un segmento

Empezaremos trazando el segmento que une los puntos $P(5,3)$ y $Q(8,2)$. El resultado final debe ser similar a la figura A.1.



B6 = =$B$1+A6*$B$3

	A	B	C
1	P	5	3
2	Q	8	2
3	Q-P	3	-1
4			
5	t	x	y
6	0	5	3
7	0.05	5.15	2.95
8	0.1	5.3	2.9
9	0.15	5.45	2.85
10	0.2	5.6	2.8
11	0.25	5.75	2.75
12	0.3	5.9	2.7
13	0.35	6.05	2.65
14	0.4	6.2	2.6
15	0.45	6.35	2.55
16	0.5	6.5	2.5
17	0.55	6.65	2.45
18	0.6	6.8	2.4
19	0.65	6.95	2.35
20	0.7	7.1	2.3
21	0.75	7.25	2.25
22	0.8	7.4	2.2
23	0.85	7.55	2.15
24	0.9	7.7	2.1
25	0.95	7.85	2.05
26	1	8	2

Figura A.1

1. En el renglón 1 ponemos las coordenadas del punto $P(5,3)$.
2. En el renglón 2 ponemos las coordenadas del punto $Q(8,2)$.
3. Como la ecuación de la recta es $P+t(Q-P)$, necesitamos las coordenadas de $(Q-P)$, que ponemos en el renglón 3. Para ello, en la celda **B3** ponemos la

fórmula =**B2–B1**, y la copiamos en la celda **C3**. Observa que en esta queda la fórmula =**C2–C1**. Una de las características más útiles de las hojas de cálculo es que, cuando se copian fórmulas, se hace con direcciones relativas (a menos que explícitamente digamos lo contrario). En la fórmula **=B2–B1** realmente lo que queremos decir es "suma las dos celdas de arriba".

4. Escribimos los encabezados de las columnas *t*, *x* y *y* en el renglón 5. Queremos trazar el segmento de P a Q marcando 21 puntos del segmento y uniéndolos mediante un trazo continuo. (En el caso de la recta, bastaría dar los puntos P y Q, pero queremos hacer esta construcción de manera que nos sirva para cualquier curva). Para esto usamos 21 valores del parámetro, partiendo de 0, que difieren en $\frac{1}{20}$.
5. Escribimos 0 en la celda **A6**.
6. Escribimos la fórmula **=A6+(1/20)** en la celda **A7** y copiamos esta fórmula en las celdas **A8** a **A26**. Observa cómo cambia la fórmula en cada una, ya que en realidad lo que dice la fórmula es "suma (1/20) a la celda que está arriba". Estos números son los valores que tomará el parámetro t desde 0 hasta 1.
7. En la columna x queremos poner los valores que toma x cuando t adquiere valores entre 0 y 1. Es decir, cuando toma los valores que construimos en el paso anterior. De acuerdo con el ejemplo, la fórmula de x es $x(t) = 5 + 3t$, es decir, la primera coordenada de P más t veces la primera coordenada de $(Q - P)$. Estas coordenadas ya las tenemos en las celdas **B2** y **B3**. Así que escribimos en la celda **B6** la fórmula **=B1+A6*B3**. Nota que esta fórmula tiene un problema, ya que si la copiamos en la celda de abajo, **B7**, los índices cambian y quedan =**B2+A7*B4**, pero nosotros no queremos esto, pues deseamos seguir manteniendo los valores **B2** y **B3**, para ello corregimos la fórmula de la siguiente manera:
8. Ponemos el cursor, estando en **B6**, en la ventana de edición, encima de los caracteres **B1**, y oprimimos la tecla F4. Esto hace que cambie **B1** por **$B$1**, lo que quiere decir que la dirección **B1** no se mueve cuando copiamos la fórmula.
9. Hacemos lo mismo con **B3**: ponemos el cursor encima de los caracteres **B3** y oprimimos F4. La fórmula final debe quedar **=$B$1+A6*$B$3**. Observa en la figura A.1 que el cursor está en la celda **B6** y en la ventana de edición se encuentra la fórmula correcta.
10. Copiamos el contenido de **B6** en las celdas **B7** a **B26**.
11. En **C6** escribimos la fórmula **$C$1+A6*$C$3** y copiamos **C6** en **C7** a **C26**.
12. Para hacer la gráfica, marcamos el rectángulo desde **B6** hasta **C26** y oprimimos el botón de *Asistente para gráficos*.
13. Elegimos la gráfica **XY (Dispersión)** y el subtipo Dispersión con puntos de datos conectados con líneas suavizadas (ver figura A.2) y debemos obtener una gráfica similar a la mostrada en la figura A.1.
14. Guardamos la hoja de cálculo para utilizarla posteriormente con otras curvas.
15. Modifica las coordenadas de los puntos P y Q que están en las celdas **B1**, **C1** y **B2**, **C2** y observa cómo cambia la gráfica del segmento.

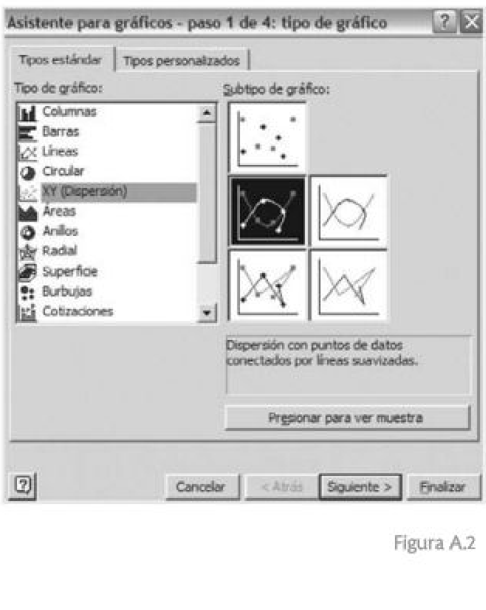


Figura A.2

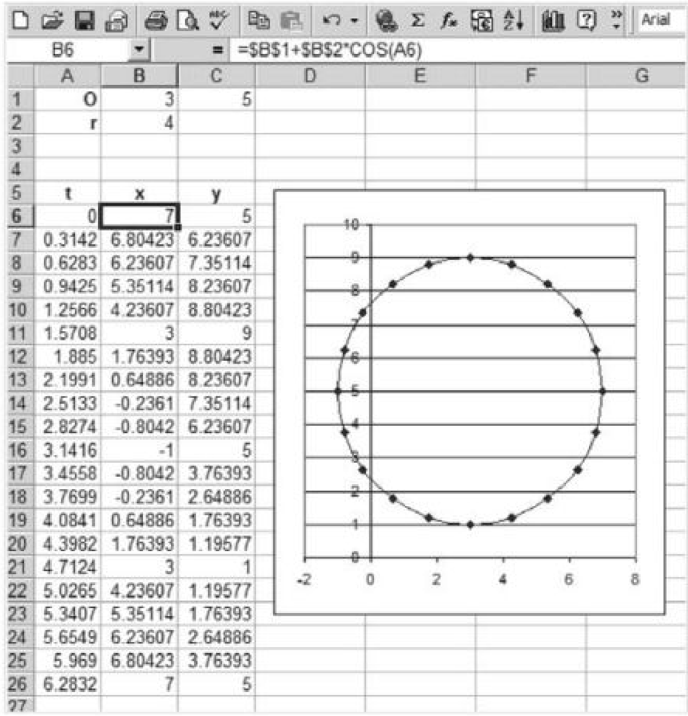
Ecuaciones paramétricas del círculo

Usaremos las ecuaciones:

$$x(t) = h + r\cos t$$
$$y(t) = k + r\operatorname{sen} t,$$

en las que $O(h,k)$ es el centro del círculo y r es su radio.

Trazar el círculo con centro en O(3,5) y radio r=4. Procedemos como en el ejercicio del segmento. De hecho, podemos usar la misma hoja, modificando algunos de los valores.



	A	B	C
1	O	3	5
2	r	4	
3			
4			
5	t	x	y
6	0	7	5
7	0.3142	6.80423	6.23607
8	0.6283	6.23607	7.35114
9	0.9425	5.35114	8.23607
10	1.2566	4.23607	8.80423
11	1.5708	3	9
12	1.885	1.76393	8.80423
13	2.1991	0.64886	8.23607
14	2.5133	-0.2361	7.35114
15	2.8274	-0.8042	6.23607
16	3.1416	-1	5
17	3.4558	-0.8042	3.76393
18	3.7699	-0.2361	2.64886
19	4.0841	0.64886	1.76393
20	4.3982	1.76393	1.19577
21	4.7124	3	1
22	5.0265	4.23607	1.19577
23	5.3407	5.35114	1.76393
24	5.6549	6.23607	2.64886
25	5.969	6.80423	3.76393
26	6.2832	7	5
27			

Figura A.3

1. Ponemos en el primer renglón las coordenadas del punto $O(3,5)$. En el segundo renglón ponemos el valor del radio r.
2. Escribimos 0 en la celda **A6**.
3. Escribimos la fórmula **=A6+(1/20)*2*PI()** en la celda **A7**, ya que ahora queremos que t tome 21 valores en el intervalo $[0,2\pi]$, para lo cual dividimos este intervalo en 20 subintervalos iguales.
4. La fórmula para $x(t)$ que escribimos ahora en la celda **B6** es **=$B$1+$B$2*COS(A6)**, pues en **B1** está la primera coordenada del centro; en **B2**, el valor del radio; y en **A6**, el valor de t. Como no queremos que las referencias de las celdas **B1** y **B2** cambien, las fijamos usando la tecla F4.
5. En la celda **C6** escribimos la fórmula para $y(t)$, que es **=$C$1+$B$2*SENO(A6)**. Copiamos hacia abajo los valores de las celdas **B6** y **C6**.

6. Hacemos la gráfica como se indicó en el caso de la recta (figura A.3). Observa que la gráfica puede salir como elipse, ya que las hojas de cálculo no suelen poner los ejes con la misma escala, así que hay que modificar la altura o anchura de la ventana donde está la gráfica para obtener el círculo. Modifica los valores del centro y el radio y observa que la gráfica se actualiza automáticamente.

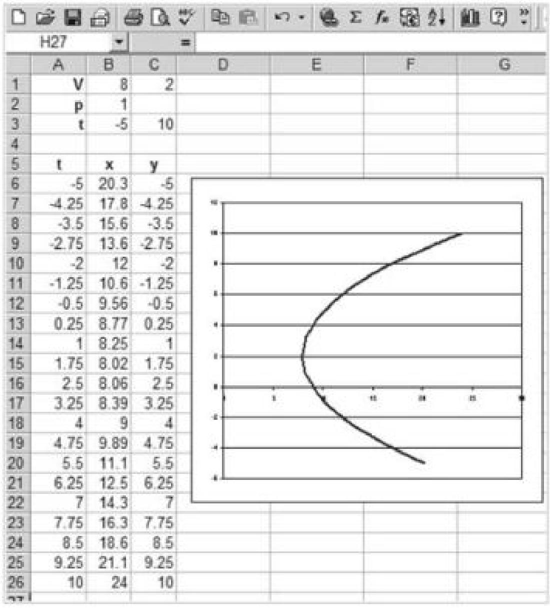
Ecuaciones paramétricas de la parábola

Para encontrar las ecuaciones paramétricas de una parábola horizontal o vertical, lo que hacemos es despejar la variable que no está elevada al cuadrado y usar la otra variable como parámetro.

Trazar la parábola $(y-k)^2 = 4p(x-h)$. Utilizamos la parametrización:

$$x(t) = \frac{1}{4p}(t-k)^2 + h$$
$$y(t) = t.$$

Ejemplo, trazar la parábola $(y-2)^2 = 4(x-8)$.
En este caso, el vértice es $V(8,2)$ y $p=1$.



H27

	A	B	C
1	V	8	2
2	p	1	
3	t	-5	10
4			
5	t	x	y
6	-5	20.3	-5
7	-4.25	17.8	-4.25
8	-3.5	15.6	-3.5
9	-2.75	13.6	-2.75
10	-2	12	-2
11	-1.25	10.6	-1.25
12	-0.5	9.56	-0.5
13	0.25	8.77	0.25
14	1	8.25	1
15	1.75	8.02	1.75
16	2.5	8.06	2.5
17	3.25	8.39	3.25
18	4	9	4
19	4.75	9.89	4.75
20	5.5	11.1	5.5
21	6.25	12.5	6.25
22	7	14.3	7
23	7.75	16.3	7.75
24	8.5	18.6	8.5
25	9.25	21.1	9.25
26	10	24	10

Figura A.4

1. En el primer renglón escribimos las coordenadas del vértice.
2. En el segundo, escribimos el valor de p.
3. En el tercer renglón escribimos los valores mínimo y máximo que queremos que tome el parámetro t. En este caso, −5, 10.
4. Ahora, en la columna t queremos poner los valores de t desde el mínimo hasta el máximo dividiendo el intervalo en 20 subintervalos iguales. Para ello, en la celda **A6** escribimos la fórmula **=B3**.
5. En la celda **A7** escribimos la fórmula **=A6+($C$3−$B$3)/20.** Con esto indicamos que a la celda que está en el renglón anterior le estamos sumando un vigésimo de la diferencia entre las celdas **C3** y **B3.** Observa que **C3** y **B3** están rodeadas de signos de $. Esto indica que las direcciones son absolutas y no se van a modificar cuando se copie la fórmula hacia abajo. Esto se logra, al momento de escribir la fórmula en la ventana de edición, oprimiendo la tecla F4 sobre **B3.**
6. En la celda **B6** ponemos la ecuación paramétrica de x, que es **=((A6-$C$1)^2)/(4*$B$2)+$B$1.** Aquí, **B1, C1** y **B2** son las coordenadas de V y el valor de p, por lo que también deben ser direcciones absolutas. El símbolo ^2 significa elevar al cuadrado.
7. En la celda **C6** ponemos la ecuación paramétrica de y, que es simplemente **=C6.**
8. Copiamos las celdas **B6** y **C6** en los renglones de abajo hasta llegar el 26.
9. Trazamos la gráfica de la misma manera como lo hicimos en el caso del segmento (figura A.4).

Ecuaciones paramétricas de la elipse

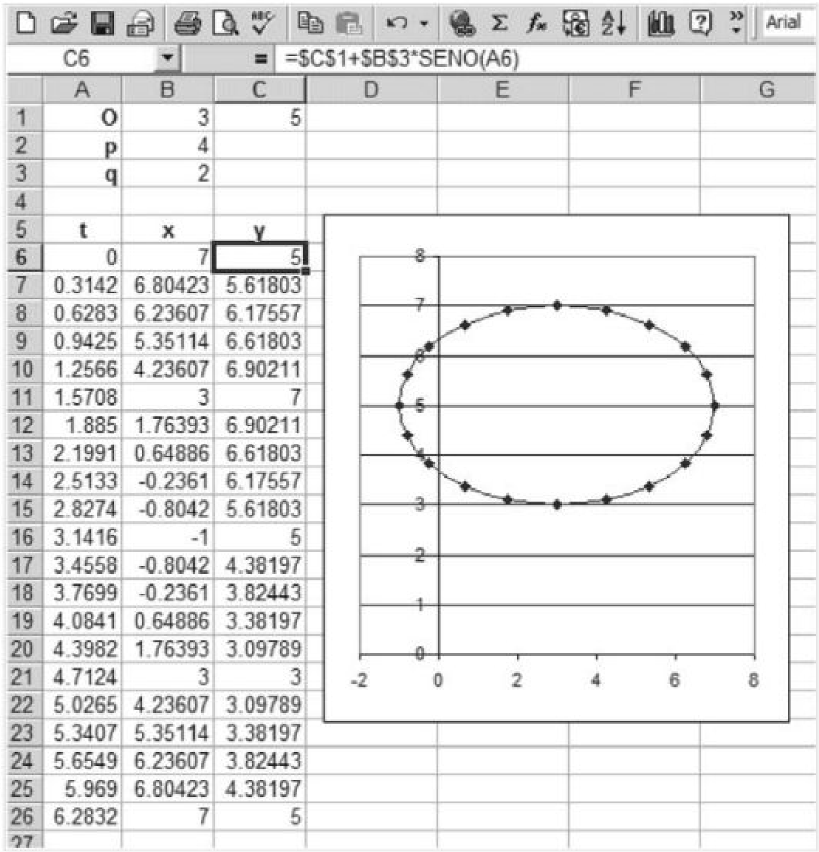
Es muy fácil modificar las ecuaciones paramétricas del círculo para obtener las ecuaciones de la elipse.

Las ecuaciones paramétricas de una elipse con ejes paralelos a los ejes cartesianos son:

$$x(t) = h + p\cos t$$
$$y(t) = k + q\,\text{sen}\,t,$$

en la que $O(h,k)$ es el centro de la elipse y p y q los semiejes horizontal y vertical.

Observa que si $p > q$ la elipse es horizontal y si $p < q$ es vertical.



	A	B	C
1	O	3	5
2	p	4	
3	q	2	
4			
5	t	x	y
6	0	7	5
7	0.3142	6.80423	5.61803
8	0.6283	6.23607	6.17557
9	0.9425	5.35114	6.61803
10	1.2566	4.23607	6.90211
11	1.5708	3	7
12	1.885	1.76393	6.90211
13	2.1991	0.64886	6.61803
14	2.5133	-0.2361	6.17557
15	2.8274	-0.8042	5.61803
16	3.1416	-1	5
17	3.4558	-0.8042	4.38197
18	3.7699	-0.2361	3.82443
19	4.0841	0.64886	3.38197
20	4.3982	1.76393	3.09789
21	4.7124	3	3
22	5.0265	4.23607	3.09789
23	5.3407	5.35114	3.38197
24	5.6549	6.23607	3.82443
25	5.969	6.80423	4.38197
26	6.2832	7	5

Figura A.5

Trazar la elipse con centro en $O(3,5)$, con semieje mayor 4 y semieje menor 2.

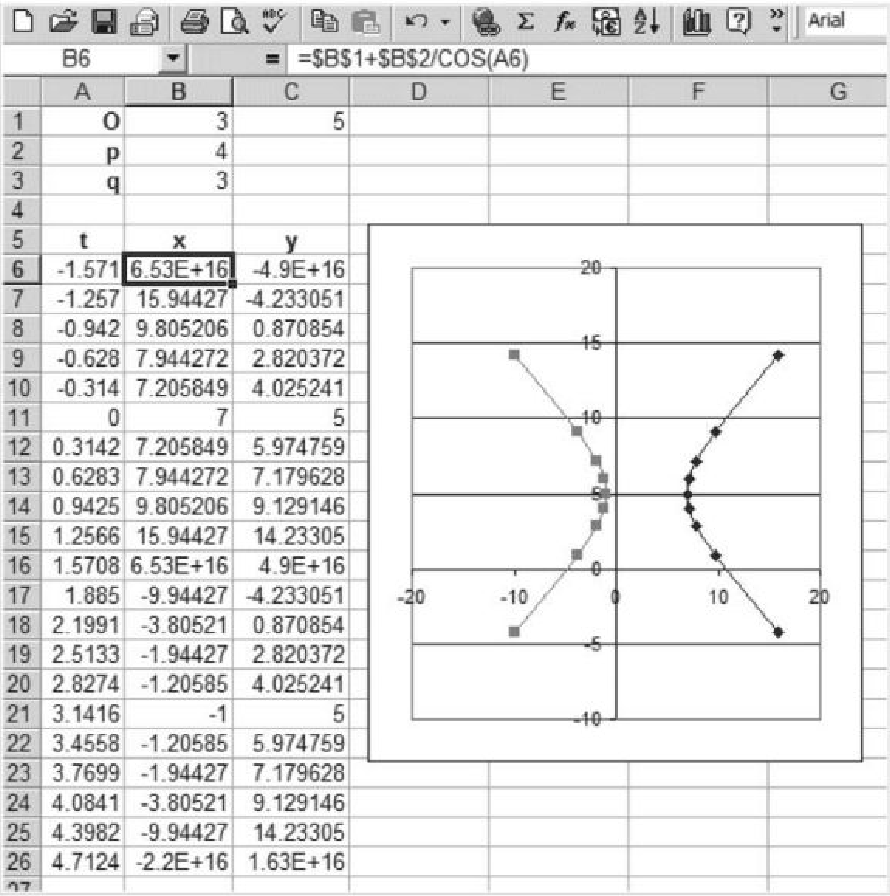
1. Modificamos la construcción del círculo poniendo en **B2** el valor $p = 4$ y en **B3** el valor $q = 2$.
2. Modificamos la fórmula de la celda **C6** poniendo **=$C$1+$B$3*SENO(A6)**.
3. Copiamos esta fórmula en toda la columna de y.
4. La gráfica se actualiza automáticamente mostrando la elipse (figura A.5). Modifica los valores de los radios y el centro para obtener otras elipses, en particular, pon valores de q mayores que p.

Ecuaciones paramétricas de la hipérbola

Para hacer la gráfica de la hipérbola cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x(t) = h + a\sec t$$
$$y(t) = k + b\tan t$$

con $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, tomaremos como base la hoja donde construimos la elipse.



	A	B	C
1	O	3	5
2	p	4	
3	q	3	
4			
5	t	x	y
6	-1.571	6.53E+16	-4.9E+16
7	-1.257	15.94427	-4.233051
8	-0.942	9.805206	0.870854
9	-0.628	7.944272	2.820372
10	-0.314	7.205849	4.025241
11	0	7	5
12	0.3142	7.205849	5.974759
13	0.6283	7.944272	7.179628
14	0.9425	9.805206	9.129146
15	1.2566	15.94427	14.23305
16	1.5708	6.53E+16	4.9E+16
17	1.885	-9.94427	-4.233051
18	2.1991	-3.80521	0.870854
19	2.5133	-1.94427	2.820372
20	2.8274	-1.20585	4.025241
21	3.1416	-1	5
22	3.4558	-1.20585	5.974759
23	3.7699	-1.94427	7.179628
24	4.0841	-3.80521	9.129146
25	4.3982	-9.94427	14.23305
26	4.7124	-2.2E+16	1.63E+16

Figura A.6

Trazar la hipérbola con centro en $O(3,5)$ y los mismos semiejes del ejercicio anterior.

1. Debemos modificar primero la columna de los valores de t. Escribimos en la celda **A6** la fórmula **=PI()/2**, es decir, $\pi/2$. Automáticamente se actualizan todos los otros valores de la columna.
2. En la celda **B6** escribimos la fórmula para $x(t)$, **=$B$1+$B$2/COS(A6)**. Observa que como las hojas de cálculo no tienen la función secante, usamos la identidad $\sec t = \frac{1}{\cos t}$.
3. Copiamos esta fórmula en toda la columna de x.
4. En la celda **C6** escribimos la fórmula para $y(t)$, **=$C$1+$B$3*TAN(A6)**.
5. Copiamos esta fórmula en toda la columna de y.

6. Observa que la gráfica es muy extraña. Esto se debe a que se está intentando evaluar las funciones sec t y tan t en valores de t para los cuales no están definidas, a saber, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, así que hay que modificar los datos de origen de la gráfica para evitar estos puntos.
7. Ponemos el cursor sobre la gráfica, oprimimos el botón derecho del ratón y elegimos *Datos de origen* en el menú que aparece. Modificamos los valores de x, de manera que solo aparezcan **=hoja1!$B$7:$B$15**, así vamos a considerar los valores de t mayores que $-\frac{\pi}{2}$ y menores que $\frac{\pi}{2}$.
8. Hacemos lo mismo con los valores de y eligiendo **=hoja1!$C$7:$C$15**.
9. La gráfica se actualiza y aparece una de las dos ramas de la hipérbola.
10. Para obtener la otra rama, agregamos otra serie de datos a la gráfica, poniendo **=hoja1!$B$17:$B$25** en los valores de x y **=hoja2!$C$17:$C$25** en los valores de y (figura A.6). Modifica los valores del centro y los radios para obtener diferentes hipérbolas. Para obtener hipérbolas verticales, hay que utilizar las fórmulas:

$$x(t) = h + a \tan t$$
$$y(t) = k + b \sec t,$$

en las que están intercambiados los papeles de las funciones secante y tangente.

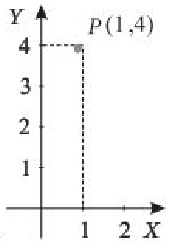
Museo de San Carlos.

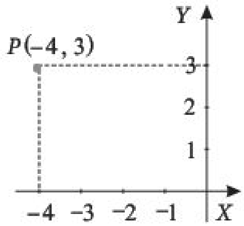
Solucionario

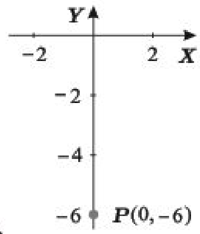
Unidad 1. El plano euclidiano

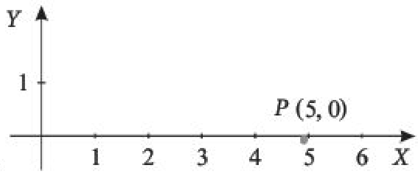
Ejercicios impares

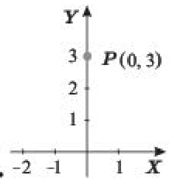
Página 12

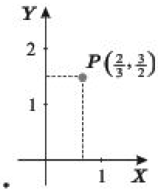
1. 

3. 

5. 

7. 

9. 

11. 

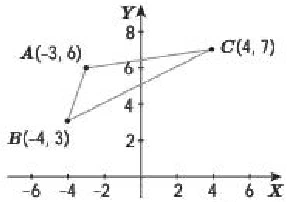


Figura 1

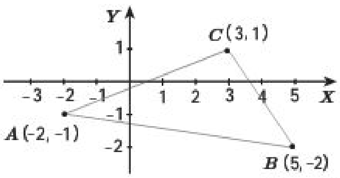


Figura 2

13. $\sqrt{29}$. **15.** $\sqrt{117}$. **17.** $\sqrt{90}$. **19.** $\sqrt{13}$. **21.** 3. **23.** $\sqrt{72}$. **25.** $C(0,5)$ es el punto del eje Y que equidista de A y de B El triángulo es isósceles. **27.** $C\left(-1,\frac{93}{8}\right)$ es el punto que equidista de A y de B. **29.** La longitud del lado AB es $\sqrt{10}$, la del lado BC es $\sqrt{80}$ y la del lado CA es $\sqrt{50}$ (figura 1). **31.** La longitud del lado AB es $\sqrt{50}$, la del lado BC es $\sqrt{13}$ y la del lado CA es $\sqrt{29}$ (figura 2). **33.** El lado AB es igual al lado BC y su longitud es $\sqrt{40}$. **35.** El punto $P\left(\frac{1}{2},2\right)$ equidista de A, B y C. **37.** El punto $P\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ equidista de A, B y C.

Página 25

1. $\left(\frac{1}{2},0\right)$. **3.** $\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$. **5.** $(-1,4)$. **7.** $\left(-\frac{11}{12},\frac{15}{8}\right)$. **9.** $\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{48}\right)$. **11. a.** $R_1\left(\frac{13}{6},\frac{7}{3}\right)$. **b.** $R_2\left(\frac{23}{6},\frac{11}{3}\right)$. **c.** Cada segmento tiene una longitud de $\sqrt{\frac{41}{9}}$. **13.** $R(-4,0)$, $S(-3,2)$ y $T(-2,4)$. **15.** $M\left(1,\frac{3}{2}\right)$. La longitud del segmento que une A con M es $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **17.** Los vértices del triángulo nuevo son $A'\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B'\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y $C'\left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ y sus lados miden $\frac{1}{2}$. El lado del triángulo original mide 1. **19.** El punto de apoyo debe colocarse a $\frac{45}{4}$ centímetros del extremo izquierdo.

Ejercicios de repaso impares de la página 28

1. Hay dos puntos $Q_1(5,-4)$ y $Q_2(5,20)$. **3.** El punto buscado es $P(3,4)$. **5.** $C\left(-1,2+2\sqrt{3}\right)$ y $C'\left(-1,2-2\sqrt{3}\right)$. **7.** La razón es 2. **9.** $R\left(-\frac{89}{12},\frac{87}{140}\right)$.

Autoevaluación

1. b. **2.** a. **3.** d. **4.** b. **5.** c.

Heteroevaluación

1.
$$\begin{aligned} d(P,Q) &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5-(-8))^2+(-4-1)^2} \quad \leftarrow \text{ Cuidado con el signo en las abcisas.} \\ &= \sqrt{(5+8)^2+(-4-1)^2} \\ &= \sqrt{(13)^2+(-5)^2} \quad \leftarrow \text{ Recuerda que } (-5)^2 = 5^2. \\ &= \sqrt{169+25} \\ &= \sqrt{194}. \end{aligned}$$

2. Llamemos $Q(x,y)$ al otro extremo. Observa que ya tenemos el punto medio del segmento buscado, entonces:

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{4+x}{2} \\ 6 &= 4+x \\ 6-4 &= x \quad \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.} \\ 2 &= x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{6+y}{2} \\ -2 &= 6+y \\ -2-6 &= y \quad \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.} \\ -8 &= y. \end{aligned}$$

El otro extremo del segmento es $Q(2,-8)$.

3. Como R está fuera del segmento dirigido PQ la razón es negativa. De donde:

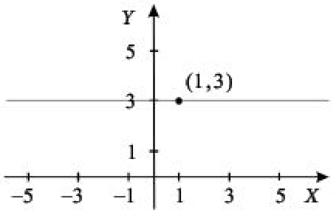
$$\begin{aligned} \frac{PR}{RQ} &= -\frac{\sqrt{(0+4)^2+(5+11)^2}}{\sqrt{(-4+3)^2+(-11+7)^2}} \quad \leftarrow \text{ Recuerda que debes analizar si } R \text{ está dentro o fuera del segmento } PQ. \\ &= -\frac{\sqrt{272}}{\sqrt{17}} \\ &= -\frac{\sqrt{16(17)}}{\sqrt{17}} \\ &= -4. \end{aligned}$$

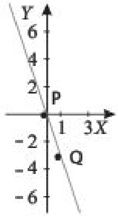
Unidad 2. La línea recta

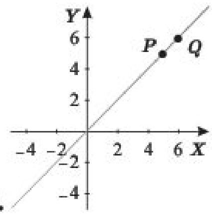
Ejercicios impares

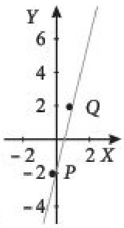
Página 41

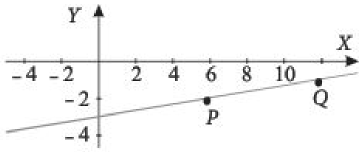
1. $m=\frac{1}{3}$. **3.** $m=\frac{1}{2}$. **5.** $m=8$. **7.** $m=\frac{8}{11}$. **9.** $m=3$. **11.** $m=\frac{3}{11\pi}$. **13.** $m=0$.
15. $m=-\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{10}}{2}$. **17.** Las respuestas pueden variar.

19. 

21. 

23. 

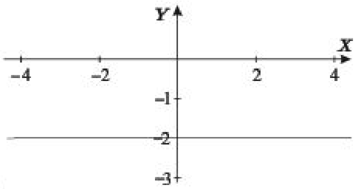
25. 

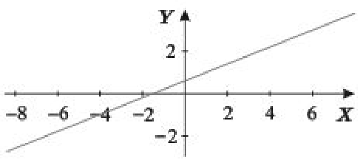
27. 

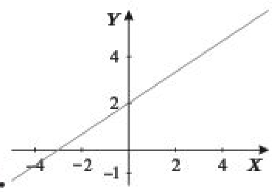
29. La pendiente del lado AB es $\frac{1}{2}$, la del lado CA es $-\frac{11}{3}$ y la del lado BC es $-\frac{7}{11}$.

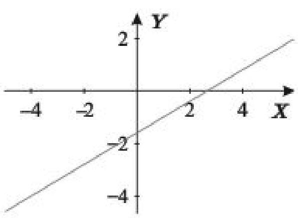
Página 47

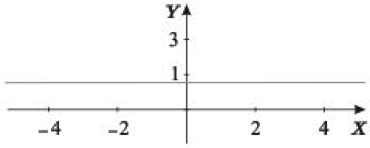
1. $y-3=-(x-2)$. **3.** $y+5=0$. **5.** $y+3=-10(x+9)$. **7.** $y-4=-\frac{2}{3}x$.
9. $y+7=\frac{4}{7}(x-3)$. **11.** $y=5$. **13.** $y=\frac{4}{5}x-8$. **15.** $y=7x-\frac{2}{3}$. **17.** $y=\frac{9}{8}x+16$. **19.** $y=-6x+\sqrt{2}$. **21.** $y=-\sqrt{10}x-\sqrt{7}$.

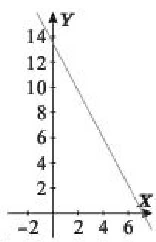
23. 

25. 

27. 

29. 

31. 

33. 

35. $Q(1,7)$. **37.** $y=\frac{2}{11}x+\frac{16}{11}$. **39.** $\alpha 125.26°$. **41.** $\alpha\approx 26.57°$. **43.** $\alpha=140.19°$.

Página 52

1. $y=-6x+14$. **3.** $y=-x+2$. **5.** $y=-\frac{5}{6}x+\frac{3}{4}$. **7.** $y=-x+9$. **9.** $y=3x+30$. **11.** $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$. **13.** $y=\frac{2}{5}x-5$. **15.** $y=\frac{3}{2}x-8$. **17.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$, $y=-\frac{3}{7}x-\frac{8}{7}$, $y=-\frac{1}{13}x+\frac{8}{13}$. **19.** $y=-\frac{10}{11}x+\frac{35}{11}$, $y=-\frac{5}{2}x+\frac{35}{2}$, $y=-\frac{5}{9}x+\frac{35}{9}$. **21.** Cualquier punto de la recta $y=\frac{13}{8}x+\frac{29}{16}$ equidista de los puntos $A(-7,5)$ y $B(6,-3)$. **23.** Puntos medios: $M\left(-\frac{5}{2},-3\right)$, $N(0,4)$. Ecuación de la recta: $y=\frac{14}{5}x+4$. **25. a.** $C(x)=450x+5500$. **b.** 5 500 pesos. **c.** 450 pesos. **27. a.** Puntos medios: $M\left(-\frac{9}{2},-2\right)$, $N\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$. Ecuación de la recta: $y=\frac{5}{14}x-\frac{11}{28}$. **b.** Puntos medios: $P\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$. Ecuación de la recta: $-\frac{11}{2}x-\frac{25}{4}$. **c.** $R\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$. **d.** Puntos medios de las diagonales: $S\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$, $T(0,-1)$. Recta que une S con T: $y=-\frac{1}{4}x-1$.

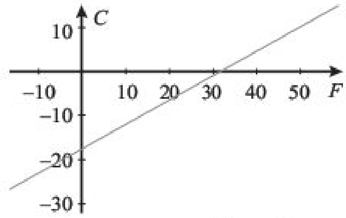


Figura 3

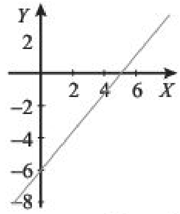


Figura 4

Página 57

1. $3x-2y+15=0$. **3.** $x+y-9=0$. **5.** $x+6y-5\sqrt{2}=0$. **7.** $x-2y-8=0$. **9.** $2x+y-4=0$. **11.** $12x-5y+\pi=0$. **13. a.** 32 $F=0$ °C, 100 $F\approx 37.7$ °C, 410 °F = 210 °C. **b.** 36.5 °C = 97.7 °F, 100 °C = 212 °F, −10 °C = 14 °F. **c.** Las dos escalas coinciden en −40° (figura 3). **15.** $\left(2+\sqrt{3}\right)x-y-1-3\sqrt{3}=0$. **17.** $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}-5=0$. **19.** $x-y-8=0$. **21.** $8x-y-3=0$. **23.** $x+6y+60=0$. **25.** $5x+5y+12=0$. **27.** No es vertical. **29.** No es vertical. **31.** No es vertical.

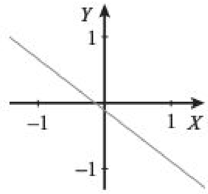


Figura 5

Página 60

1. Recta con pendiente $m=\frac{3}{5}$ que pasa por $P(0,8)$. **3.** Recta y no pasa por el origen. **5.** Recta que pasa por $P(3,-1)$ y tiene pendiente $m=\frac{9}{8}$. **7.** Recta horizontal que pasa por $P(0,-9)$. **9.** Recta que pasa por $P(-4,0)$ y $Q(0,7)$. **11.** Recta que no pasa por el origen. **13.** Recta con pendiente $m=-4$ y que pasa por $P\left(-7,-\frac{4}{5}\right)$. **15.** Recta con pendiente $m=-\frac{5}{11}$ y que pasa por $P(0,4)$. **17.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{-6}=1$ (figura 4). **19.** $\frac{x}{-\frac{1}{7}}+\frac{y}{-\frac{1}{9}}=1$ (figura 5). **21.** $\frac{x}{\frac{31}{6}}+\frac{y}{-31}=1$ (figura 6). **23.** $\frac{x}{7}+\frac{y}{4}=1$ (figura 7). **25.** $8x-5y+40=0$. **27.** $8x+y+4=0$.

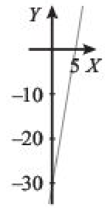


Figura 6

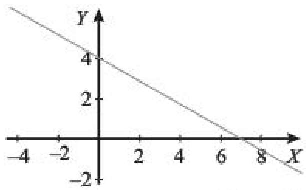


Figura 7

Página 64

1. Las rectas se cortan en el punto $P(4,0)$ (figura 8). **3.** Las rectas son paralelas (figura 9). **5.** Es una sola recta (figura 10). **7.** Las rectas se cortan en el punto $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ (figura 11). **9.** Las rectas se cortan en el punto $P(4,2)$ (figura 12). **11.** Las rectas se cortan en el punto $P(-1,13)$ (figura 13). **13.** Las tres rectas forman un triángulo cuyos vértices son $A\left(\frac{102}{7},\frac{85}{7}\right)$, $B(0,0)$ y $C\left(\frac{119}{11},\frac{51}{11}\right)$. **15.** $y=\frac{4}{9}x+\frac{2}{3}$. **17.** La recta $y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$ biseca el segmento determinado por $A(-8,4)$ y $B(6,4)$.

19. Se cortan en el punto $P(5,3)$. **21.** $a=-2$, $b=2$, las rectas son $-2x+3y-11=0$ y $-x+2y-8=0$. **23.** La densidad del plomo es 11.35 y la de la plata es 10.47. **25.** No existe un número de dos cifras que cumpla las condiciones dadas.

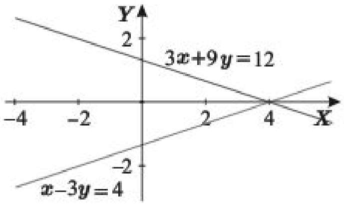


Figura 8

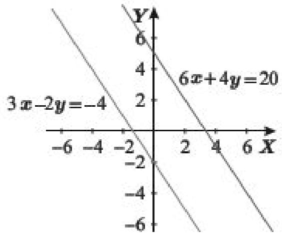


Figura 9

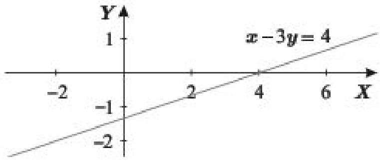


Figura 10

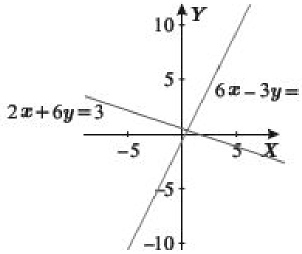


Figura 11

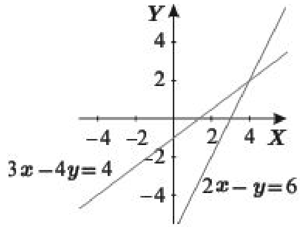


Figura 12

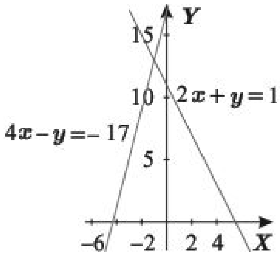


Figura 13

Página 71

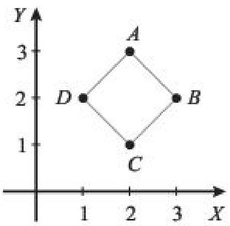


Figura 14

1. $\alpha\approx 63.43°$. **3.** $\alpha\approx 18.43°$. **5.** $\alpha=45°$. **7.** $\alpha\approx 116.57°$. **9.** Pendiente $AB=$ pendiente $CD=-1$, pendiente $AD=$ pendiente $CB=1$; cada ángulo mide $90°$ (figura 14). **11.** La pendiente de ℓ_2 es 7. **13.** Los ángulos son $\alpha_1=63.43°$, $\alpha_2=90°$ y $\alpha_3=26.57°$. El triángulo es rectángulo.

Página 76

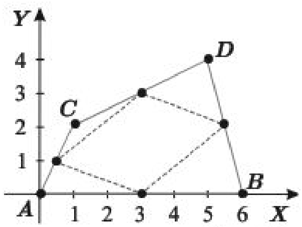


Figura 15

1. $y=\frac{6}{5}x+\frac{23}{5}$. **3.** $y=-\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}$. **5.** $y=-5$. **7.** $y=\frac{9}{2}x+\frac{57}{2}$. **9.** $y=-x$. **11.** $y=-\frac{1}{5}x+\frac{4}{15}$. **13.** $x=5$. **15.** $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{4}{\sqrt{2}}+3$. **17.** $y=x-5$. **19.** $P\left(\frac{1}{2},1\right)$. No son perpendiculares. **21.** Son paralelas. **23.** $P(-1,2)$. No son perpendiculares. **25.** $P\left(\frac{9}{4},-\frac{47}{4}\right)$. No son perpendiculares. **27.** $y=\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}$ y $y=\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}$ son paralelas. $y=-\frac{2}{5}x+\frac{21}{5}$ y $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$ son paralelas (figura 15). **29.** $5x-6y+3=0$, $5x+2y-1=0$. $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ (figura 16). **31. a.** Las rectas son: $y=\frac{1}{2}x+4$, $y=\frac{1}{2}x+1$, $y=\frac{1}{2}x-2$. **b.** Las rectas son paralelas. **c.** Las rectas son $y=-\frac{5}{2}x-2$, $y=\frac{7}{2}x-20$ y se cortan en $P\left(3,-\frac{19}{2}\right)$. **d.** Las rectas son: $y=2x-2$, $y=-x+7$ y se cortan en $Q(3,4)$. **e.** Las rectas son $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$, $y=\frac{5}{4}x-2$ y se cortan en $R\left(3,\frac{7}{4}\right)$. **f.** P, Q y R están en la recta $x=3$. **g.** (figura 17).

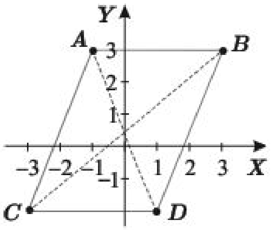


Figura 16

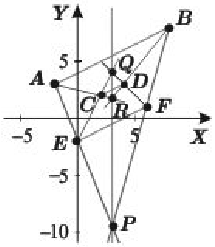


Figura 17

Página 86

1. $y<2x+7$. $y>2x+7$. **3.** $y<5$. $y>5$. **5.** $y<\frac{16}{9}x+\frac{4}{3}$. $y>\frac{16}{9}x+\frac{4}{3}$. **7.** $x<\frac{3}{2}$.
9. (figura 18). **11. a.** $C(x)=19x+16$. **b.** Debe vender al menos dos pasteles diarios. **c.** Debe vender al menos 11 pasteles. **13. a.** En el primer caso el punto de equilibrio se alcanza cuando se venden 3400 artículos; en el segundo, cuando se venden aproximadamente 3530 artículos. **b.** Le conviene adquirir el nuevo equipo.
15. a. $y=-100x+500$. **b.** $y=400x-950$. **c.** \$2.90 cada tamal.
17. a. $C(x)=\begin{cases} 16x+5500 & \text{si } 0\leq x<25000 \\ 16.22x & \text{si } 25000\leq x\leq 40000. \end{cases}$ **b.** Debe vender al menos. 1834 artículos. **c)** En cualquier caso, la ganancia por unidad es de \$2.78.

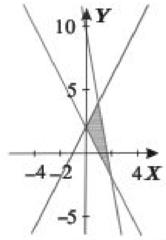


Figura 18

Página 92

1. $\sqrt{5}$. **3.** $\frac{35}{\sqrt{41}}$. **5.** $\frac{20}{\sqrt{34}}$. **7.** 5. **9.** $\frac{11}{2\sqrt{13}}$. **11.** $\frac{10}{\sqrt{13}}$. **13.** $\frac{2}{\sqrt{74}}$. **15.** $\frac{7}{2\sqrt{5}}$. **17.** $\frac{5}{\sqrt{61}}$. **19.** Hay dos soluciones: $y=-\sqrt{3}x+10$ o $y=-\sqrt{3}x-10$. **21.** La distancia de A y B a ℓ_1 es $\frac{7}{5}$ y la distancia de A y B a ℓ_2 es $\frac{29}{15}$. La recta que pasa por A y B es paralela a las otras dos.
23. Hay cuatro posibilidades: $A\left(-\frac{7}{3},4\right)$ y $B(5,6)$; $A\left(-\frac{7}{3},4\right)$ y $B\left(5,\frac{26}{11}\right)$; $A(11,4)$ y $B(5,6)$; $A(11,4)$ y $B\left(5,\frac{26}{11}\right)$.

Página 107

1. Distancia de P a la recta: $\frac{1}{\sqrt{13}}$; P y el origen están en lados opuestos de la recta.
3. Distancia de P a la recta: $\frac{5}{2}$; P se encuentra del mismo lado que el origen.
5. Distancia de P a la recta: $\frac{7}{\sqrt{113}}$; el origen y P se encuentran en lados opuestos de la recta. **7.** Distancia de P a la recta: 2; P se encuentra del mismo lado que el origen.
9. Distancia de P a la recta: $\frac{1}{\sqrt{10}}$; el origen y P se encuentran en lados opuestos de la recta. **11.** Las rectas son paralelas. **13.** $x=-\frac{3}{8}$. **15.** $-\frac{11}{85}x+\frac{143}{85}y+\frac{90}{17}=0$.
17. $\frac{14}{65}x+\frac{112}{65}y+\frac{302}{195}=0$, $\frac{8}{5}y-\frac{1}{15}=0$ y $\frac{14}{65}x+\frac{8}{65}y+\frac{21}{13}=0$. Se cortan en $\left(-\frac{158}{21},\frac{1}{24}\right)$.

Página 112

1. $x(t)=-2+4t,\ y(t)=4-10t$. **3.** $x(t)=-5+10t, y(t)=-3+6t$. **5.** $x(t)=-1+9t$, $y(t)=-10+11t$. **7.** $x(t)=-7t,\ y(t)=6-6t$. **9.** $x(t)=4-3t,\ y(t)=-1-7t$. **11.** Unas ecuaciones paramétricas de la recta son $x(t)=t,\ y(t)=\frac{6}{7}t+\frac{5}{7}$ y otras son $x(t)=\frac{7}{6}t-\frac{5}{6},\ y(t)=t$. **13.** Unas ecuaciones paramétricas de la recta son $x(t)=t$, $y(t)=9t-9$ y otras son $x(t)=\frac{1}{9}t+1,\ y(t)=t$. **15.** Unas ecuaciones paramétricas de la recta son $x(t)=t,\ y(t)=\frac{5}{2}t+7$ y otras son $x(t)=\frac{2}{5}t-\frac{14}{5},\ y(t)=t$.
17. $-2x+3y+2=0$. **19.** $8x+13y-9=0$. **21.** $x+26y-4=0$.

Página 116

1. $6x-y=0$ y $6x+y=0$. **3.** $y=\frac{2}{7}x+\frac{61}{14}$.

Ejercicios de repaso impares de la página 119

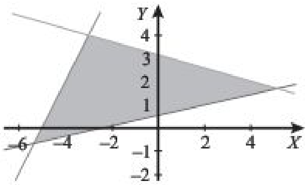


Figura 19

1. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{32}{5}$. **3.** $y=x-2$. **5.** $y=-\frac{5}{2}x+4$. **7.** $y=4$. **9.** Hay dos soluciones: $C\left(-1,2+2\sqrt{3}\right)$ o $C\left(-1,2-2\sqrt{3}\right)$. **11.** $y=2x+\frac{14}{3}$. **13.** Los puntos medios son $(9,4)$, $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ y la ecuación de la recta es $y=\frac{10}{17}x-\frac{22}{17}$. **15.** Vértices: $A(-1,-4)$, $B(-5,3)$, $C\left(\frac{20}{9},\frac{211}{27}\right)$. Longitud AB: $\sqrt{65}$; Longitud BC: $\frac{65}{27}\sqrt{13}$; Longitud AC: $\frac{29}{27}\sqrt{130}$.
17. Punto de intersección: $Q(5,-3)$; Ecuación de la recta: $y=-\frac{10}{3}x+\frac{41}{3}$.
19. Longitud AB: 3, longitud BC: 5, longitud AC: 4. $3<9, 5<7, 4<8$. **21.** $y>\frac{2}{9}x+\frac{5}{9}$, $y<2x+10,\ y<-\frac{2}{7}x+\frac{22}{7}$ (figura 19). **23.** $\frac{30}{\sqrt{34}}$. **25.** Distancia de A al lado BC: $\frac{71}{\sqrt{85}}$, distancia de B al lado AC: $\frac{71}{\sqrt{106}}$, distancia de C al lado AB: $\frac{71}{\sqrt{65}}$. **27.** $\frac{19}{\sqrt{20}}$. **29.** $P(-3,2)$ está en la recta $y=x+5$ pero la suma de las distancias de $P(-3,2)$ a los lados del triángulo es mayor que la distancia de $C(-2,3)$ a la recta AB. Para que la suma de las distancias de P a los lados del triángulo sea igual a la distancia de C a la recta AB, el punto P debe estar en la recta BC y además entre C y B. **31.** $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$.
33. Hay dos soluciones $4x+3y-96=0$ y $x+5y-10=0$. **35.** El pago por 25 m^3 sería de 32.98 pesos. **37.** Hay dos soluciones $x-1=0$ y $4x+3y+5=0$.

Autoevaluación

1. a. **2.** c. **3.** b. **4.** d. **5.** a. **6.** c. **7.** b. **8.** a. **9.** c. **10.** d.

Heteroevaluación

1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Sustituimos las coordenadas de los puntos:

$$\begin{aligned}
y-8 &= \frac{-5-8}{-3-(-1)}(x-(-1)) && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo } -(-1)=1.\\
y-8 &= \frac{-13}{-3+1}(x+1)\\
y-8 &= \frac{-13}{-2}(x+1)\\
y-8 &= \frac{13}{2}(x+1)\\
y &= \frac{13}{2}(x+1)+8 && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.}\\
y &= \frac{13}{2}x+\frac{29}{2}.
\end{aligned}$$

Otra manera de resolverlo es:

$$\begin{aligned}
y-(-5) &= \frac{8-(-5)}{-1-(-3)}(x-(-3)) && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.}\\
y+5 &= \frac{8+5}{-1+3}(x+3)\\
y+5 &= \frac{13}{2}(x+3)\\
y &= \frac{13}{2}(x+3)-5 && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.}\\
y &= \frac{13}{2}x+\frac{29}{2}.
\end{aligned}$$

2. Primero escribimos la ecuación de la recta en la forma general:

$$Ax + By + C = 0.$$

$$\begin{aligned}
y &= -3x+12\\
3x+y-12 &= 0. && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.}
\end{aligned}$$

Para encontrar la distancia de $P(-7,2)$ a $3x+y-12=0$, sustituimos en la fórmula:

$$d(P, \ell) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

es decir,

$$\begin{aligned} d(P,\ell) &= \frac{|3(-7)+1(2)-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ &= \frac{|-21+2-12|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{|-31|}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{31}{\sqrt{10}}. \qquad \leftarrow \text{ Recuerda que } |-31| = -(-31) = 31. \end{aligned}$$

3. Para encontrar la intersección entre las rectas, resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} 5x-6y-7&=0 \\ 10x-12y+5&=0. \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por -2 y las sumamos:

$$\begin{aligned} -10x+12y+14&=0 \\ 10x-12y+5&=0, \end{aligned}$$

de donde:

$$19=0.$$

Recuerda que si al resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtenemos una igualdad que no es cierta, entonces las rectas son paralelas. Por tanto, las rectas dadas son paralelas.

4. Elegimos un punto cualquiera sobre la primera recta, por ejemplo, si hacemos $x=0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 3y-15 &= 0 \\ 3y &= 15 \qquad \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.} \\ y &= \frac{15}{3} \qquad \leftarrow \text{ El 3 pasa dividiendo.} \\ y &= 5. \end{aligned}$$

Entonces, $P(0,5)$ está en la primera recta. Calculamos la distancia del punto $P(0,5)$ a la recta $6x-18y+2=0$.

Sustituimos en la fórmula:

$$d(P,\ell)=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

es decir,

$$\begin{aligned}
d(P,\ell) &= \frac{\left|6(0)-18(5)+2\right|}{\sqrt{6^2+(-18)^2}}\\
&= \frac{\left|-90+2\right|}{\sqrt{36+324}}\\
&= \frac{\left|-88\right|}{\sqrt{360}}\\
&= \frac{88}{\sqrt{360.}} && \leftarrow \text{ Recuerda que } \left|-88\right| = -(-88) = 88.
\end{aligned}$$

5. Primero encontramos la pendiente de la recta. Para esto despejamos y:

$$\begin{aligned}
8x+10y-15 &= 0\\
10y &= -8x+15 && \leftarrow \text{ Cuidado con los signos.}\\
y &= \frac{-8x+15}{10} && \leftarrow \text{ El 10 pasa dividiendo.}\\
y &= \frac{-8x}{10}+\frac{15}{10} && \leftarrow \text{ Recuerda que } \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.\\
y &= -\frac{4}{5}x+\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

La pendiente es el coeficiente de x en este caso $-\frac{4}{5}$.

Entonces la pendiente de la recta perpendicular es $\frac{5}{4}$.

Encontramos la ecuación de la recta que pasa por $P(3,-5)$ y tiene pendiente $\frac{5}{4}$:

$$\begin{aligned}
y-y_1 &= m(x-x_1)\\
y-(-5) &= \frac{5}{4}(x-3) && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo } -(-5)=5.\\
y+5 &= \frac{5}{4}(x-3)\\
y &= \frac{5}{4}(x-3)-5 && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.}\\
y &= \frac{5}{4}x-\frac{15}{4}-5\\
y &= \frac{5}{4}x-\frac{35}{4}.
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta buscada es $y=\frac{5}{4}x-\frac{35}{4}$.

6. Es importante recordar que las rectas deben estar orientadas. La segunda ya lo está. Como el coeficiente de y en la ecuación $6x-8y+3=0$ es negativo, entonces multiplicamos la ecuación por (-1): $-6x+8y-3=0$.

Ahora normalizamos ambas rectas:

$$\frac{-6x+8y-3}{\sqrt{(-6)^2+8^2}} = 0$$

$$\frac{-6x+8y-3}{\sqrt{36+64}} = 0 \leftarrow (-6)^2=36.$$

$$\frac{-6x+8y-3}{\sqrt{100}} = 0 \leftarrow \text{Recuerda que } \sqrt{100}>0,$$

$$\frac{-6x+8y-3}{10} = 0$$

y

$$\frac{10x+24y-7}{\sqrt{10^2+24^2}} = 0$$

$$\frac{10x+24y-7}{\sqrt{100+576}} = 0$$

$$\frac{10x+24y-7}{\sqrt{676}} = 0 \leftarrow \text{Recuerda que } \sqrt{676}>0.$$

$$\frac{10x+24y-7}{26} = 0.$$

Las rectas orientadas y normalizadas son $\frac{-6x+8y-3}{10}=0$ y $\frac{10x+24y-7}{26}=0$.

Utilizamos las fórmulas para encontrar las bisectrices:

$$\begin{aligned}
(A-A')x+(B-B')y+(C-C') &= 0 \\
\left(-\tfrac{6}{10}-\tfrac{10}{26}\right)x+\left(\tfrac{8}{10}-\tfrac{24}{26}\right)y+\left(-\tfrac{3}{10}-\left(-\tfrac{7}{26}\right)\right) &= 0 \leftarrow \text{El término independiente de la segunda ecuación es } -\tfrac{7}{26}. \\
-\tfrac{64}{65}x-\tfrac{8}{65}y-\tfrac{2}{65} &= 0 \\
64x+8y-2 &= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(A+A')x+(B+B')y+(C+C') &= 0\\
\left(-\tfrac{6}{10}+\tfrac{10}{26}\right)x+\left(\tfrac{8}{10}+\tfrac{24}{26}\right)y+\left(-\tfrac{3}{10}-\tfrac{7}{26}\right) &= 0\\
-\tfrac{14}{65}x+\tfrac{112}{65}y-\tfrac{37}{65} &= 0\\
-14x+112y-37 &= 0.
\end{aligned}$$

Unidad 3. Las cónicas

Ejercicios impares

Página 142

1. $x^2+y^2=3$. **3.** $-y^2+8x+32=0$. **5.** $4x^2-5y^2+5=0$. **7.** $A(-9,8)$, $B(-1,10)$, $C(0,5)$. **9.** $A(-5,-2)$, $B(3,0)$, $C(4,-5)$. **11.** $A(1,1)$, $B(9,3)$, $C(10,-2)$. **13.** $y'=-3x'+\frac{9}{2}$. **15.** $y'=3x'+\frac{11}{2}$. **17.** $y'=x'-\frac{41}{6}$. **19.** $y'=2x'-\frac{31}{6}$. **21.** $x'=\frac{25}{3}$. **23.** $y'=-\frac{5}{2}x'-\frac{7}{6}$. **25.** El lugar geométrico son las rectas $y=-3x+8$ y $y=-3x+22$.

Autoevaluación

1. a. **2.** c. **3.** d. **4.** a. **5.** b.

Heteroevaluación

1. Sustituimos las coordenadas de O' en las fórmulas de traslación:

$$\begin{aligned}x'&=x-h\\ y'&=y-k,\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}x' &= x-\left(-\tfrac{3}{2}\right)=x+\tfrac{3}{2} \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo.}\\ y' &= y-4.\end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores de las coordenadas del punto A:

$$\begin{aligned}x'&=-6+\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}\\ y'&=\frac{5}{9}-4=-\frac{31}{9}.\end{aligned}$$

Entonces $A\left(-\frac{9}{2},-\frac{31}{9}\right)$.

2. Sustituimos x y y conforme a las fórmulas:

$$\begin{aligned} x &= x'+h \\ y &= y'+k, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x &= x'-8 \\ y &= y'-1. \end{aligned}$$

En la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned} 7(x'-8)+2(y'-1)-20 &= 0 \\ 7x'+2y'-78 &= 0, \end{aligned}$$

La ecuación es $7x'+2y'-78=0$.

Unidad 4. El círculo

Ejercicios impares

Página 152

1. $x^2+y^2=64$. **3.** $x^2+y^2=49$. **5.** $x^2+y^2=\frac{25}{4}$. **7.** $x^2+y^2=\frac{9}{49}$. **9.** $r=\sqrt{7}$. **11.** $r=11$. **13.** $r=13$. **15.** $r=\sqrt{15}$. **17.** $r=\frac{8}{5}$. **19.** $x^2+y^2=5$. **21.** $x^2+y^2=\frac{9}{8}$. **23.** $x^2+y^2=25$. **25.** No existe ningún círculo que cumpla con las condiciones dadas. **27.** La recta que contiene la cuerda es $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$ y la longitud de la cuerda es $2\sqrt{10}$.

Página 161

1. $x^2+y^2-2x-4y-11=0$. **3.** $x^2+y^2+6x-4y=0$. **5.** $x^2+y^2+10x+4y+4=0$. **7.** $x^2+y^2+8x-6y=0$. **9.** $x^2+y^2+8x+6y+20=0$. **11.** $x^2+y^2+6x+4y+8=0$. **13.** Círculo inscrito: $(x+5)^2+y^2=4$. Círculo circunscrito: $(x+5)^2+y^2=8$. **15.** Círculo con centro en $(-2,1)$ y radio $\sqrt{3}$. **17.** Círculo con centro en $(1,0)$ y radio 4 **19.** Círculo con centro en el origen y radio 4. **21.** Círculo con centro en $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ y radio 1. **23.** Círculo con centro en $(-1,2)$ y radio $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **25.** Círculo con centro en $\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{47}{10}}$. **27.** La ecuación de la cuerda es $y=3x+11$ y su longitud es $2\sqrt{10}$. **29.** $(x+3)^2+(y-5)^2=25$. **31.** Las ecuaciones de las bisectrices son $8x-14y-9=0$, $27x+99y-305=0$ y $7x-y-29=0$, y el incentro es $I\left(\frac{397}{90},\frac{169}{90}\right)$.

Página 174

1. La recta y el círculo no se cortan. **3.** La recta y el círculo no se cortan. **5.** La recta y el círculo se cortan en los puntos $(-4,-13)$ y $\left(\frac{8}{5},-\frac{9}{5}\right)$. **7.** Si $m=5$, la terna pitagórica es $(10,24,26)$. Si $m=\frac{3}{2}$, la terna pitagórica es $\left(3,\frac{5}{4},\frac{13}{4}\right)$. Si $m=\frac{7}{5}$, la terna pitagórica es $\left(\frac{14}{5},\frac{24}{25},\frac{74}{25}\right)$. **9.** $5x-2y+6=0$. **11.** $2x+y+3=0$. **13. a.** $C(3,6)$. **b.** $(x-3)^2+(y-6)^2=2$. **15.** Los lados de los cuadrados miden 12 cm y 10 cm. Interpretación geométrica: Hay que encontrar la intersección de una recta con un círculo. En este caso hay dos puntos de intersección, pero por las condiciones del problema sólo consideramos $(12,10)$.

Página 180

1. Las rectas tangentes al círculo desde $A(-10,0)$ son $y=0$ y $y=\frac{48}{55}x+\frac{96}{11}$. **3.** Los círculos no se cortan. **5.** Los círculos se cortan en el punto $(1,5)$. **7.** Los círculos no se cortan. **9.** Los círculos no se cortan. **11.** $20x+10y+5=0$.

Página 193

1. $(x+6)^2+(y-4)^2=100$. **3.** $(x-4)^2+(y-5)^2=25$. **5.** $x^2+y^2=16$. **7.** $\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{181}{16}$. **9.** Puntos medios de los lados: $P(0,0)$, $Q\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $R\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Pies de las alturas: $E\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $J(0,0)$. Puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices: $K\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, $L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ y $M\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Página 196

1. $x(t)=2+6\cos t$, $y(t)=-5+6\,\mathrm{sen}\,t$; $t\in[0,2\pi]$. **3.** $x(t)=\frac{1}{3}+\cos t$, $y(t)=-2+\mathrm{sen}\,t$; $t\in[0,2\pi]$. **5.** $x(t)=\sqrt{2}\cos t$, $y(t)=-\frac{5}{3}+\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,t$; $t\in[0,2\pi]$. **7.** $x(t)=-4+\sqrt{5}\cos t$, $y(t)=\frac{2}{3}+\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t$; $t\in[0,2\pi]$. **9.** $x(t)=-\frac{1}{5}+\sqrt{6}\cos t$, $y(t)=2+\sqrt{6}\,\mathrm{sen}\,t$; $t\in[0,2\pi]$. **11.** $x(t)=5\cos t$, $y(t)=\frac{11}{2}+5\,\mathrm{sen}\,t$; $t\in[0,2\pi]$. **13.** $(x-2)^2+(y-5)^2=1$. **15.** $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+y^2=64$. **17.** $(x-3)^2+(y+4)^2=\frac{49}{4}$.

Página 199

1. $y<\frac{4}{3}x+1$, $y<-\frac{5}{3}x+10$, $(x-3)^2+(y-3)^2<\frac{49}{16}$ (figura 20).
3. $(x-4)^2+(y+6)^2=\frac{9}{4}$. El punto $P\left(4,-\frac{19}{4}\right)$ está dentro del círculo. **5.** Las

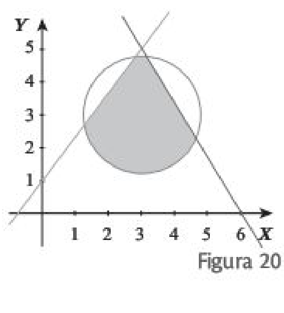


Figura 20

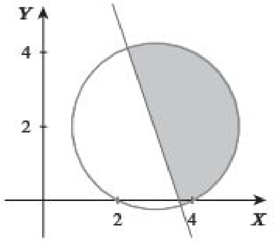


Figura 21

desigualdades que describen la región son $y>-3x+11$ y $(x-3)^2+(y-2)^2<5$ (figura 21). **7.** $(x+4)^2+(y+1)^2<16, (x+6)^2+(y+2)^2>4$ (figura 22).

9. $y<2x+5, y>\frac{2}{11}x+\frac{15}{11}, y<-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}, (x-4)^2+(y-2)^2<20$ (figura 23).

Página 201

1. Es el círculo con centro en $Q(7,-1)$ y radio 8. **3.** Es la recta $4x-4y-2=0$. **5.** El tercer vértice está en el círculo con centro en $(11,2)$ y radio 8. **7.** Es el círculo con centro en $C\left(-\frac{5}{2},-6\right)$ y radio $\frac{3}{2}$.

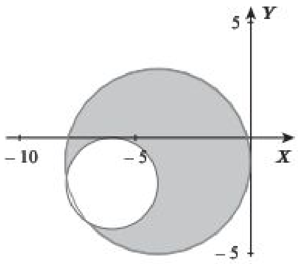


Figura 22

Ejercicios de repaso impares de la página 204

1. La ecuación del circuncírculo es $(x+2)^2+\left(y-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\right)^2=\frac{4}{3}$. **3.** $y=-3x+13$. **5. a.** $A\left(\frac{1}{5},-\frac{7}{5}\right)$ y $B(-3,5)$. **b.** $y=-2x-1$. **c.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$. **d.** Las rectas son perpendiculares. **e.** Las rectas se cortan en el punto $\left(-\frac{7}{5},\frac{9}{5}\right)$, que es el punto medio del segmento AB, la mediatriz. **7.** Es el círculo con centro en $\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{15}{2}}$.
9. $(x-9)^2+(y+3)^2=65$. **11.** La recta y el círculo se cortan en los puntos $P(-1,2)$ y $Q(-10,-5)$. **13.** $(x+3)^2+(y-3)^2<16$, $y<-\frac{1}{2}x+3$, $y<\frac{7}{5}x+\frac{43}{5}$ y $y>\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$ (figura 24). **15.** $y=\frac{4}{3}x-12$. **17.** $(x-4)^2+(y-2)^2=25$. **19.** La región está formada por los puntos que están dentro del círculo con centro en $(3,3)$ y radio 7, fuera del círculo con centro en $(5,4)$ y radio 6, fuera del círculo con centro en $(-3,6)$ y radio 5, debajo de la recta con pendiente 1 y que pasa por el punto $(0,10)$ (figura 25).

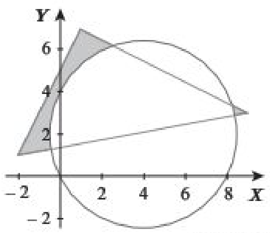


Figura 23

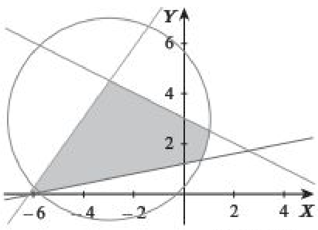


Figura 24

Autoevaluación

1. b. **2.** c. **3.** d. **4.** a. **5.** b. **6.** d. **7.** c. **8.** a.

Heteroevaluación

1. La ecuación con centro en el punto $C(h,k)$ y radio r es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$. Sustituyendo tenemos:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

$$(x-(-7))^2+(y-1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \leftarrow \text{Cuidado} \quad \begin{aligned} -(-7) &= 7 \\ \left(\sqrt{2}\right)^2 &= 2. \end{aligned}$$

$$(x+7)^2+(y-1)^2 = 2.$$

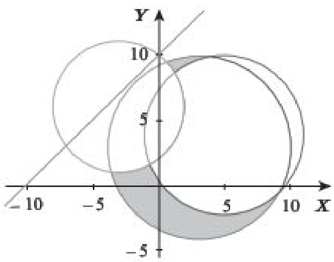


Figura 25

La ecuación del círculo es $(x+7)^2+(y-1)^2=2$.

2. Llevamos la ecuación a la forma estándar:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2,$$

es decir,

$$\begin{array}{rcll} x^2+y^2-12x+10y+58 & = & 0 & \\ x^2-12x+y^2+10y+58 & = & 0 & \\ \left(x^2-12x+36\right)+\left(y^2+10y+25\right)+58 & = & 36+25 & \leftarrow \text{Cuidado, debes sumar } 36+25 \text{ del lado derecho para no alterar la ecuación.} \\ \left(x^2-6\right)^2+\left(y+5\right)^2 & = & -58+61 & \leftarrow \text{Cuidado con el signo.} \\ \left(x-6\right)^2+\left(y+5\right)^2 & = & 3. & \end{array}$$

El círculo tiene centro en el punto $(6,-5)$ y radio $\sqrt{3}$.

3. Primero encontramos la distancia entre los puntos para determinar el radio. Recordamos que la distancia entre $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ se define como:

$$d(P,Q)=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Sustituimos en la ecuación:

$$\begin{array}{rcll} d(P,Q) & = & \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2} & \leftarrow \text{Cuidado con el signo: } -\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}. \\ & = & \sqrt{0^2+\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} & \\ & = & \sqrt{\left(-2\right)^2} & \leftarrow \text{Cuidado con el signo: } \left(-2\right)^2=2^2=4. \\ & = & \sqrt{4} & \\ & = & 2. & \end{array}$$

Así, el radio del círculo es 2; entonces buscamos el círculo con centro en: $(-2)^2 = 2^2 = 4.$ y radio $r = 2.$

Debemos sustituir en la fórmula:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

donde $C(h,k)$ es el centro del círculo:

$$\begin{aligned} \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 &= 4 \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo}: -\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}. \\ \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 &= 4. \end{aligned}$$

La ecuación del círculo buscado es $\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 = 4.$

4. Escribimos la ecuación del círculo en la forma estándar:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2,$$

es decir,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 8x + 8y + 7 &= 0 \\ x^2 + 8x + y^2 + 8y + 7 &= 0 \\ (x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 8y + 16) + 7 &= 16 + 16 \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado, debes sumar } 16+1 \text{ del lado derecho para no alterar la ecuación.} \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 &= -7 + 32 \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo.} \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 &= 25. \end{aligned}$$

La ecuación estándar del círculo es $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 25.$

Para encontrar las intersecciones de la recta y el círculo debemos resolver simultáneamente ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x+4)^2 + (y+4)^2 &= 25 \\ y &= \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}. \end{aligned}$$

Aprovechamos que en la ecuación de la recta ya está despejada la y, sustituimos su valor en la ecuación del círculo y despejamos x:

$$\begin{aligned}
(x+4)^2+\left(\tfrac{3}{4}x-\tfrac{29}{4}+4\right)^2 &= 25\\
(x+4)^2+\left(\tfrac{3}{4}x-\tfrac{13}{4}\right)^2 &= 25\\
x^2+8x+16+\frac{9}{16}x^2-\frac{39}{8}x+\frac{169}{16} &= 25\\
\frac{25}{16}x^2+\frac{25}{8}x+\frac{425}{16}-25 &= 0 \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo.}\\
\frac{25}{16}x^2+\frac{25}{8}x+\frac{25}{16} &= 0 \quad \leftarrow \quad \text{Simplificamos multilplicando por } \frac{16}{25}.\\
x^2+2x+1 &= 0\\
(x+1)^2 &= 0
\end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
x+1 &= 0\\
x &= -1. \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo.}
\end{aligned}$$

Puesto que solamente hay un valor, la recta y el círculo se cortan en un punto. Para encontrar la segunda coordenada, sustituimos el valor obtenido en la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned}
y&=\frac{3}{4}x-\frac{29}{4}\\
y&=\frac{3}{4}(-1)-\frac{29}{4}\\
y&=-8.
\end{aligned}$$

La recta y el círculo se cortan en el punto de coordenadas $(-1,-8)$.

5. Sustituimos los valores del centro $C(3,-3)$ y radio 4 en la ecuación estándar:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2,$$

es decir,

$$(x-3)^2+(y+3)^2=16.$$

Ahora debemos escribir las ecuaciones de los dos círculos en la forma general:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

Para el primer círculo tenemos:

$$\begin{aligned}
(x+5)^2+(y-8)^2 &= 9\\
x^2+10x+25+y^2-16y+64 &= 9\\
x^2+10x+y^2-16y+89 &= 9\\
x^2+10x+y^2-16y+89-9 &= 0 \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo.}\\
x^2+10x+y^2-16y+80 &= 0.
\end{aligned}$$

Para el segundo:

$$\begin{aligned}
(x-3)^2+(y+3)^2 &= 16\\
x^2-6x+9+y^2+6y+9 &= 16\\
x^2-6x+y^2+6y+18 &= 16\\
x^2-6x+y^2+6y+18-16 &= 0 \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo.}\\
x^2-6x+y^2+6y+2 &= 0.
\end{aligned}$$

Para encontrar la ecuación del eje radical, consideramos las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+10x-16y+80=0\\
x^2+y^2-6x+6y+2=0
\end{aligned}$$

y las restamos:

$$\begin{aligned}
(10-(-6))x+(-16-6)y+(80-2) &= 0 \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con el signo.}\\
16x-22y+78 &= 0\\
8x-11y+39 &= 0. \quad \leftarrow \quad \text{Simplificamos dividiendo entre 2.}
\end{aligned}$$

La ecuación general del eje radical es $8x-11y+39=0$.

6. Encontramos las coordenadas de los puntos de tangencia, para obtener las ecuaciones de las rectas tangentes.
   El centro del círculo es $C(-2,3)$ y su radio es 5. Calculamos la distancia de Q a C:

$$d(Q,C)=QC=\sqrt{-2-\frac{19}{3}^{\,2}+(3-3)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{625}{9}+0}$$

$$=\frac{25}{3}.$$

Llamemos P_1 y P_2 a los puntos de tangencia de las rectas buscadas. Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$$QP_i^2 + CP_i^2 = QC^2$$

$$QP_i^2 + 25 = \frac{625}{9}$$

para $i = 1,2.$

Así las coordenadas de P_1 y P_2 deben ser soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\left(x - \tfrac{19}{3}\right)^2 + (y-3)^2 + 25 &= \tfrac{625}{9} \\
\left(x - \tfrac{19}{3}\right)^2 + (y-3)^2 &= \tfrac{625}{9} - 25 \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.} \\
\left(x - \tfrac{19}{3}\right)^2 + (y-3)^2 &= \tfrac{400}{9},
\end{aligned}$$

escribimos la ecuación en la forma general:

$$\begin{aligned}
\left(x - \tfrac{19}{3}\right)^2 + (y-3)^2 &= \tfrac{400}{9} \\
x^2 - \tfrac{38}{3}x + \tfrac{361}{9} + y^2 - 6y + 9 &= \tfrac{400}{9} \\
x^2 - \tfrac{38}{3}x + y^2 - 6y + \tfrac{442}{9} &= \tfrac{400}{9} \\
x^2 - \tfrac{38}{3}x + y^2 - 6y + \tfrac{442}{9} - \tfrac{400}{9} &= 0 \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.} \\
x^2 + y^2 - \tfrac{38}{3}x - 6y + \tfrac{14}{3} &= 0.
\end{aligned}$$

Además, por estar P_1 y P_2 en el círculo, sus coordenadas también deben satisfacer la ecuación:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25,$$

que también escribimos en la forma general:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 + (y-3)^2 &= 25 \\
x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 &= 25 \\
x^2 + 4x + y^2 - 6y + 13 &= 25 \\
x^2 + 4x + y^2 - 6y + 13 - 25 &= 0 \leftarrow \text{ Cuidado con el signo} \\
x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 &= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, debemos resolver el sistema:

$$x^2+y^2-\frac{38}{3}x-6y+\frac{14}{3}=0$$

$$x^2+y^2+4x-6y-12=0.$$

Restamos la segunda de la primera:

$$\begin{aligned}
\left(-\tfrac{38}{3}-4\right)x+\left(\tfrac{14}{3}+12\right) &= 0 &&\leftarrow \text{ Cuidado con el signos.}\\
-\tfrac{50}{3}x+\tfrac{50}{3} &= 0 &&\leftarrow \text{ Simplificamos multiplicando po }-3.\\
50x-50 &= 0 &&\\
50x &= 50 &&\leftarrow \text{ Cuidado con el signos.}\\
x &= 1 &&\leftarrow \text{ El 50 pasa dividiendo.}
\end{aligned}$$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+4x-6y-12 &= 0\\
(1)^2+y^2+4(1)-6y-12 &= 0\\
y^2-6y-7 &= 0 \quad\leftarrow \text{ Cuidado con las operaciones.}
\end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación usando la fórmula para la solución de la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(-7)}}{2(1)}\\
&= \frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2} \quad\leftarrow \text{ Cuidado con los signos} \quad \begin{array}{c}-(-6)=6\\ (-6)^2=6^2=36.\end{array}\\
&= \frac{6\pm\sqrt{64}}{2}\\
&= \frac{6\pm 8}{2}
\end{aligned}$$

de donde:

$$y_1 = \frac{6+8}{2} = 7$$

y

$$y_2 = \frac{6-8}{2} = -1.$$

Por lo que tenemos que $P_1(1,7)$ y $P_2(1,-1)$ son los puntos en que las tangentes buscadas tocan al círculo.

La primera de las rectas tangentes es la que pasa por $Q\left(\frac{19}{3},3\right)$ y $P_1(1,7)$ Su ecuación es:

$$y-7=\left(\frac{7-3}{1-\frac{19}{3}}\right)(x-1)$$

$$y-7=\left(\frac{4}{-\frac{16}{3}}\right)(x-1)$$

$$y=-\frac{3}{4}(x-1)+7.$$

La segunda recta tangente es la que pasa por $Q\left(\frac{19}{3},3\right)$ y $P_2(1,-1)$. Es decir:

$$y+1=\left(\frac{-1-3}{1-\frac{19}{3}}\right)(x-1)$$

$$y+1=\frac{-4}{-\frac{16}{3}}(x-1)$$

$$y=\frac{3}{4}(x-1)-1.$$

Las ecuaciones de las rectas son:

$$\text{y}=-\frac{3}{4}(\text{x}-1)+7=-\frac{3}{4}\text{x}+\frac{31}{4} \quad \text{y} \quad \text{y}=\frac{3}{4}(\text{x}-1)-1=\frac{3}{4}\text{x}-\frac{7}{4}.$$

Unidad 5. La parábola

Ejercicios impares

Página 216

1. $F(2,0)$ (figura 26). Directriz: $x=-2$. **3.** $F\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ (figura 27). Directriz: $y=\dfrac{1}{4}$.

5. $F\left(-\frac{1}{2},0\right)$ (figura 28). Directriz: $x=\dfrac{1}{2}$. **7.** $F\left(0,-\frac{3}{2}\right)$ (figura 29). Directriz: $y=\dfrac{3}{2}$.

9. $F\left(0,\frac{7}{4}\right)$ (figura 30). Directriz: $y=-\dfrac{7}{4}$. **11.** $y^2=-4\left(\frac{1}{2}\right)x$ (figura 31). **13.** $y^2=4(4)x$ (figura 32). **15.** $y^2=-4(5)x$ (figura 33). **17.** $x^2=4(2)y$ (figura 34).

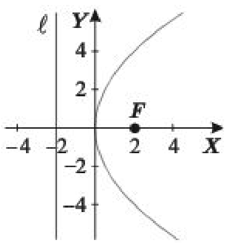


Figura 26

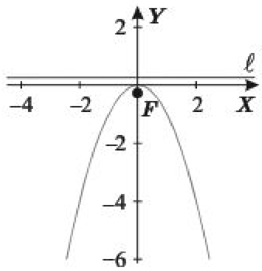


Figura 27

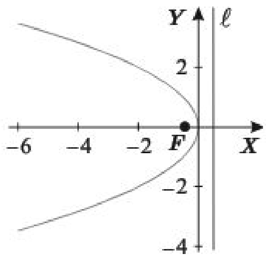


Figura 28

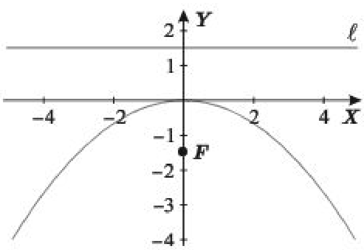


Figura 29

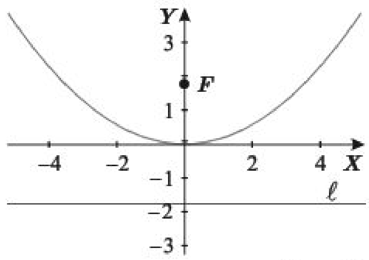


Figura 30

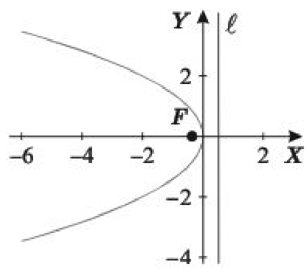


Figura 31

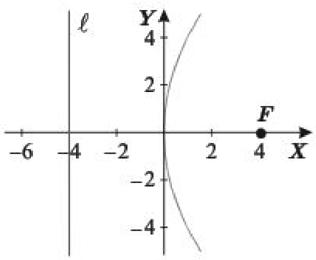


Figura 32

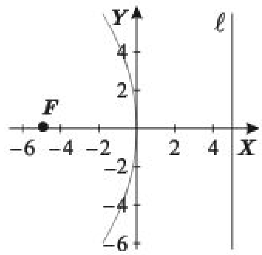


Figura 33

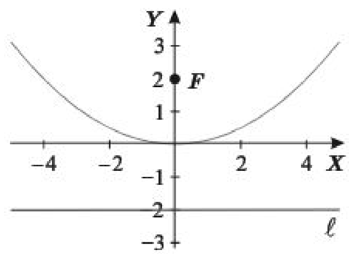


Figura 34

19. $x^2=4\left(\frac{1}{3}\right)y$ (figura 35). **21.** (figura 36). **23.** $y^2=-4\left(\frac{1}{6}\right)x$ (figura 37).

25. $y^2=10x$ (figura 38). **27.** $2x^2+2y^2-3x-4y=0$ (figura 39).

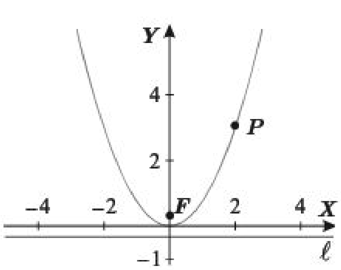


Figura 35

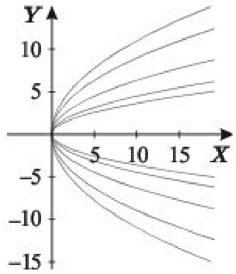


Figura 36

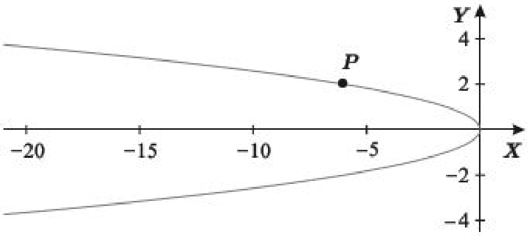


Figura 37

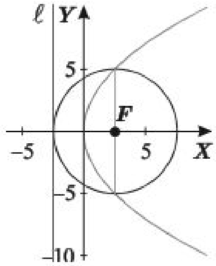


Figura 38

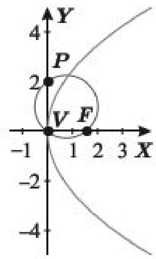


Figura 39

Página 228

1. $(x+3)^2=12(y+5)$ (figura 40). **3.** $(y-4)^2=4x$ (figura 41).

5. $(y+2)^2=-10\left(x-\frac{5}{2}\right)$ (figura 42). **7.** $(x-3)^2=-\frac{4}{3}\left(y-\frac{5}{3}\right)$ (figura 43).

9. $(x+4)^2=-8(y+1)$ (figura 44). **11.** $(x+1)^2=\frac{4}{7}(y+1)$ (figura 45).

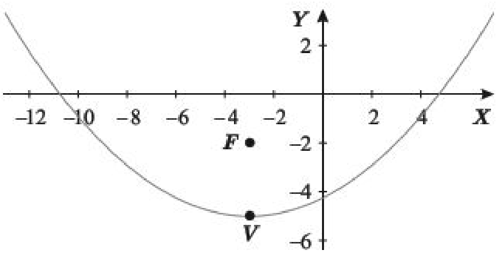


Figura 40

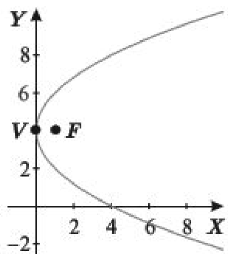


Figura 41

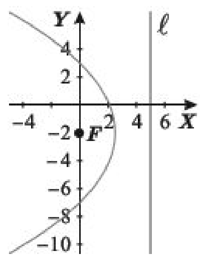


Figura 42

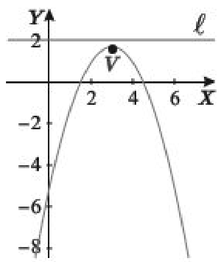


Figura 43

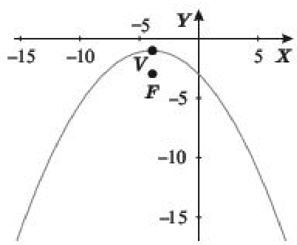


Figura 44

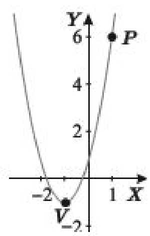


Figura 45

13. Hay dos soluciones: $(y-5)^2 = \frac{10}{3}\left(x+\frac{23}{6}\right)$ (figura 46) y $(y-5)^2 = -\frac{10}{3}\left(x+\frac{13}{6}\right)$ (figura 47). **15.** $V(6,4)$, $F(8,4)$, directriz $x=4$ (figura 48). **17.** $V(2,-1)$, $F(-3,-1)$, directriz $x=7$ (figura 49). **19.** $V(3,30)$, $F\left(3,30-\frac{1}{48}\right)$, directriz $y=30+\frac{1}{48}$ (figura 50). **21.** $V(1,-5)$, $F(7,-5)$, directriz $x=-5$ (figura 51). **23.** $(x+1)^2+(y+1)^2=25$ (figura 52). **25.** $P(-1,-8)$ y $Q(3,16)$ (figura 53). **27.** $P\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ y $Q(5,31)$ (figura 54). **29.** $P(1,4)$ y $Q(13,10)$ (figura 55). **31.** No hay intersección entre la recta y la parábola (figura 56). **33.** $P(-3,0)$ (figura 57).

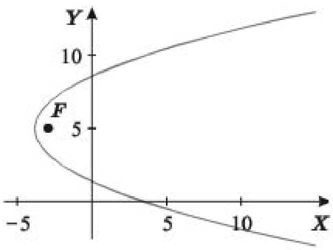


Figura 46

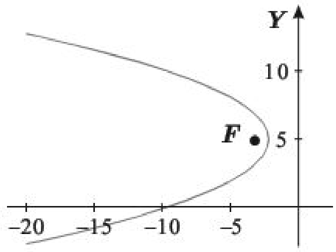


Figura 47

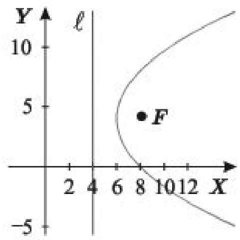


Figura 48

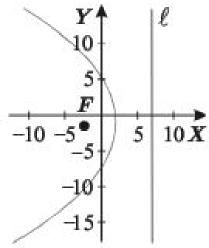


Figura 49

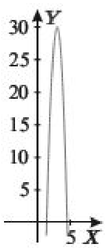


Figura 50

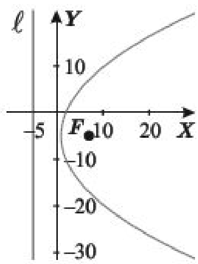


Figura 51

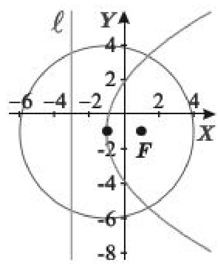


Figura 52

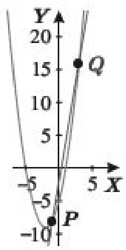


Figura 53

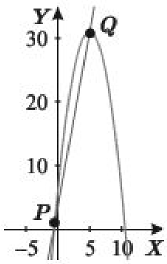


Figura 54

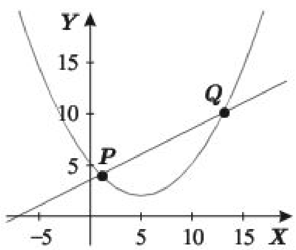


Figura 55

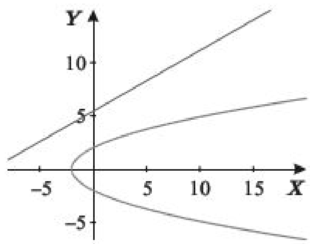


Figura 56

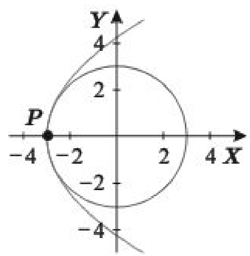
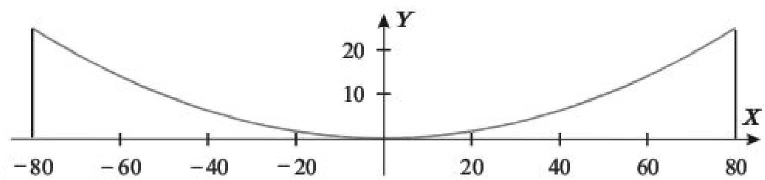


Figura 57

Página 235

1.



$x^2 = 256y$.

3. El puntal mide 11.111 m (figura 58). **5.** El puntal mide 25 m (figura 59). **7.** El puntal está a $\pm\sqrt{5000} \approx \pm 70.711$ m del centro (figura 60). **9.** El diámetro del

nuevo faro es $2\sqrt{48} \approx 13.9$ cm (figura 61). **11.** La profundidad de la antena es de 25 cm (figura 62). **13.** La altura máxima que alcanza el proyectil es 16 metros y la alcanza 2 segundos después de ser lanzado (figura 63). **15.** La altura máxima que alcanza el proyectil es 9 km y caerá a 6 km del cañón (figura 64).
17. $(x-250)^2 = -625(y-100)$ (figura 65).

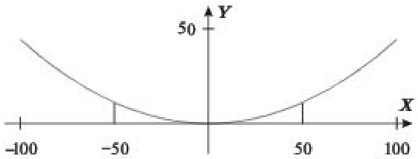


Figura 58

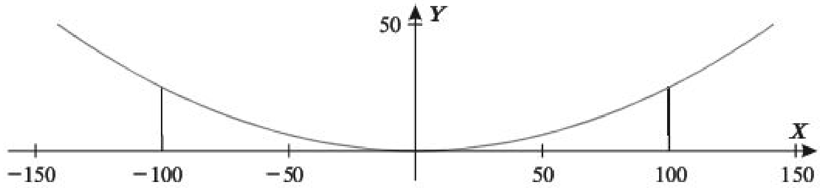


Figura 59

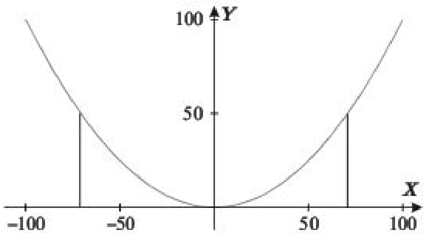


Figura 60

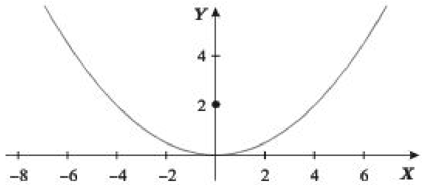


Figura 61

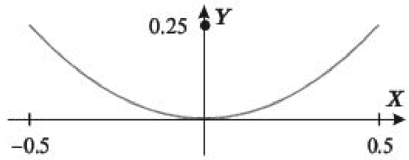


Figura 62

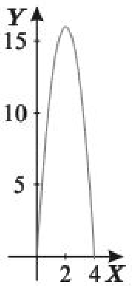


Figura 63

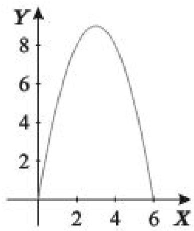


Figura 64

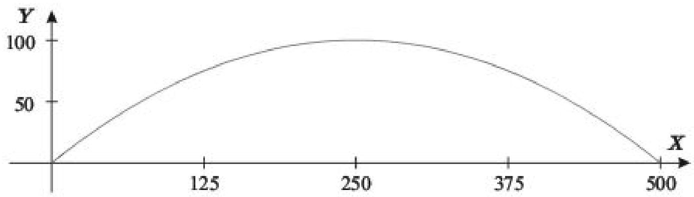


Figura 65

Página 240

1. El área máxima se obtiene cuando el rectángulo es un cuadrado de lado $a = \frac{7}{4}$.
3. Los números son 2 y 4. **5.** El cuadrado de la hipotenusa es mínimo cuando el triángulo rectángulo es isósceles y los catetos miden 25. **7.** Los números son 10 y 5.

Página 246

1. $(x-2)^2 + y^2 < 4$, $x^2 + (y+4)^2 < 25$, $x^2 < -4\left(\frac{1}{2}\right)y$ (figura 66). **3.** La región que determinan las desigualdades es la que se encuentra dentro de la parábola $(x-1)^2 = \frac{1}{6}(y-4)$, arriba de la recta $y = -2x+3$ y dentro del círculo $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 36$ (figura 67). **5.** $(y-3)^2 > 4\left(\frac{1}{2}\right)(x+2)$, $(y-5)^2 < -4\left(\frac{1}{3}\right)(x-2)$ (figura 68). **7.** $x^2 + y^2 < 4$, $y > 5x+2$, $x^2 < 4\left(\frac{1}{32}\right)(y-2)$ (figura 69). Las tres curvas se cortan en el punto $(0,2)$. No hay puntos que satisfagan las tres desigualdades. **9.** $(y-6)^2 < 4\left(\frac{1}{2}\right)(x+16)$, $(x+3)^2 < 4\left(\frac{5}{2}\right)(y+4)$, $(x+4)^2 > 4\left(\frac{7}{4}\right)(y-7)$ (figura 70). **11.** $(y-5)^2 > -4(4)(x+3)$, $(y-5)^2 > 4(4)(x+1)$, $(y-5)^2 < 4(1)(x+6)$ (figura 71).

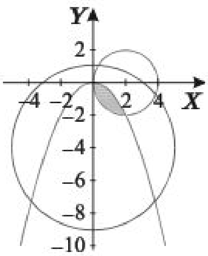


Figura 66

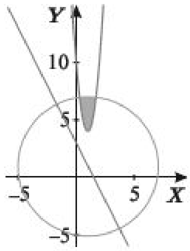


Figura 67

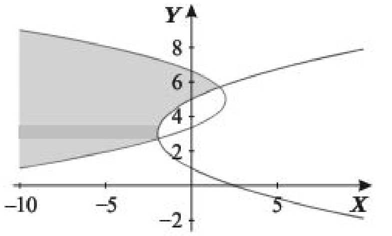


Figura 68

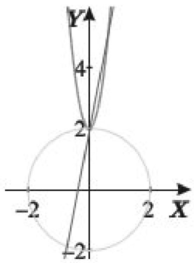


Figura 69

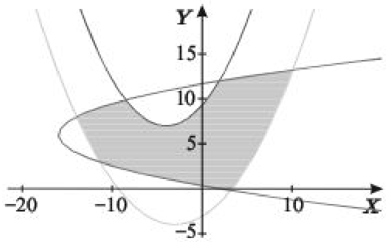


Figura 70

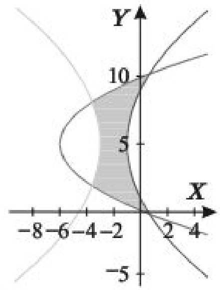


Figura 71

Página 257

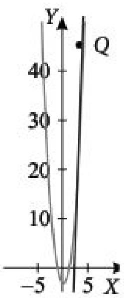


Figura 72

1. $y = 24x - 5$ (figura 72). **3.** $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$ (figura 73). **5.** $y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$ (figura 74). **7.** $y = -\frac{1}{4}x + 1$ (figura 75). **9.** $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (figura 76). **11.** Extremos lado recto: $Q_1(-4, 7)$ y $Q_2(-4, -1)$. Las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola en los extremos de su lado recto son $y = x + 11$ y $y = -x - 5$. El producto de las pendientes de las rectas tangentes es -1 las rectas son perpendiculares (figura 77).
13. La recta tangente a la parábola en el punto $Q\left(4, \frac{21}{5}\right)$ es $y = -\frac{1}{5}x + 25$. La directriz es $y = -1$; su punto de intersección con la recta tangente es $P(30, -1)$. La recta que contiene el lado recto es $y = 9$; su punto de intersección con la recta tangente es $P'(-20, 9)$, $d(P, F) = d(P', F) = 26$ (figura 78).

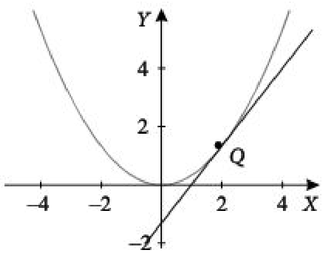


Figura 73

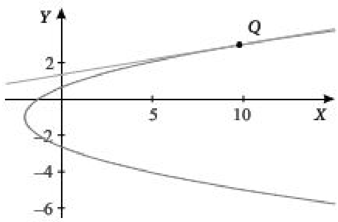


Figura 74

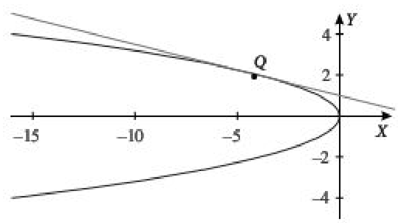


Figura 75

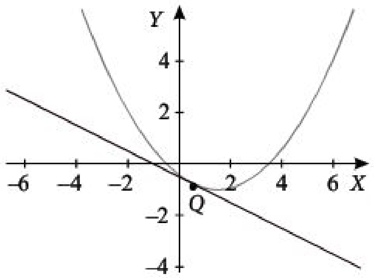


Figura 76

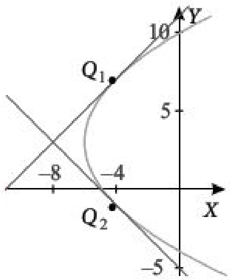


Figura 77

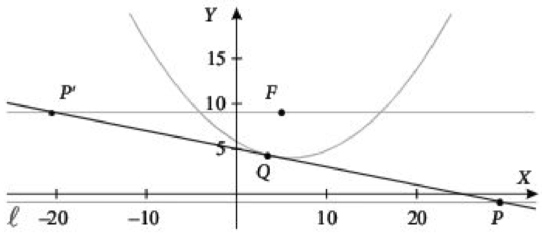


Figura 78

Página 260

1. $x(t)=t^2-12t+25,\quad y(t)=t$ (figura 79). **3.** $x(t)=-\frac{1}{6}t^2-\frac{5}{3}t-\frac{31}{6},\ y(t)=t$ (figura 80). **5.** $x(t)=t,\ y(t)=-\frac{1}{10}t^2-\frac{3}{5}t-\frac{49}{10}$ (figura 81). **7.** $(x+5)^2=4\left(\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{57}{2}\right)$ (figura 82). **9.** $(y+5)^2=4\left(\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{57}{2}\right)$ (figura 83). **11.** $(y-4)^2=-4(2)(x-2)$ (figura 84).

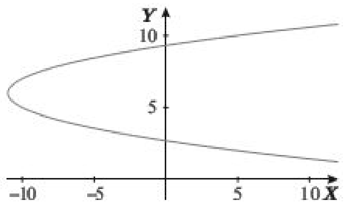


Figura 79

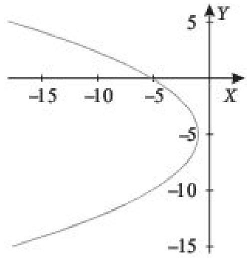


Figura 80

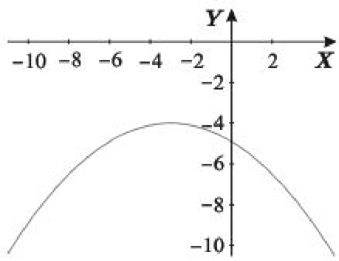


Figura 81

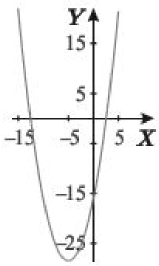


Figura 82

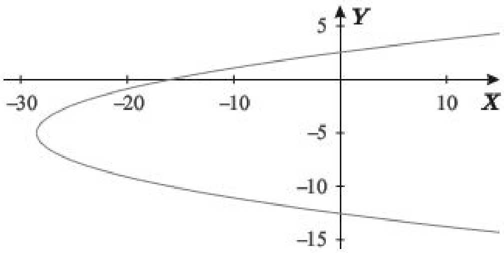


Figura 83

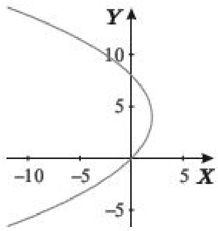


Figura 84

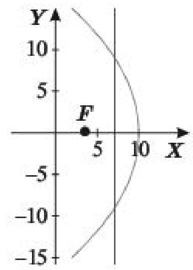


Figura 85

Página 262

1. $y^2=-4(7)(x-10)$ (figura 85).

Ejercicios de repaso impares de la página 266

1. $(y-3)^2=4(1)(x-1)$ (figura 86). **3.** $V(3,-2), F(3,-1)$, directriz: $y=-3$ (figura 87). **5.** $x^2=-24(y-7)$ (figura 88). **7.** Ecuación de la recta tangente: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Ecuación de la recta perpendicular a la tangente que pasa por P: $y=-2x+3$. $A(-1,0), B\left(\frac{3}{2},0\right),\ d(A,F)=\frac{5}{4}, d(B,F)=\frac{5}{4}$ (figura 89). **9.** Recta tangente en

$P(1,0)$: $y=-x+1$. Recta tangente en $Q(-7,0)$: $y=x+7$. El producto de las pendientes de las rectas tangentes es -1 las rectas son perpendiculares (figura 90).
11. $P(6,8), Q(6,-8)$ (figura 91). **13. a.** $x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$ (figura 92).
b. $\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\left(y-\frac{17}{32}\right)^2=\left(\frac{25}{32}\right)^2$ (figura 93). **15.** Ecuación de la tangente en $P(2,2)$: $y=\frac{1}{2}x+1$. Ecuación de la recta perpendicular a la tangente: $y=-2x+6$ (figura 94).
17. $y-2=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}(x-6)$ (figura 95). **19.** $(x+5)^2=-4\left(\frac{13}{2}\right)\left(y-\frac{65}{26}\right)$ (figura 96).
21. 75.963 (figura 97).

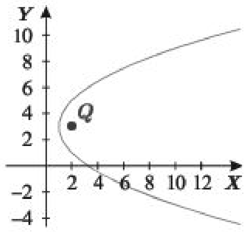


Figura 86

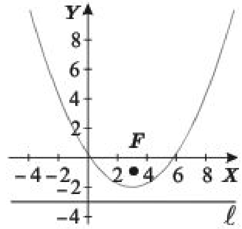


Figura 87

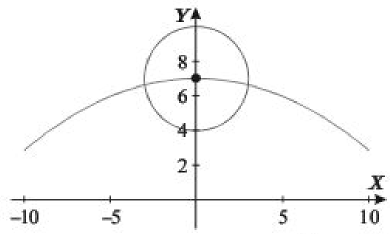


Figura 88

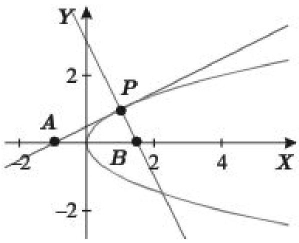


Figura 89

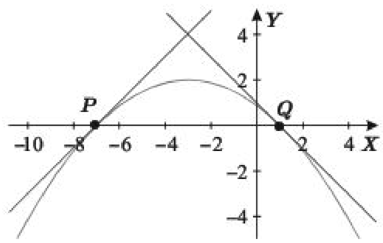


Figura 90

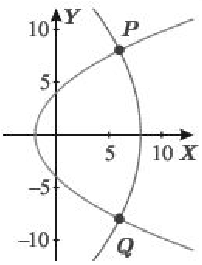


Figura 91

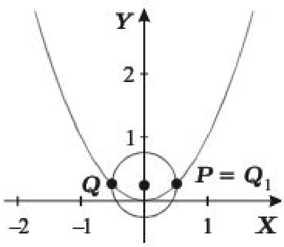


Figura 92

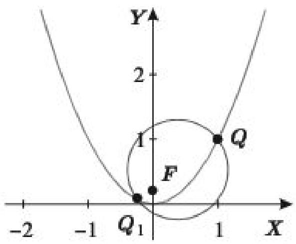


Figura 93

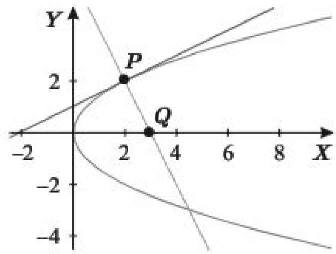


Figura 94

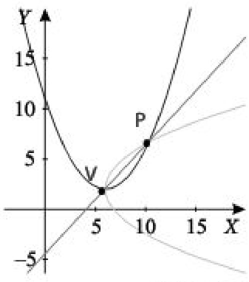


Figura 95

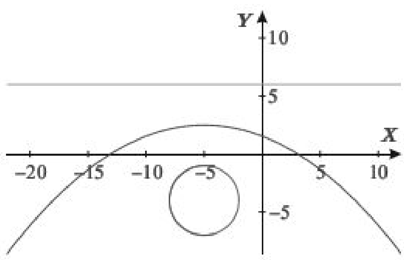


Figura 96

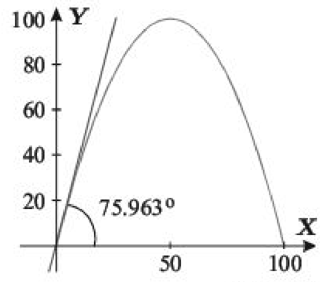


Figura 97

Autoevaluación

1. b. **2.** a. **3.** c. **4.** b. **5.** a. **6.** d. **7.** c.

Heteroevaluación

1. Escribimos la ecuación de la parábola en la forma estándar (completando un cuadrado):

$$\begin{aligned}
5y^2-12x-50y+101 &= 0 \\
5y^2-50y &= 12x-101 && \leftarrow \text{Cuidado con los signos.} \\
5\left(y^2-10y+25\right) &= 12x-101+5(25) && \leftarrow \text{Sumar del lado derecho } 5(25). \\
5(y-5)^2 &= 12x+24 \\
5(y-5)^2 &= 12(x+2) \\
(y-5)^2 &= \tfrac{12}{5}(x+2) && \leftarrow \text{El 5 pasa dividiendo.} \\
(y-5)^2 &= 4\left(\tfrac{3}{5}\right)(x+2).
\end{aligned}$$

La parábola es horizontal y abre hacia la derecha. El vértice $V(-2,5)$ y el parámetro $p=\frac{3}{5}$.

La directriz tiene ecuación:

$$\begin{aligned}
x &= h-p \\
x &= -2-\frac{3}{5} \\
&= -\frac{13}{5}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la directriz tiene ecuación $x=-\frac{13}{5}$.

2. Puesto que la parábola es vertical, debe ser de la forma:

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k),$$

donde (h,k) son las coordenadas del vértice, es decir,

$$\begin{aligned}
\left(x-(-7)\right)^2 &= \pm 4p(y-3) && \leftarrow \text{Cuidado con los signos.} \\
(x+7)^2 &= \pm 4p(y-3) && \leftarrow \text{Recuerda que } -(-7)=7.
\end{aligned}$$

Puesto que la parábola pasa por el punto $(-1,6)$, sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}
(-1+7)^2 &= \pm 4p(6-3) && \leftarrow \text{Cuidado con los signos.} \\
6^2 &= \pm 4(3)p.
\end{aligned}$$

Como 6^2 y el parámetro p son positivos, entonces solamente tiene sentido el signo positivo en el segundo miembro, es decir,

$$\begin{aligned}
36 &= 12p && \leftarrow \text{El 12 pasa dividiendo.} \\
3 &= p.
\end{aligned}$$

de donde:

$$(x+7)^2 = 4(3)(y-3).$$

La ecuación de la parábola es:

$$(x+7)^2 = 12(y-3).$$

3. Puesto que la parábola abre a la izquierda, se trata de una parábola horizontal con ecuación:

$$(y-k)^2 = -4p(x-h),$$

donde (h,k) son las coordenadas del vértice y p es el parámetro. Por otra parte, puesto que el ancho focal es igual a 5, entonces:

$$\begin{aligned} 4p &= 5 \quad \leftarrow \text{ El 4 pasa dividiendo.} \\ p &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Como la parábola abre a la izquierda, el vértice se encuentra a la derecha del foco, a una distancia $\frac{5}{4}$ del mismo, es decir, las coordenadas del vértice son:

$$\left(\frac{19}{4}+\frac{5}{4},-1\right) = (6,-1).$$

De donde la ecuación buscada es $(y+1)^2 = -5(x-6)$.

4. Para encontrar el punto de tangencia, debemos encontrar el foco de la parábola con ecuación $y^2 - 24x + 7y - \frac{47}{4} = 0$, para lo cual la llevamos a la forma estándar:

$$\begin{aligned} y^2 - 24x + 7y - \tfrac{47}{4} &= 0 \\ y^2 + 7y + \frac{49}{4} - 24x - \tfrac{47}{4} &= \frac{49}{4} \quad \leftarrow \text{ Sumamos } \frac{49}{4} \text{ de ambos lados para no alterar la igualdad.} \\ \left(y+\frac{7}{2}\right)^2 &= 24x + \frac{47}{4} + \frac{49}{4} \quad \leftarrow \text{ Cuidado con los signos.} \\ \left(y+\frac{7}{2}\right)^2 &= 24x + 24 \\ \left(y+\frac{7}{2}\right)^2 &= 4(6)(x+1). \end{aligned}$$

Esta parábola es horizontal, abre hacia la derecha, tiene vértice en $V\left(-1,-\frac{7}{2}\right)$ y parámetro $p = 6$. Entonces el foco se encuentra seis unidades a la derecha del vértice, es decir:

Esta parábola es horizontal, abre hacia la derecha, tiene vértice en $V(-1,-\frac{7}{2})$ y parámetro $p=6$. Entonces. el foco se encuentra seis unidades a la derecha del vértice, es decir:

$$F\left(-1+6,-\frac{7}{2}\right)=F\left(5,-\frac{7}{2}\right).$$

Debemos calcular la ecuación de la recta tangente a la parábola

$x^2-4x+2y+2=0$ en el punto de coordenadas $Q\left(5,-\frac{7}{2}\right)$.

Escribimos la ecuación de la parábola en la forma estándar:

$$\begin{aligned}
x^2-4x+2y+2 &= 0 \\
x^2-4x+4+2y+2 &= 4 && \leftarrow \textbf{Sumanos 4 de ambos lados para no alterar la igualdad.} \\
(x-2)^2 &= 4-2y-2 && \leftarrow \textbf{Cuidado con los signos.} \\
(x-2)^2 &= -2y+2 \\
(x-2)^2 &= -4\left(\frac{1}{2}\right)(y-1).
\end{aligned}$$

Se trata de una parábola vertical que abre hacia abajo, tiene vértice en $V(2,1)$ y parámetro $p=\frac{1}{2}$.

Recordamos que la ecuación de la recta tangente a la parábola vertical con vértice en $V(h,k)$ en el punto $Q(x_1,y_1)$ es:

$$y-y_1=\frac{2(y_1-k)}{x_1-h}(x-x_1).$$

Sustituyendo $Q\left(5,-\frac{7}{2}\right)$ y $V(2,1)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
y-\left(-\frac{7}{2}\right) &= \frac{2\left(-\frac{7}{2}-1\right)}{5-2}(x-5) && \leftarrow \textbf{Recuerda que } -\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}. \\
y+\frac{7}{2} &= \frac{-9}{3}(x-5) && \leftarrow \text{Cuidado con las operaciones.} \\
y &= -3(x-5)-\frac{7}{2} && \leftarrow \text{El } \frac{7}{2} \text{ pasa restando.} \\
y &= -3x+\frac{23}{2} && \leftarrow \text{Cuidado con los signos.}
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente es $y=-3x+\frac{23}{2}$.

Unidad 6. La elipse

Ejercicios impares

Página 277

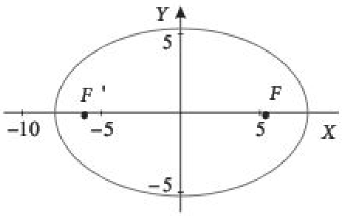


Figura 98

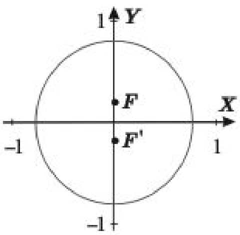


Figura 99

1. $7x^2+16y^2-448=0$ (figura 98). **3.** $80x^2+75y^2-48=0$ (figura 99). **5.** $\frac{x^2}{275}+\frac{y^2}{900}=1$ (figura 100). **7.** $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{5}{16}}=1$ (figura 101). **9.** Hay dos soluciones. Horizontal: $\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$ (figura 102). Vertical: $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$ (figura 103). **11.** Hay dos soluciones. Horizontal: $\frac{x^2}{\frac{121}{4}}+\frac{y^2}{16}=1$ (figura 104). Vertical: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{121}{4}}=1$ (figura 105). **13.** Hay dos soluciones. Horizontal: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (figura 106). Vertical: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (figura 107). **15.** Vértices: $V(5,0)$, $V'(-5,0)$. Focos: $F(\sqrt{21},0)\approx F(4.58,0)$, $F'(-\sqrt{21},0)\approx F'(-4.58,0)$ (figura 108). **17.** Vértices: $V(4,0)$, $V'(-4,0)$. Focos: $F(2\sqrt{3},0)\approx F(3.46,0)$, $F'(-2\sqrt{3},0)\approx F'(-3.46,0)$ (figura 109). **19.** Vértices: $V(0,9)$, $V'(0,-9)$. Focos: $F(0,4\sqrt{2})\approx F(0,5.66)$, $F'(0,-4\sqrt{2})\approx F'(0,-5.66)$ (figura 110).

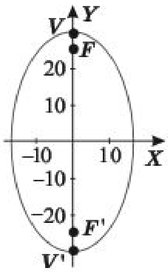


Figura 100

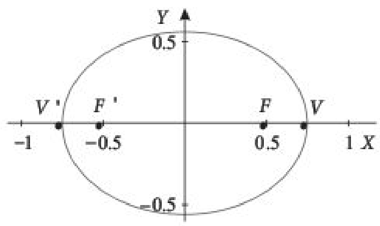


Figura 101

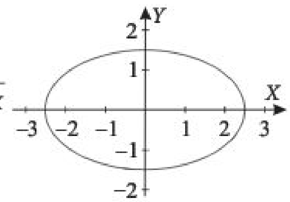


Figura 102

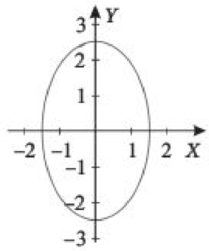


Figura 103

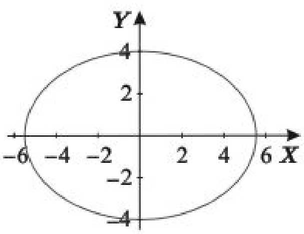


Figura 104

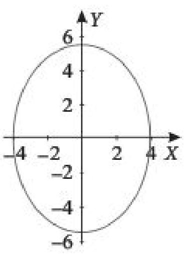


Figura 105

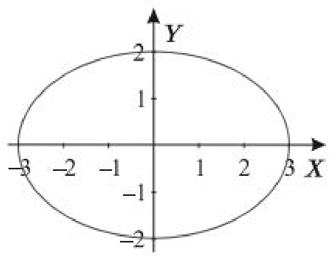


Figura 106

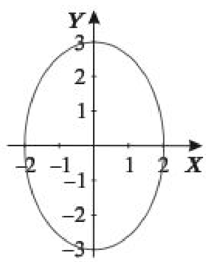


Figura 107

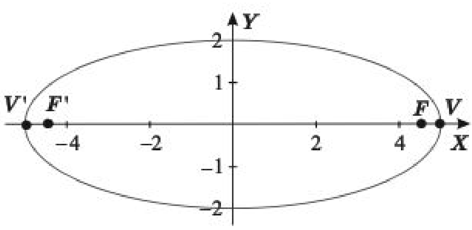


Figura 108

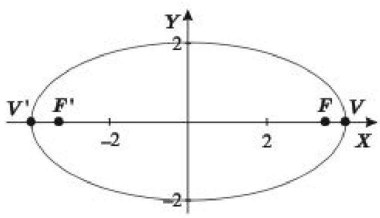


Figura 109

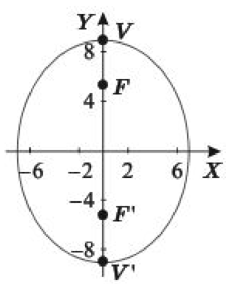


Figura 110

21. Vértices: $V(8,0)$, $V'(-8,0)$. Focos: $F(3\sqrt{7},0) \approx F(7.94,0)$, $F'(-3\sqrt{7},0) \approx F'(-7.94,0)$ (figura 111). **23.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1$ (figura 112). **25.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$ (figura 113).

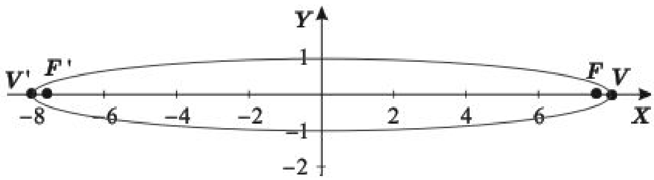


Figura 111

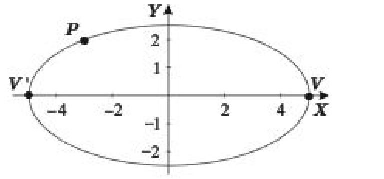


Figura 112

Página 285

1. $e=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$ (figura 114). **3.** $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0.94$ (figura 115). **5.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{60}=1$, $\frac{x^2}{196}+\frac{y^2}{192}=1$, $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{252}=1$, $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{396}=1$ (figura 116). **7.** $\frac{x^2}{\frac{1225}{16}}+\frac{y^2}{\frac{441}{16}}=1$ (figura 117).

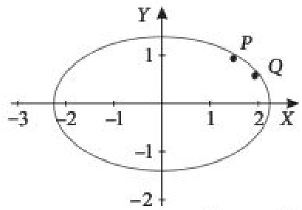


Figura 113

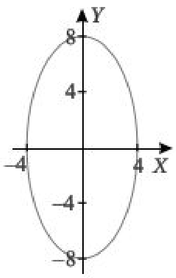


Figura 114

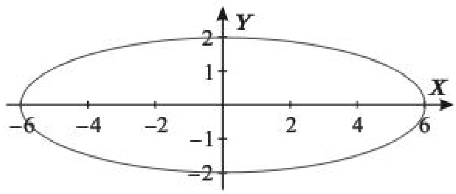


Figura 115

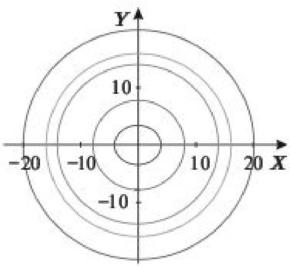


Figura 116

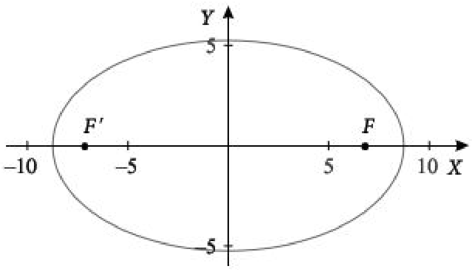


Figura 117

Página 294

1. $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$; $F\left(5,3+\sqrt{5}\right)\approx F(5,5.24)$, $F'\left(5,3-\sqrt{5}\right)\approx F'(5,0.76)$; $V(5,6)$, $V'(5,0)$; $C(5,3)$ (figura 118). **3.** $\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-6)^2}{1}=1$; $F\left(-2+\sqrt{35},6\right)\approx F(3.92,6)$, $F'\left(-2-\sqrt{35},6\right)\approx F'(-7.92,6)$; $V(4,6)$, $V'(-8,6)$; $C(-2,6)$ (figura 119).
5. $\frac{(x-6)^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$; $F\left(6,1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx F(6,1.71)$, $F'\left(6,1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\approx F'(6,0.29)$; $V(6,2)$, $V'(6,0)$; $C(6,1)$ (figura 120).

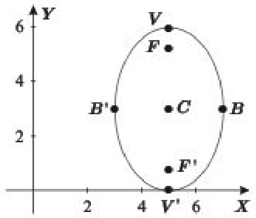


Figura 116

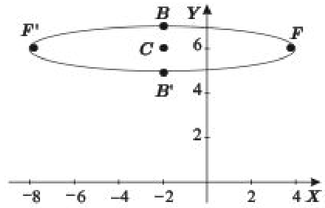


Figura 119

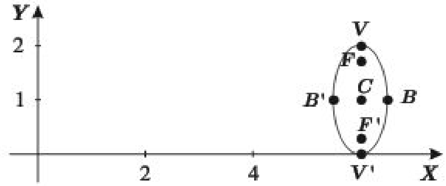


Figura 120

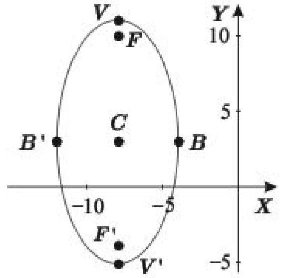


Figura 121

7. $\frac{(x+8)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{64}=1$; $F\left(-8,3+4\sqrt{3}\right)\approx F(-8,9.93)$, $F'\left(-8,3-4\sqrt{3}\right)\approx F'(-8,-3.93)$; $V(-8,11)$, $V'(-8,-5)$; $C(-8,3)$ (figura 121). **9.** $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$; $F\left(1,2+\sqrt{7}\right)\approx F(1,4.65)$, $F'\left(1,2-\sqrt{7}\right)\approx F'(1,-0.65)$; $V(1,6)$, $V'(1,-2)$; $C(1,2)$ (figura 122). **11.** No es una elipse es solo el punto $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$. **13.** $\frac{(x-8)^2}{16}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$ (figura 123). **15.** $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-4)^2}{\frac{135}{16}}=1$ (figura 124). **17.** $\frac{(x-1)^2}{4704}+\frac{(y-4)^2}{4900}=1$ (figura 125). **19.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ (figura 126). **21.** $\frac{(x-9)^2}{\frac{81}{4}}+\frac{(y-3)^2}{\frac{65}{4}}=1$ (figura 127). **23.** $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-6)^2}{1}=1$ (figura 128). **25.** $P(0,4)$ y $Q(0,-4)$ (figura 129). **27.** $P\left(-6+2\sqrt{2},3\right)\approx P(-3.17,3)$, $Q\left(-6+2\sqrt{2},5\right)\approx Q(-3.17,5)$, $R\left(-6-2\sqrt{2},5\right)\approx R(-8.83,5)$, $S\left(-6-2\sqrt{2},3\right)\approx S(-8.83,3)$ (figura 130). **29.** $(x-4)^2+(y+3)^2=4$ (figura 131). **31.** $(x+4)^2=-4\left(\frac{1}{8}\right)(y-8)$ (figura 132). **33.** Las ecuaciones de las directrices son $x=\frac{223}{18}$ y $x=-\frac{227}{18}$ (figura 133).

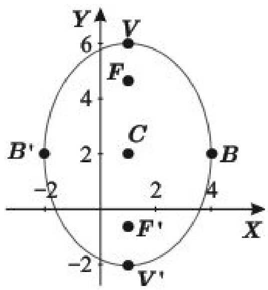


Figura 122

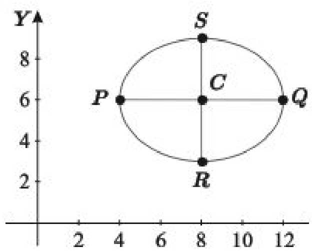


Figura 123

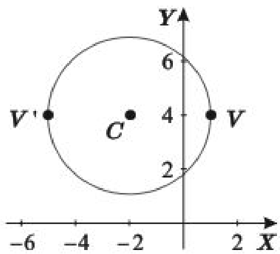


Figura 124

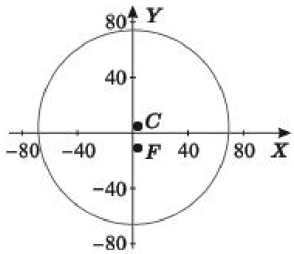


Figura 125

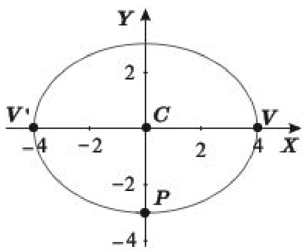


Figura 126

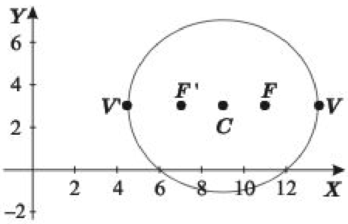


Figura 127

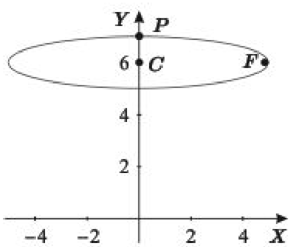


Figura 128

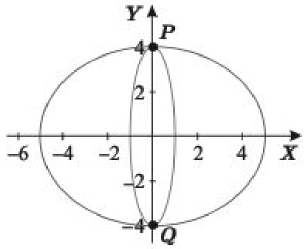


Figura 129

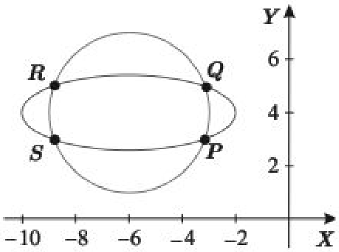


Figura 130

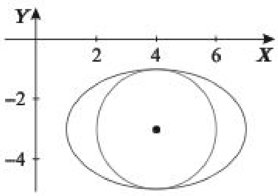


Figura 131

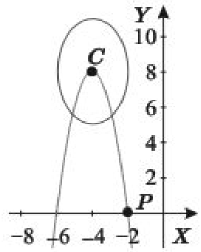


Figura 132

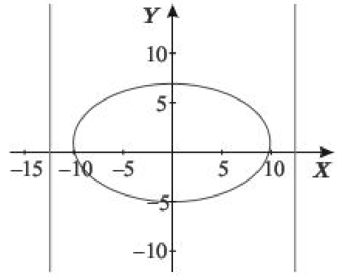


Figura 133

Página 300

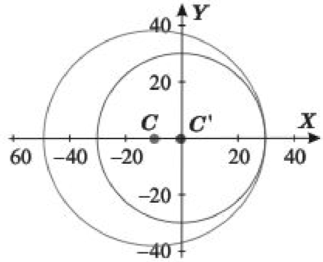


Figura 134

1. a. El radio menor es aproximadamente 1.51 UA. **b.** El radio menor es aproximadamente 0.38 UA. **c.** El radio menor es aproximadamente 38.19 UA. 3. La distancia media del cometa Halley al Sol es aproximadamente 17.94 UA. **5.** La órbita de Neptuno es la elipse con ecuación: $\frac{(x+0.27)^2}{(30.06)^2}+\frac{y^2}{903.53}=1$. La órbita de Plutón es la elipse con ecuación: $\frac{(x+9.86)^2}{(39.44)^2}+\frac{y^2}{1458.29}=1$ (figura 134). **7.** El eje mayor mide $2\sqrt{8}\approx 5.66$ m. **9.** $\frac{x^2}{(33.325)^2}+\frac{y^2}{(17.525)^2}=1$ (figura 135).

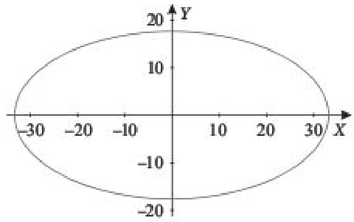


Figura 135

Página 303

1. $21x^2-12xy+16y^2-78x-92y+1=0$ (figura 136).

3. $33x^2+8xy+48y^2-1568=0$ (figura 137). **5.** $8x^2+9y^2+96x+54y+297=0$ (figura 138). **7.** $21x^2-8xy+21y^2+202x-848y+8156=0$ (figura 139).

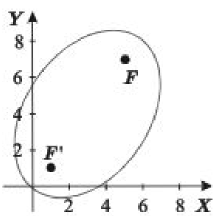


Figura 136

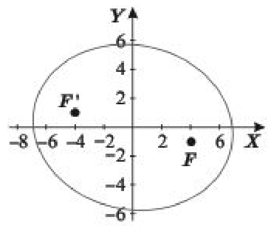


Figura 137

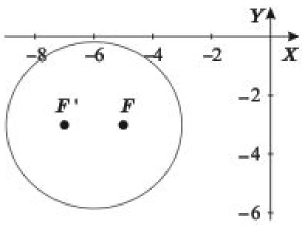


Figura 138

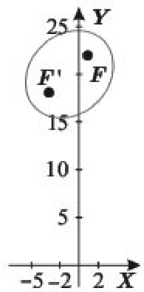


Figura 139

Página 308

1. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1$, $(x-2)^2+y^2<9$ (figura 140). **3.** $x^2<y$, $(x+3)^2+(y-3)^2>16$, $y<-\frac{6}{5}x+\frac{24}{5}$ (figura 141). **5.** $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+6)^2}{4}>1$, $(y+5)^2<8(x+6)$, $(y-6)^2<-8(x+3)$ (figura 142) **7.** $(x-5)^2+\frac{(y+2)^2}{16}<1$, $(x-5)^2+(y+3)^2>1$, $(y+2)^2>6(x-4)$ (figura 143).

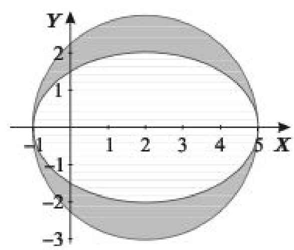


Figura 140

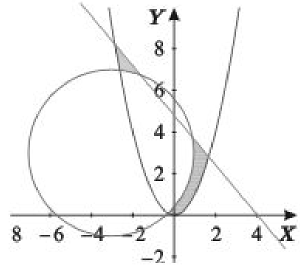


Figura 141

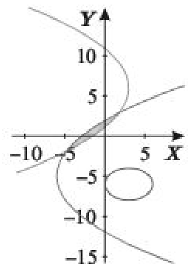


Figura 142

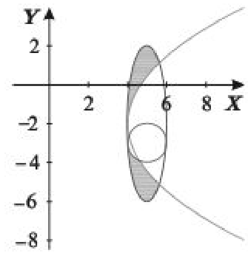


Figura 143

Página 315

1. $y=10$ (figura 144). **3.** $y=-\frac{2}{3}x+3$ (figura 145). **5.** $y=-\sqrt{5}x-\sqrt{5}+3$ (figura 146). **7.** Ecuación de la recta tangente en el punto P: $y=-\frac{9}{4\sqrt{7}}x+\frac{75}{2\sqrt{7}}+2$; ecuación de la recta tangente en el vértice $V(14,2)$: $x=14$; punto de intersección de las rectas tangentes: $Q\left(14,2+\frac{6}{\sqrt{7}}\right)$; pendiente de la recta que pasa por el vértice $V'(-2,2)$ y el punto P: $m_1=\frac{3}{28}\sqrt{7}$; pendiente de la recta que pasa por el punto Q y el centro C: $m_2=\frac{3}{28}\sqrt{7}$. Las dos últimas rectas son paralelas (figura 147). **9.** $12x-5y+121-60\sqrt{2}=0$, $12x-5y+121+60\sqrt{2}=0$ (figura 148). **11.** $2x+\sqrt{2}y-18+2\sqrt{2}=0$, $y+4=0$ (figura 149).

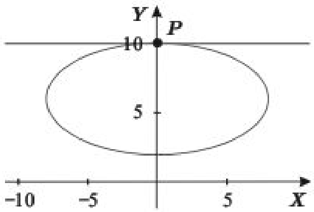


Figura 144

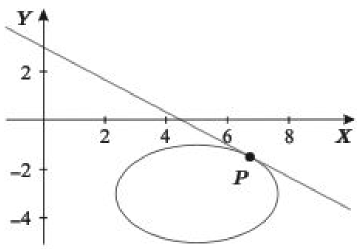


Figura 145

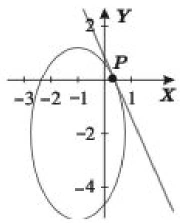


Figura 146

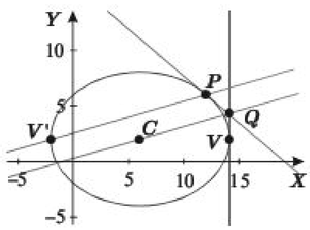


Figura 147

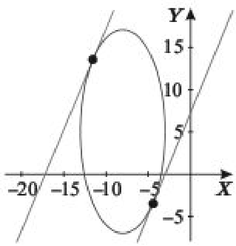


Figura 148

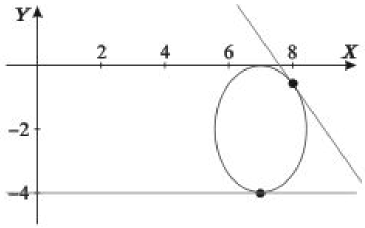


Figura 149

Página 320

1. $x^2+4y^2+6x-40y+105=0$ (figura 150).

3. $144x^2+784y^2-144x+1176y-6579=0$ (figura 151). **5.** $64x^2+y^2-64=0$ (figura 152). **7.** $49x^2+441y^2-14x+882y+406=0$ (figura 153).

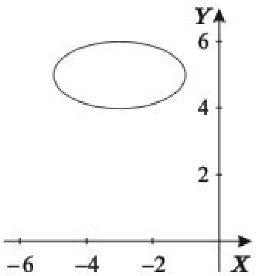


Figura 150

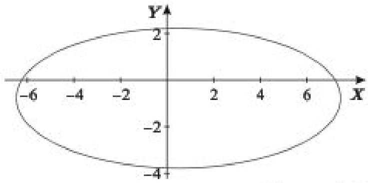


Figura 151

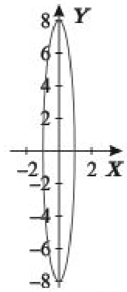


Figura 152

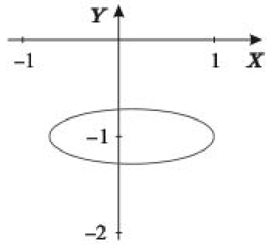


Figura 153

9. $9x^2+14400y^2-6\sqrt{2}x-223=0$ (figura 154). En la figura las escalas en los ejes no son iguales. **11.** Unas ecuaciones paramétricas de la elipse son $\left(-3+3\cos t, 1+\operatorname{sen} t\right)$ (figura 155). **13.** Unas ecuaciones paramétricas de la elipse son $\left(2\cos t, 4\operatorname{sen} t\right)$ (figura 156). **15.** Unas ecuaciones paramétricas de la elipse son $\left(-4+3\cos t, -2+2\operatorname{sen} t\right)$ (figura 157). **17.** Unas ecuaciones paramétricas de la elipse son $\left(-\frac{1}{2}+\cos t, \frac{2}{7}+\sqrt{6}\operatorname{sen} t\right)$ (figura 158). **19.** Unas ecuaciones paramétricas de la elipse son $\left(8+6\cos t, \sqrt{18}\operatorname{sen} t\right)$ (figura 159). **21.** $V'\left(0,-4\right)$, $V\left(0,4\right)$ (figura 160). **23.** $C\left(1,-2\right)$ (figura 161). **25.** $e=\frac{4}{\sqrt{18}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (figura 162). **27.** $F'\left(-5,-10\right)$, $F\left(-5,6\right)$ (figura 163). **29.** $\left(-1+2\cos t, 2+3\operatorname{sen} t\right)$ (figura 164).

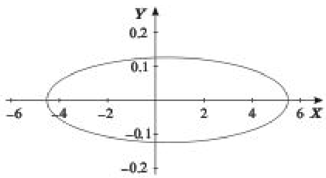


Figura 154

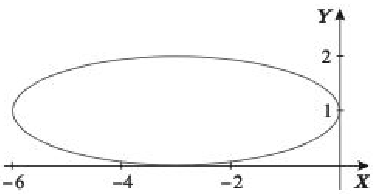


Figura 155

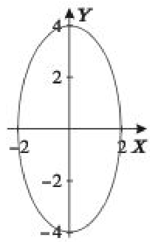


Figura 156

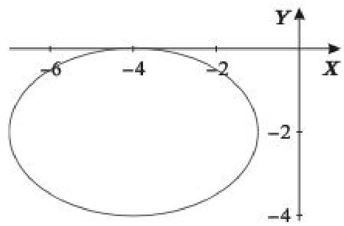


Figura 157

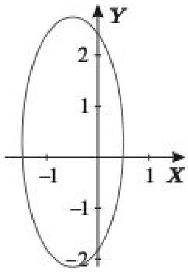


Figura 158

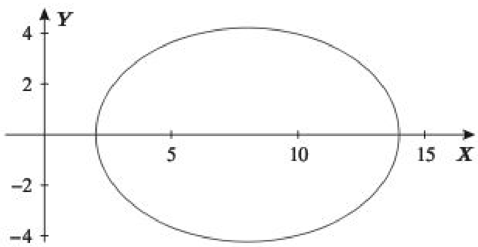


Figura 159

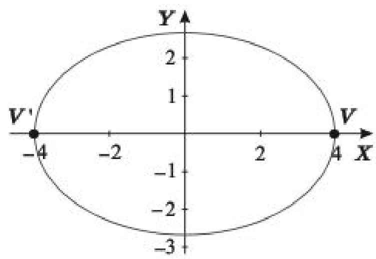


Figura 160

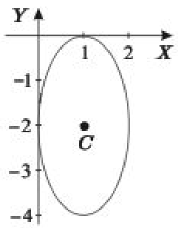


Figura 161

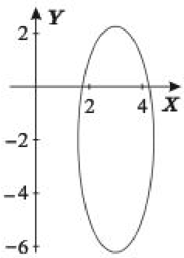


Figura 162

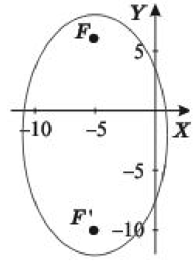


Figura 163

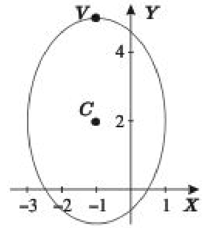


Figura 164

Página 323

1. El lugar geométrico está contenido en la elipse vertical $\frac{x^2}{\frac{9}{2}}+\frac{\left(y-\frac{13}{4}\right)^2}{\frac{81}{16}}=1$ (figura 165).

3. El lugar geométrico está contenido en la elipse horizontal $\frac{\left(x+\frac{9}{2}\right)^2}{49}+\frac{y^2}{\frac{147}{4}}=1$ (figura 166).

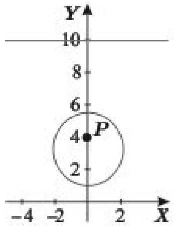


Figura 165

Ejercicios de repaso impares de la página 326

1. Puntos de tangencia: $Q\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, $Q'\left(-2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$. Rectas tangentes $y=-\frac{3}{4\sqrt{3}}x+\frac{6}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{3}{4\sqrt{3}}x+\frac{6}{\sqrt{3}}$ (figura 167). **3.** Rectas tangentes: $y=\frac{3}{20}x+\frac{47}{20}$, $y=\frac{3}{20}x-\frac{3}{20}$ (figura 168). **5.** $\frac{x^2}{\frac{16}{9}}+y^2=1$. Centro: $C(0,0)$. Como $\frac{16}{9}>1$, la elipse es horizontal. $e=\frac{\sqrt{7}}{4}\approx 0.67$ (figura 169). **7.** $P_1(0,3)$, $P_2(0,-3)$, $F(4,0)$ y $F'(-4,0)$ (figura 170). **9.** Ecuación de la recta tangente en $V(2,0)$: $y=0$. Ecuación de la recta tangente en $P(4,-4)$: $x=4$. $Q(4,0)$. Ecuación de la recta que pasa por $P(4,-4)$ y $V'(2,-8)$: $y=2x-12$. Ecuación de la recta que pasa por $Q(4,0)$ y $C(2,-4)$: $y=2x-8$. Estas dos últimas rectas tienen pendiente 2, son paralelas (figura 171). **11.** $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{26}=1$ (figura 172), $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{27}=1$ (figura 173), $\frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{28}=1$ (figura 174) $F(0,3)$, $F(0,-3)$. Hay una infinidad de elipses con los mismos focos. **13.** La altura del centro del puente debe medir más de 3.15 m. **15.** $y=-\sqrt{2}x+7\sqrt{2}-4-\sqrt{6}$, $y=\sqrt{2}x-7\sqrt{2}-4-\sqrt{6}$, $y=\sqrt{2}x-7\sqrt{2}-4+\sqrt{6}$, $y=-\sqrt{2}x+7\sqrt{2}-4+\sqrt{6}$ (figura 175). **17.** $F'(6,-10)$, $F(6,2)$. Ecuación recta tangente en P: $\frac{5}{2}\sqrt{6}x+y-15\sqrt{6}-46=0$. Distancia de F a la recta tangente: $\frac{44\sqrt{2}}{\sqrt{77}}$. Distancia de F' a la recta tangente: $\frac{56\sqrt{2}}{\sqrt{77}}$ (figura 176). **19.** $\frac{(x-3)^2}{4}+y^2<1$, $(x-5)^2+(y-1)^2>1$, $x^2+(y+1)^2>1$, $(x-4)^2>4(y+1)$ (figura 177).

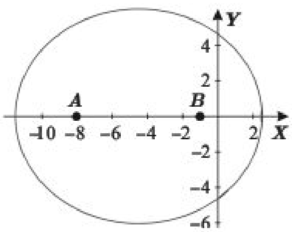


Figura 166

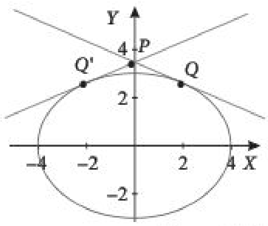


Figura 167

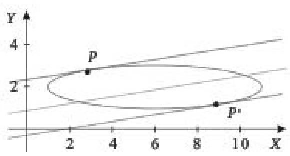


Figura 168

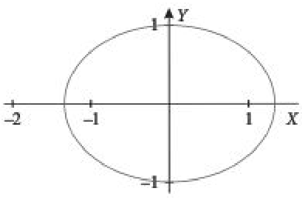


Figura 169

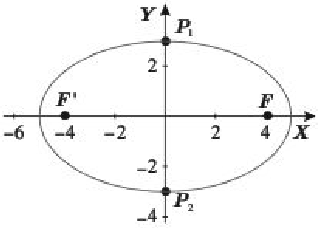


Figura 170

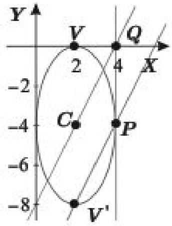


Figura 171

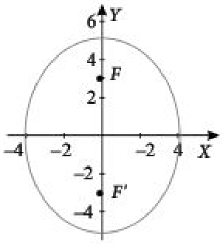


Figura 172

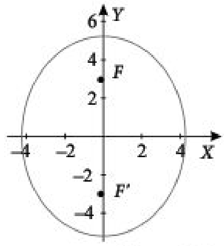


Figura 173

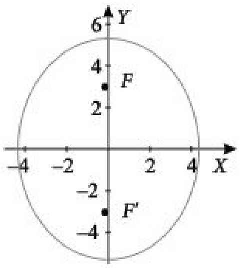


Figura 174

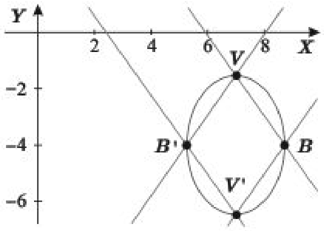


Figura 175

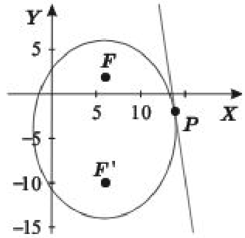


Figura 176

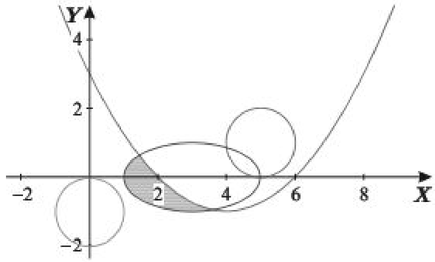


Figura 177

Autoevaluación

1. c. **2.** b. **3.** b. **4.** c. **5.** d. **6.** b. **7.** a. **8.** d.

Heteroevaluación

1. Escribimos la ecuación en la forma simétrica:

$$\begin{aligned}
9x^2+16y^2+90x-64y-287 &= 0 \\
9x^2+90x+16y^2-64y &= 287 && \leftarrow \text{ El 287 pasa sumando.} \\
9\left(x^2+10x\right)+16\left(y^2-4y\right) &= 287 \\
9\left(x^2+10x+25\right)+16\left(y^2-4y+4\right) &= 287+9\left(25\right)+16\left(4\right) && \leftarrow \text{ Sumamos de ambos lados para no alterar la igualdad.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9\left(x+5\right)^2+16\left(y-2\right)^2 &= 576 \\
9\frac{\left(x+5\right)^2}{576}+16\frac{\left(y-2\right)^2}{576} &= 1 && \leftarrow \text{ El 576 pasa dividiendo.} \\
\frac{\left(x+5\right)^2}{\frac{576}{9}}+\frac{\left(y-2\right)^2}{\frac{576}{16}} &= 1 \\
\frac{\left(x+5\right)^2}{64}+\frac{\left(y-2\right)^2}{36} &= 1.
\end{aligned}$$

La elipse es horizontal, tiene centro en $C\left(-5,2\right)$, $a^2=64$ y $b^2=36$, entonces:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 64 - 36 = 28.$$

Puesto que en una elipse horizontal con centro en $C(h,k)$, los focos son:

$$F'(h-c,k) \text{ y } F(h+c,k),$$

sustituyendo tenemos:

$$F'\left(-5-\sqrt{28},2\right) = F'\left(-5-2\sqrt{7},2\right) \text{ y } F\left(-5+\sqrt{28},2\right) = F\left(-5+2\sqrt{7},2\right).$$

2. Escribimos la ecuación en la forma simétrica:

$$\begin{aligned}
169x^2+144y^2-1352x+864y-20336 &= 0 \\
169x^2-1352x+144y^2+864y &= 20336 && \leftarrow \text{El 20336 pasa sumando.} \\
169\left(x^2-8x\right)+144\left(y^2+6y\right) &= 20336 \\
169\left(x^2-8x+16\right)+144\left(y^2+6y+9\right) &= 20336+169(16)+144(9) && \leftarrow \text{Sumamos de ambos lados para no alterar la igualdad.} \\
169(x-4)^2+144(y+3)^2 &= 24336 \\
169\frac{(x-4)^2}{24336}+144\frac{(y+3)^2}{24336} &= 1 && \leftarrow \text{El 24336 pasa dividiendo.} \\
\frac{(x-4)^2}{\frac{24336}{169}}+\frac{(y+3)^2}{\frac{24336}{144}} &= 1 \\
\frac{(x-4)^2}{144}+\frac{(y+3)^2}{169} &= 1.
\end{aligned}$$

La elipse es vertical, tiene centro en $C(4,-3)$, $a^2 = 169$ y $b^2 = 144$, entonces:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 144 = 25.$$

Así, $c = 5$. Puesto que la excentricidad se define como $e = \frac{c}{a}$, sustituyendo tenemos que:

$$e = \frac{5}{13} \approx 0.38.$$

3. Como ambos focos tienen abscisa -3, se trata de una elipse vertical, por lo que su ecuación debe ser de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1. \tag{6.32}$$

Puesto que el semieje mayor mide $\sqrt{10}$, tenemos que $a=\sqrt{10}$. Encontrando el punto medio del segmento que une los focos, hallamos las coordenadas (h,k) del centro:

$$(h,k)=\left(\frac{-3-3}{2},\frac{-3+1}{2}\right)=(-3,-1).$$

Observamos que la recta $y=-6$ es horizontal y se encuentra debajo del centro de la elipse, es decir, se trata de la directriz con ecuación:

$$y-k=-\frac{a^2}{c}.$$

Sustituyendo los valores de a y k, tenemos:

$$\begin{aligned} y-(-1) &= -\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2}{c} && \leftarrow \text{ Cuidado con el signo.}\\ y+1 &= -\frac{10}{c} && \leftarrow \text{ Recuerda que } -(-1)=1.\\ y &= -\frac{10}{c}-1 && \leftarrow \text{ El 1 pasa restando,} \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned} -\frac{10}{c}-1 &= -6\\ -\frac{10}{c} &= -6+1 && \leftarrow \text{ El 1 pasa sumando.}\\ -\frac{10}{c} &= -5\\ -\frac{10}{-5} &= c && \leftarrow \text{ Multiplicamos por } c \text{ y dividimos entre } -5.\\ 2 &= c. \end{aligned}$$

Así, $c=2$ y $a=\sqrt{10}$, entonces:

$$b^2=a^2-c^2=10-4=6,$$

por tanto $b=\sqrt{6}$. Sustituyendo $C(-3,-1)$ y los valores de a y b en la ecuación (6.32), obtenemos la ecuación simétrica de la elipse buscada:

$$\frac{(x+3)^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{10}=1.$$

4. Como los vértices tienen igual ordenada, se trata de una elipse horizontal. Calculamos el diámetro mayor, es decir:

$$\begin{aligned}
2a &= d(V',V)\\
2a &= \sqrt{\left(\frac{7}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2+\left(-7-(-7)\right)^2} && \leftarrow \text{Cuidado con los signos.}\\
2a &= \sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right)^2+\left(-7+7\right)^2} && \leftarrow \text{Recuerda que } -\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2} \text{ y } -(-7)=7.\\
2a &= \sqrt{36}\\
2a &= 6,
\end{aligned}$$

de donde,

$$a=3.$$

Puesto que:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3},$$

sustituyendo el valor de a, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{c}{a} &= \frac{1}{3}\\
\frac{c}{3} &= \frac{1}{3}\\
c &= \frac{3}{3} && \leftarrow \text{El 3 pasa multiplicando.}\\
c &= 1.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$b^2=a^2-c^2=(3)^2-(1)^2=8.$$

Ahora encontramos las coordenadas del centro $C(h,k)$, que es el punto medio entre los vértices $V'\left(-\frac{5}{2},-7\right), V\left(\frac{7}{2},-7\right)$:

$$(h,k)=\left(\frac{-\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}{2},\frac{-7+(-7)}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},-7\right).$$

Por último, sustituimos los valores $C\left(\frac{1}{2},-7\right)$, $a^2=9$ y $b^2=8$ en la ecuación correspondiente a una elipse horizontal:

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}&=1\\ \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{9}+\frac{(y-(-7))^2}{8}&=1\\ \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{9}+\frac{(y+7)^2}{8}&=1. \leftarrow \quad \text{Recuerda que} -(-7)=7.\end{aligned}$$

5. Escribimos la ecuación en la forma simétrica:

$$\begin{aligned}9x^2+18y^2-72x+12y+92&=0\\ 9x^2-72x+18y^2+12y&=-92 && \leftarrow \text{El 92 pasa restando.}\\ 9(x^2-8x)+18\left(y^2+\frac{12}{18}y\right)&=-92\\ 9(x^2-8x+16)+18\left(y^2+\frac{2}{3}y+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)&=-92+9(16)+18\left(\frac{1}{9}\right) && \leftarrow \text{Sumamos de ambos lados para no alterar la ecuación.}\\ 9(x-4)^2+18\left(y+\frac{1}{3}\right)^2&=54 && \leftarrow \text{Dividimos entre 9 de ambos lados.}\\ (x-4)^2+2\left(y+\frac{1}{3}\right)^2&=6 && \leftarrow \text{El 6 pasa dividiendo.}\\ \frac{(x-4)^2}{6}+2\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{6}&=1\\ \frac{(x-4)^2}{6}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{3}&=1.\end{aligned}$$

Se trata de una elipse horizontal. Para encontrar la ecuación de la recta tangente, recordamos que para una elipse con ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,$$

la ecuación de la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}+\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1.$$

Entonces sustituimos las coordenadas del punto $P\left(6,\frac{2}{3}\right)$, las coordenadas $\left(4,-\frac{1}{3}\right)$ del centro y los valores $a^2=6$ y $b^2=3$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{(6-4)(x-4)}{6}+\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)}{3} &= 1\\
\frac{2(x-4)}{6}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)}{3} &= 1\\
\frac{(x-4)}{3}+\frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)}{3} &= 1\\
(x-4)+\left(y+\frac{1}{3}\right) &= 3 && \leftarrow \text{ Multiplicamos por 3.}\\
y &= 3-x+4-\frac{1}{3} && \leftarrow \text{ Cuidado con los signos.}\\
y &= -x+\frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta buscada es $y=-x+\frac{20}{3}$.

Unidad 7. La hipérbola

Ejercicios impares

Página 339

1. $V(7,0)$, $V'(-7,0)$; $F\left(\sqrt{85},0\right)\approx F(9.22,0)$, $F'\left(-\sqrt{85},0\right)\approx F'(-9.22,0)$ (figura 178). **3.** $V(0,12)$, $V'(0,-12)$; $F\left(0,\sqrt{265}\right)\approx F(0,16.28)$, $F'\left(0,-\sqrt{265}\right)\approx F'(0,-16.28)$ (figura 179).

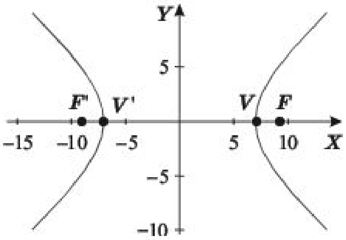


Figura 178

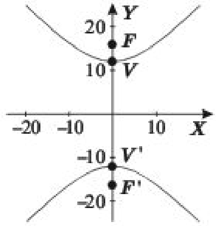


Figura 179

5. $V\left(\sqrt{6},0\right) \approx V\left(2.45,0\right)$, $V'\left(-\sqrt{6},0\right) \approx V'\left(-2.45,0\right)$; $F\left(\sqrt{10},0\right) \approx F\left(3.16,0\right)$, $F'\left(-\sqrt{10},0\right) \approx F'\left(-3.16,0\right)$ (figura 180). **7.** $V\left(0,4\right)$, $V'\left(0,-4\right)$; $F\left(0,6\right)$, $F'\left(0,-6\right)$ (figura 181). **9.** $V\left(9,0\right)$, $V'\left(-9,0\right)$; $F\left(3\sqrt{10},0\right) \approx F\left(9.49,0\right)$, $F'\left(-3\sqrt{10},0\right) \approx F'\left(-9.49,0\right)$ (figura 182). **11.** $V\left(0,3\right)$, $V'\left(0,-3\right)$; $F'\left(0,-\sqrt{13}\right) \approx F'\left(0,-3.61\right)$ (figura 183). **13.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$ (figura 184). 15. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (figura 185). **17.** $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$ (figura 186). **19.** $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$ y $\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$ (figura 187). **21.** $x^2+y^2=25$ (figura 188). **23.** La ecuación del círculo que pasa por los cuatro focos es $x^2+y^2=2a^2$. La ecuación del círculo que pasa por los cuatro vértices es $x^2+y^2=a^2$.

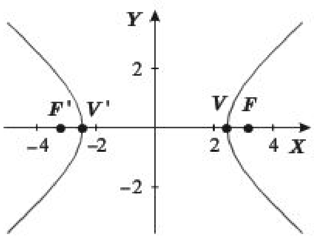


Figura 180

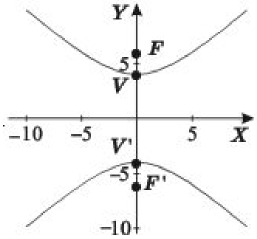


Figura 181

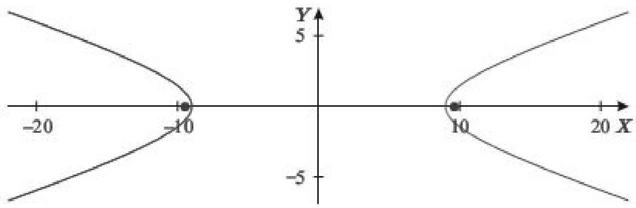


Figura 182

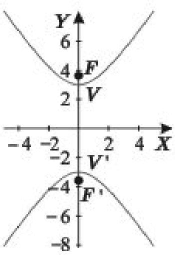


Figura 183

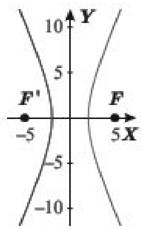


Figura 184

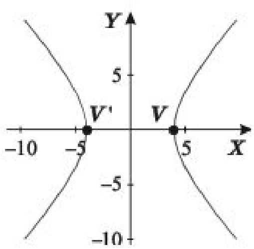


Figura 185

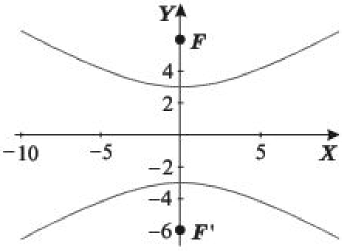


Figura 186

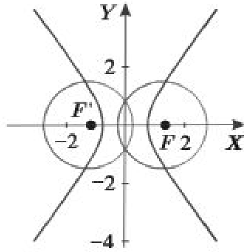


Figura 187

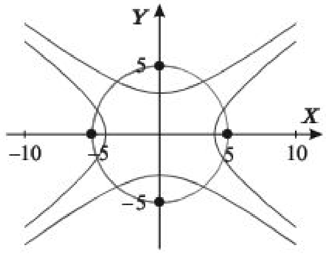


Figura 188

Página 347

1. $y=\frac{5}{12}x$, $y=-\frac{5}{12}x$ (figura 189). **3.** $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{15}=1$, $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{12}=1$, $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$, $\frac{y^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{\frac{63}{4}}=1$, $\frac{y^2}{\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{\frac{143}{9}}=1$ (figura 190).

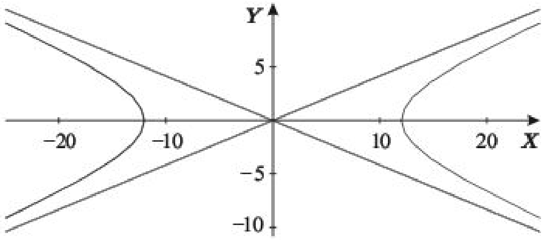


Figura 189

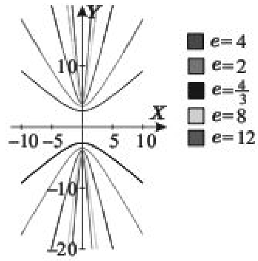


Figura 190

5. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{128}=1$ (figura 191). **7.** $\frac{y^2}{\frac{25}{16}}-\frac{x^2}{\frac{25}{256}}=1$ (figura 192). **9.** $\frac{y^2}{\frac{25}{144}}-\frac{x^2}{\frac{11}{144}}=1$ (figura 193). **11.** $\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$ (figura 194). **13.** $e=\frac{\sqrt{17}}{4}\approx 1.03$ (figura 195). **15.** $e=\sqrt{2}$ (figura 196). **17.** Las asíntotas son las mismas: $y=\frac{1}{10}x$, $y=-\frac{1}{10}x$ (figura 197).

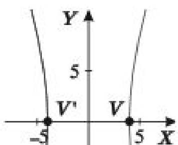


Figura 191

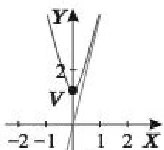


Figura 192

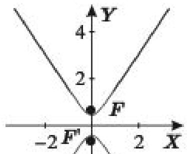


Figura 193

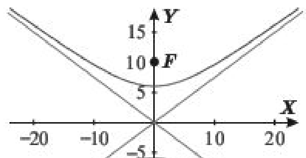


Figura 194

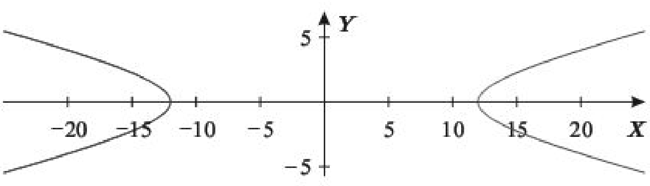


Figura 195

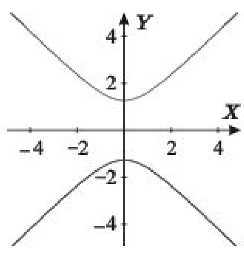


Figura 196

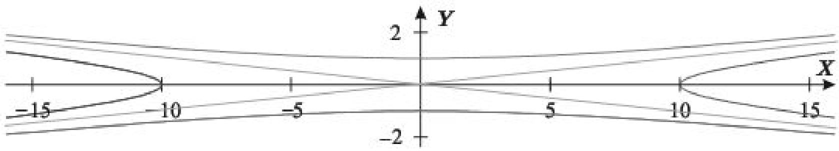


Figura 197

Página 361

1. $C(-3,7)$; $V(-3,12)$, $V'(-3,2)$; $F\left(-3,7+\sqrt{41}\right)\approx F(-3,13.4)$, $F'\left(-3,7-\sqrt{41}\right)\approx F'(-3,0.6)$ (figura 198). **3.** $C(-9,1)$; $V(0,1)$, $V'(-18,1)$; $F\left(-9+3\sqrt{10},1\right)\approx F(-0.5,1)$, $F'\left(-9-3\sqrt{10},1\right)\approx F'(-18.5,1)$ (figura 199).

5. $\frac{(x-2)^2}{400}-\frac{(y+2)^2}{400}=1$; $F\left(2+20\sqrt{2},-2\right)\approx F(30.3,-2)$, $F'\left(2-20\sqrt{2},-2\right)\approx F'(-26.3,-2)$; $V(22,-2)$, $V'(-18,-2)$; $y=x-4$, $y=-x$ (figura 200).

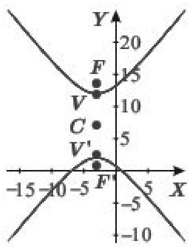


Figura 198

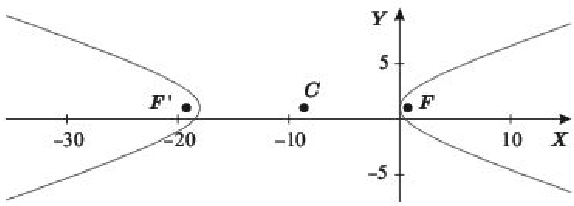


Figura 199

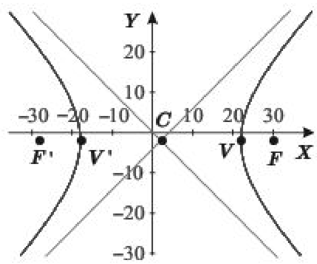


Figura 200

7. $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$, $F\left(-1+\sqrt{13},-3\right)\approx F(2.61,-3)$, $F'\left(-1-\sqrt{13},-3\right)\approx F'(-4.61,-3)$, $V(2,-3)$, $V'(-4,-3)$, $y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3}$, $y=-\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ (figura 201). **9.** $\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x+6)^2}{49}=1$, $F\left(-6,-1+\sqrt{53}\right)\approx F(-6,6.3)$, $F'\left(-6,-1-\sqrt{53}\right)\approx F'(-6,-8.3)$, $V(-6,1)$, $V'(-6,-3)$, $y=\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}$, $y=-\frac{2}{7}x-\frac{19}{7}$ (figura 202).

11. $\frac{(y-4)^2}{9}-\frac{(x-5)^2}{9}=1$; $F\left(5,4+3\sqrt{2}\right)\approx F(5,8.2)$, $F'\left(5,4-3\sqrt{2}\right)\approx F'(5,-0.2)$; $V(5,7)$, $V'(5,1)$; $y=x-1$, $y=-x+9$ (figura 203). **13.** $\frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+4)^2}{16}=1$; $F\left(5+2\sqrt{5},-4\right)\approx F(9.5,-4)$, $F'\left(5-2\sqrt{5},-4\right)\approx F'(0.5,-4)$; $V(7,-4)$, $V'(3,-4)$; $y=2x-14$, $y=-2x+6$ (figura 204). **15.** $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-5)^2}{2}=1$; $F\left(-2+\sqrt{6},5\right)\approx F(0.4,5)$, $F'\left(-2-\sqrt{6},5\right)\approx F'(-4.4,5)$; $V(0,5)$, $V'(-4,5)$; $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}+5$, $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}+5$ (figura 205). **17.** $\frac{(y-1)^2}{16}-\frac{(x-8)^2}{6}=1$; $V(8,5)$, $V'(8,-3)$; $F\left(8,1+\sqrt{22}\right)\approx F(8,5.7)$, $F'\left(8,1-\sqrt{22}\right)\approx F'(8,-3.7)$; $y=\frac{4}{\sqrt{6}}x-\frac{32}{\sqrt{6}}+1$,

$y=-\frac{4}{\sqrt{6}}x+\frac{32}{\sqrt{6}}+1$ (figura 206). **19.** $\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$ (figura 207). **21.** $\frac{y^2}{49}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$ (figura 208). **23.** $\frac{(y-4)^2}{14}-\frac{(x-1)^2}{14}=1$ (figura 209). **25.** $\frac{(y-2)^2}{25}-\frac{(x+2)^2}{625}=1$ (figura 210). **27.** $\frac{(x-8)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{6}{25}}=1$ (figura 211). **29.** $(x+5)^2=4(5)(y-1)$ (figura 212).

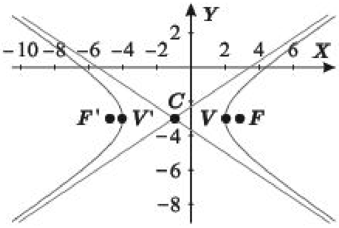


Figura 201

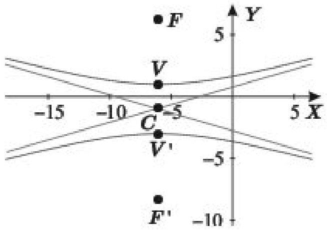


Figura 202

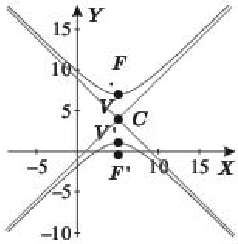


Figura 203

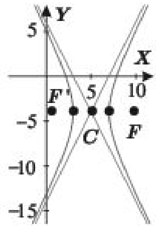


Figura 204

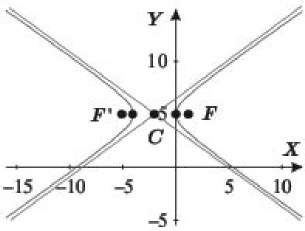


Figura 205

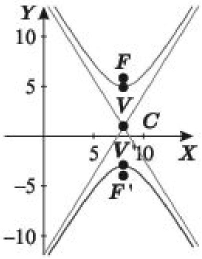


Figura 206

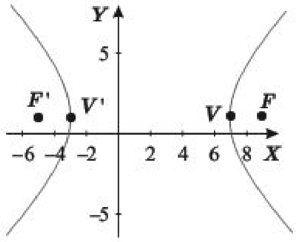


Figura 207

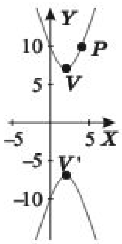


Figura 208

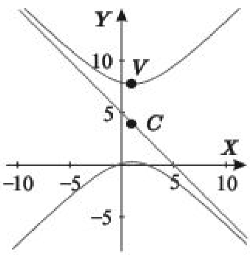


Figura 209

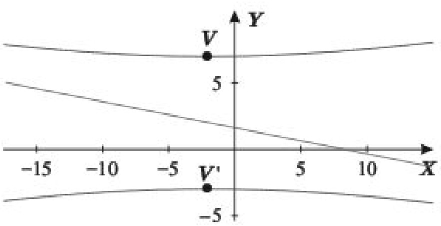


Figura 210

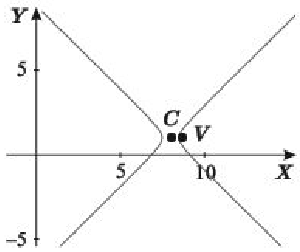


Figura 211

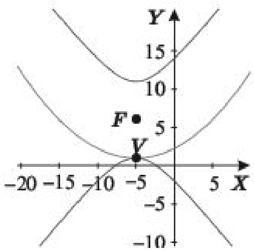


Figura 212

31. $\frac{(y-6)^2}{9}-\frac{(x+8)^2}{3}=1$ (figura 213). **33.** $\frac{(x-4)^2}{144}-\frac{(y+3)^2}{81}=1$ (figura 214). **35.** Ecuaciones de las asíntotas: $3x-2y-11=0$ y $3x+2y-7=0$. La distancia del foco $F'\left(3,-1-\sqrt{13}\right)$ a cada una de las asíntotas es 2, que es el valor de b (figura 215). **37.** El lado recto mide $\frac{33}{4}$. Ecuaciones de las asíntotas: $y=\frac{\sqrt{33}}{4}x+\frac{\sqrt{33}}{4}+5$, $y=-\frac{\sqrt{33}}{4}x-\frac{\sqrt{33}}{4}+5$. Ecuaciones de las directrices: $x=\frac{1}{7}$, $x=-\frac{15}{7}$ (figura 216).

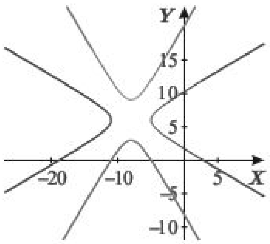


Figura 213

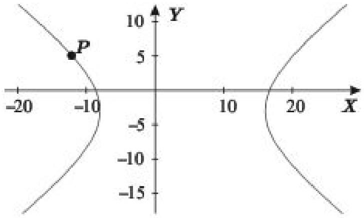


Figura 214

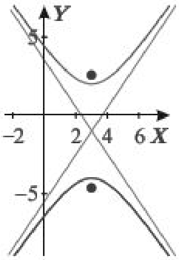


Figura 215

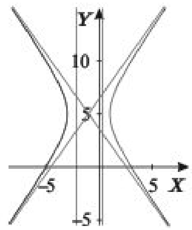


Figura 216

Página 367

1. $x^2 = 104(y+13)$ (figura 217). **3.** La diferencia de tiempos en las señales Loran que debe buscar para seguir esa trayectoria es 0.0005 segundos. **5.** Los dos lugares posibles donde pudo caer el rayo son $(6,8)$ y $(6,-8)$ (figura 218). **7.** Ecuación de la hipérbola: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$. Ecuación de la parábola: $x^2 = 32(y+4)$ (figura 219).

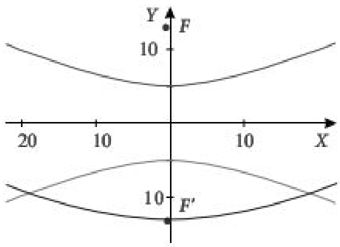


Figura 217

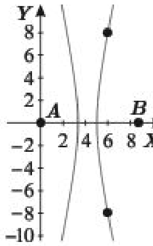


Figura 218

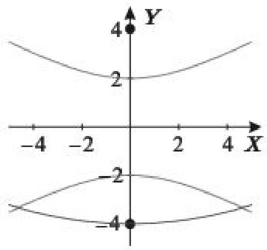


Figura 219

Página 373

1. $8xy + 15y^2 + 32x + 120y + 224 = 0$ (figura 220).

3. $12xy - 35y^2 + 12x - 82y - 83 = 0$ (figura 221).

5. $3x^2 - y^2 - 42x + 6y + 126 = 0$ (figura 222). **7.** $2xy + 8x + 10y + 49 = 0$ (figura 223).

9. $-60x^2 - 40xy + 36y^2 + 300x - 156y - 631 = 0$ (figura 224).

11. $5x^2 + 18xy + 5y^2 + 28x + 28y - 196 = 0$ (figura 225). **13.** Los números son 4 y $\frac{1}{4}$, o bien -4 y $-\frac{1}{4}$. Interpretación geométrica: Los números buscados son los puntos de intersección de las dos hipérbolas que aparecen en la figura 226. **15.** Los números buscados son 3 y 1, o bien -3 y -1. Interpretación geométrica: los números buscados son los puntos de intersección de la hipérbola y el círculo que aparecen en la figura 227.

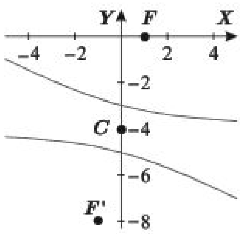


Figura 220

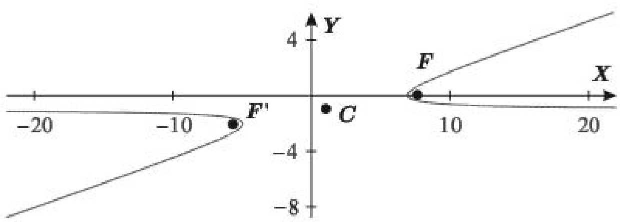


Figura 221

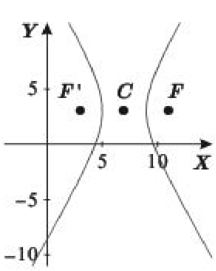


Figura 222

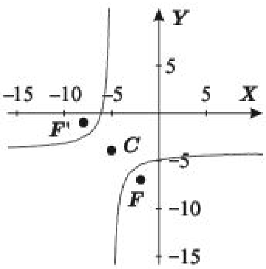


Figura 223

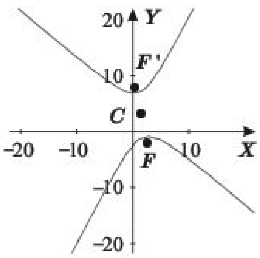


Figura 224

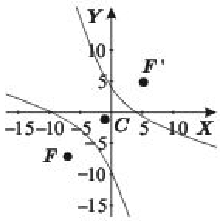


Figura 225

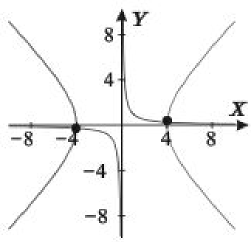


Figura 226

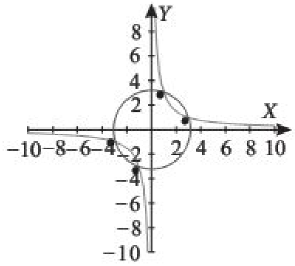


Figura 227

Página 376

1. Constante de proporcionalidad: $k=150$. Ecuación: $y=\frac{150}{x}$. **3.** Constante de proporcionalidad: $k=24$. Ecuación: $y=\frac{24}{x}$. **5.** Constante de proporcionalidad: $k=8$. Ecuación: $y=\frac{8}{x}$. **7.** La altura mide 10. El área de los triángulos es 20 unidades cuadradas. **9.** El aire está a una presión de 3 atmósferas dentro del cilindro.

Página 381

1. $(x-3)^2+(y+1)^2<9, (x-3)^2-(y+1)^2<1$ (figura 228). **3.** $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}<1, \frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{\frac{4}{3}}>1$, $y<-2x+2$ (figura 229).

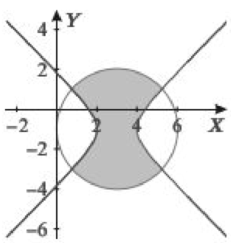


Figura 228

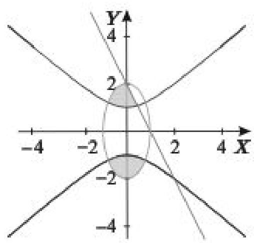


Figura 229

5. $y>3x+21, \frac{(y-7)^2}{25}-\frac{(x+5)^2}{1}>1, (x+5)^2+(y-6)^2<9$ (figura 230).

7. $(x-5)^2+(y+3)^2>81, (x-5)^2+(y+3)^2<162, \frac{(x-5)^2}{81}-\frac{(y+3)^2}{81}>1, \frac{(y+3)^2}{81}-\frac{(x-5)^2}{81}>1$ (figura 231).

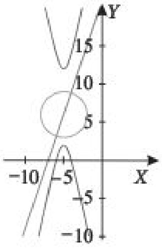


Figura 230

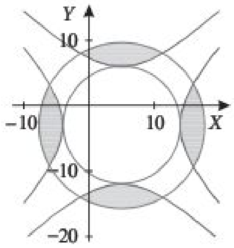


Figura 231

Página 385

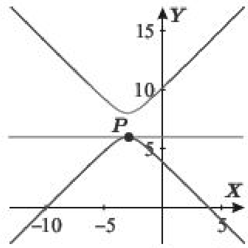


Figura 232

1. $y=6$ (figura 232). **3.** $y=\frac{3}{2}x-\frac{37}{2}$ (figura 233). **5.** $y=x+1$ (figura 234). **7.** $y=\frac{2}{3}x+\frac{16}{3}$ (figura 235). **9.** Ecuaciones de las rectas tangentes: $y=\frac{5}{3}x-19$, $y=-\frac{5}{3}x+13$. Punto de intersección de las dos rectas tangentes: $R\left(\frac{48}{5},-3\right)$. Como el eje focal está sobre la recta $y+3=0$, entonces el punto R se encuentra en el eje focal (figura 236).

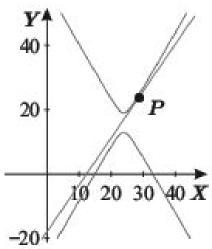


Figura 233

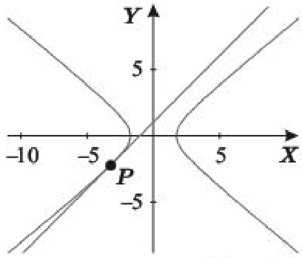


Figura 234

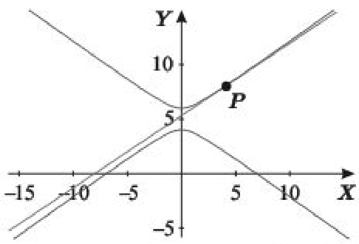


Figura 235

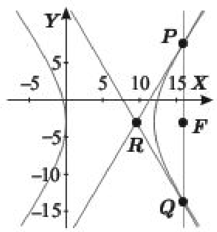


Figura 236

Página 389

1. $9x^2-y^2-90x-4y+230=0$ (figura 237).
3. $225x^2-900y^2-720x+600y+701=0$ (figura 238).
5. $4x^2-y^2+72x-8y+304=0$ (figura 239).

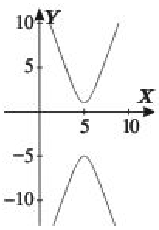


Figura 237

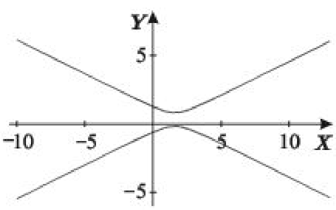


Figura 238

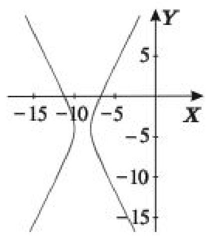


Figura 239

7. Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola: $\left(-3+3\sec t, 1+7\tan t\right)$ (figura 240).
9. Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola: $\left(-5+\sqrt{24}\sec t, \sqrt{2}\tan t\right)$ (figura 241). **11.** Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola: $\left(\sqrt{30}\sec t, -7+5\tan t\right)$ (figura 242). **13.** Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola: $\left(3+\frac{3}{2}\sec t, -2+\frac{\sqrt{27}}{2}\tan t\right)$ (figura 243).

15. $e=\dfrac{\sqrt{29}}{5}\approx 1.08$ (figura 244). **17.** Ecuaciones de las asíntotas:
$\sqrt{7}x-\sqrt{2}y+\frac{1}{3}\sqrt{2}-3\sqrt{7}=0$, $\sqrt{7}x+\sqrt{2}y-\frac{1}{3}\sqrt{2}-3\sqrt{7}=0$ (figura 245). **19.** Unas ecuaciones paramétricas de la hipérbola: $(6+10\tan t,-4+24\sec t)$ (figura 246).

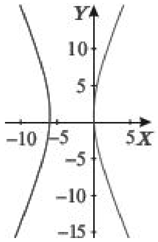


Figura 240

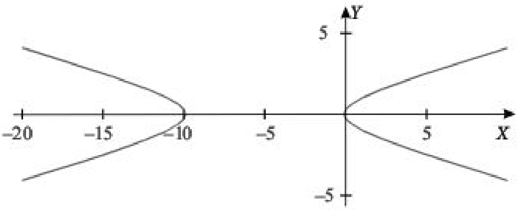


Figura 241

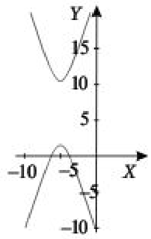


Figura 242

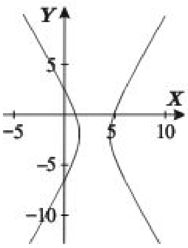


Figura 243

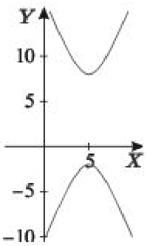


Figura 244

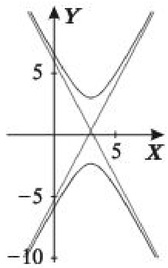


Figura 245

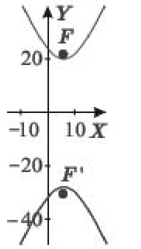


Figura 246

Página 395

1. El lugar geométrico buscado está contenido en la elipse $\frac{\left(x-\frac{25}{6}\right)^2}{\frac{625}{36}}+\frac{y^2}{\frac{625}{84}}=1$ (figura 247).

3. El lugar geométrico buscado está contenido en la hipérbola $\frac{\left(y-\frac{187}{63}\right)^2}{\frac{256}{3969}}-\frac{x^2}{\frac{256}{63}}=1$ (figura 248).

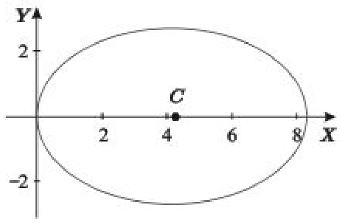


Figura 228

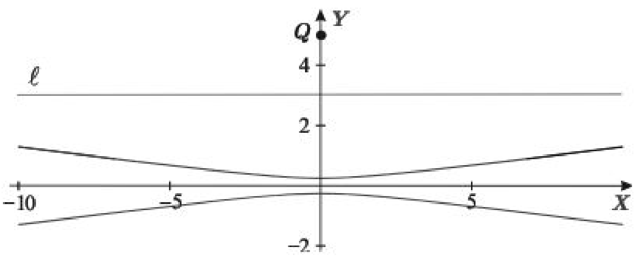


Figura 229

Ejercicios de repaso impares de la página 398

1. Son dos hipérbolas $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ y $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{5}=1$. Sus asíntotas son las rectas $y=2x$ y $y=-2x$ (figura 249). **3.** Las asíntotas de ambas hipérbolas son $y=\sqrt{\frac{2}{5}}x$ y $y=-\sqrt{\frac{2}{5}}x$ (figura 250). **5. a)** $e=\sqrt{2}$ (figura 251). **b)** $e=\sqrt{2}$ (figura 252).

c) $e=\sqrt{2}$ (figura 253). **d)** $e=\sqrt{2}$ (figura 254). **e)** $e=\sqrt{2}$. **f)** $e=\sqrt{2}$ (figura 255). **7.** Área $=\frac{4}{\sqrt{2}}$ (figura 256). **9.** Como el producto de las pendientes de las asíntotas es igual a -1, entonces son perpendiculares (figura 257). **11.** Son dos rectas $y=\frac{4}{\sqrt{5}}x-\frac{4}{\sqrt{5}}$ y $y=-\frac{4}{\sqrt{5}}x+\frac{4}{\sqrt{5}}$ (figura 258). **13.** $x^2+y^2=\frac{25}{144}$ (figura 259). **15.** $F\left(0,\frac{3}{20}\right)$, $F'\left(0,-\frac{3}{20}\right)$ (figura 260). **17.** La diferencia de las lecturas debe ser de $\frac{1}{3000}\approx 0.00033$ segundos.

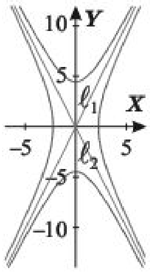


Figura 249

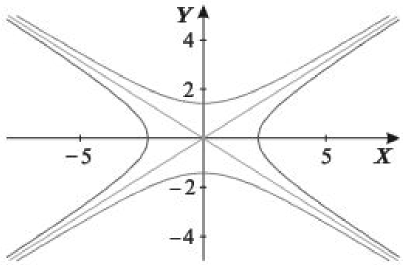


Figura 250

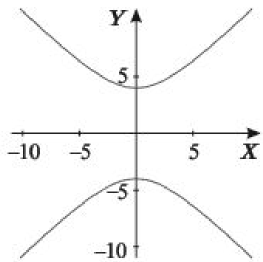


Figura 251

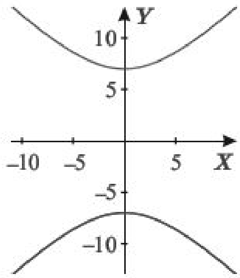


Figura 252

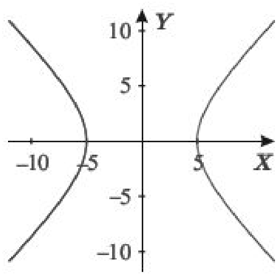


Figura 253

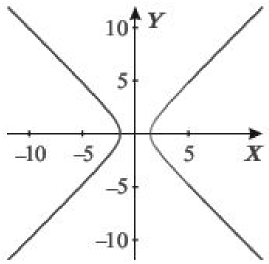


Figura 254

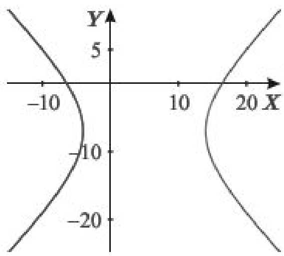


Figura 255

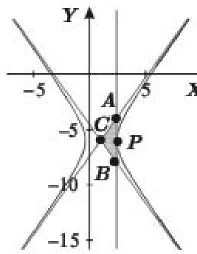


Figura 256

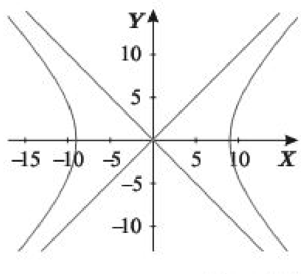


Figura 257

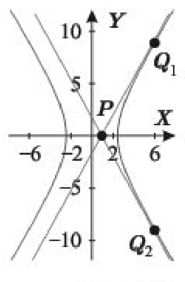


Figura 258

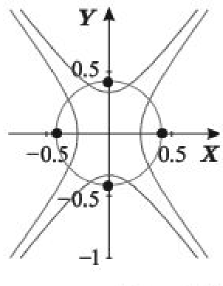


Figura 259

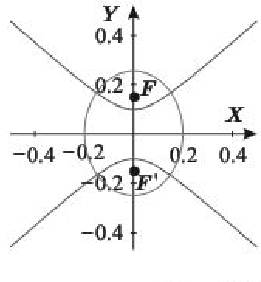


Figura 260

19. Ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola horizontal que pasan por los vértices: $x=-10$ y $x=2$. Ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola vertical que pasan por los vértices: $y=-2$ y $y=14$. Puntos de intersección de las tangentes: $(-10,-2)$, $(2,-2)$, $(2,14)$, $(-10,14)$. Ecuación del círculo: $(x+4)^2+(y-6)^2=100$. Como la distancia del centro $C(-4,6)$ del círculo a cualquiera de los focos es 10, que es el radio del círculo, entonces los focos están en el círculo (figura 261).

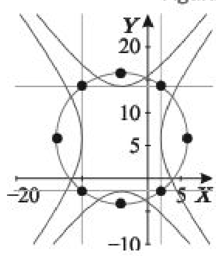


Figura 261

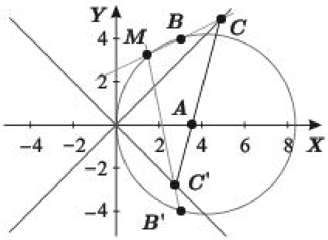


Figura 262

21. El lugar geométrico es el círculo con ecuación $\left(x-\frac{25}{6}\right)^2+y^2=\left(\frac{25}{6}\right)^2$ (figura 262).

Autoevaluación

1. d. **2.** b. **3.** a. **4.** d. **5.** a. **6.** c. **7.** a. **8.** a.

Heteroevaluación

1. Escribimos la ecuación en la forma simétrica:

$$45x^2-36y^2+180x+24y+896 = 0$$

$$45x^2+180x-36y^2+24y = -896 \quad \leftarrow \text{ El 896 pasa restando.}$$

$$45\left(x^2+4x+4\right)-36\left(y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}\right) = -896+45(4)-36\left(\frac{1}{9}\right) \quad \leftarrow \text{ Sumamos de ambos lados para no alterar la igualdad.}$$

$$45(x+2)^2-36\left(y-\frac{1}{3}\right)^2 = -720$$

$$\frac{45(x+2)^2}{-720}-\frac{36\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{-720} = 1 \quad \leftarrow \text{ El }-720\text{ pasa dividiendo.}$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{-720}{45}}-\frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{-720}{36}} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{-16}-\frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{-20} = 1$$

$$\frac{\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}{20}-\frac{(x+2)^2}{16} = 1.$$

Es una hipérbola vertical con centro en:

$$C\left(-2,\frac{1}{3}\right) \quad \leftarrow \text{ Cuidado en la elección de } h \text{ y } k.$$

$a^2=20$ y $b^2=16$. De donde, recordando la relación que existe entre a, b y c:

$$c^2=a^2+b^2=20+16=36,$$

es decir,

$$c=6.$$

Entonces los focos son:

$$F'\left(-2,\frac{1}{3}-6\right)=F'\left(-2,-\frac{17}{3}\right)$$

y

$$F'\left(-2,\frac{1}{3}-6\right)=F'\left(-2,-\frac{17}{3}\right),$$

ya que la hipérbola es vertical.

2. Escribimos la ecuación en la forma simétrica:

$$\begin{aligned}
15x^2-8y^2-120x+80y-80 &= 0 \\
15x^2-120x-8y^2+80y &= 80 && \leftarrow \text{ El 80 pasa sumando.} \\
15\left(x^2-8x\right)-8\left(y^2-10y\right) &= 80 \\
15\left(x^2-8x+16\right)-8\left(y^2-10y+25\right) &= 80+15(16)-8(25) && \leftarrow \text{ Sumamos de ambos lados para no alterar la igualdad.} \\
15(x-4)^2-8(y-5)^2 &= 120 \\
\frac{15(x-4)^2}{120}-\frac{8(y-5)^2}{120} &= 1 && \leftarrow \text{ El 120 pasa dividiendo.} \\
\frac{(x-4)^2}{8}-\frac{(y-5)^2}{15} &= 1.
\end{aligned}$$

Es una hipérbola horizontal con centro $C(4,5)$, $a^2=8$, de donde $a=\sqrt{8}$. Encontramos los vértices sumando y restando $\sqrt{8}$ a la abscisa del centro, ya que la hipérbola es horizontal:

$$V'\left(4-\sqrt{8},5\right) \quad \text{y} \quad V\left(4+\sqrt{8},5\right).$$

3. Como los focos tienen la misma ordenada, la hipérbola es horizontal. Encontramos el punto medio de los focos, para encontrar el centro de la hipérbola:

$$C(h,k)=C\left(\frac{0+12}{2},\frac{-3-3}{2}\right)=C(6,-3).$$

Para encontrar el valor de c, calculamos la distancia entre el centro y cualquiera de los focos:

$$c=\sqrt{(6-0)^2+(-3+3)^2}=6 \quad \leftarrow \text{ Cuidado con los signos.}$$

Puesto que:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{6}{5},$$

sustituyendo el valor de c tenemos:

$$\frac{6}{a}=\frac{6}{5}$$
$$a=5.$$

Entonces:

$$b^2=c^2-a^2=36-25=11,$$

de donde la ecuación simétrica es:

$$\frac{(x-6)^2}{25}-\frac{(y+3)^2}{11}=1.$$

4. Como los vértices tienen la misma abscisa, la hipérbola es vertical.
Encontramos el punto medio de los vértices, para encontrar el centro de la hipérbola:

$$C(h,k)=C\left(\frac{-9-9}{2},\frac{-7-2\sqrt{5}-7+2\sqrt{5}}{2}\right)=C(-9,-7).$$

Para encontrar el valor de a, calculamos la distancia entre el centro y cualquiera de los vértices:

$$a=\sqrt{(-9+9)^2+\left(-7+7+2\sqrt{5}\right)^2}=2\sqrt{5} \quad \leftarrow \quad \text{Cuidado con los signos.}$$

Como

$$-\frac{29}{7}\approx -4.14$$

y el centro tiene ordenada -7, entonces la directriz dada está entre el centro y el vértice $V\left(-9,-7+2\sqrt{5}\right)$, es decir tiene ecuación:

$$y-k=\frac{a^2}{c},$$

de donde:

$$\begin{aligned} y+7 &= \frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{c} \\ y &= \frac{20}{c}-7. \quad \leftarrow \text{ El 7 pasas restando.} \end{aligned}$$

Sustituyendo $y=-\frac{29}{7}$ tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{29}{7} &= \frac{20}{c}-7 \\ -\frac{29}{7}+7 &= \frac{20}{c} \quad \leftarrow \text{ El 7 pasa sumando.} \\ \frac{20}{7} &= \frac{20}{c} \quad \leftarrow \text{ Cuidado al despejar } c. \\ c &= 7. \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2-a^2 \\ &= 49-20 \\ &= 29. \end{aligned}$$

Así la ecuación buscada es:

$$\frac{\left(y+7\right)^2}{20}-\frac{\left(x+9\right)^2}{29}=1.$$

5. Escribimos la ecuación de la hipérbola:

$$\begin{aligned} 16x^2-9y^2-128x-18y-473 &= 0 \\ 16x^2-128x-9y^2-18y &= 473 \quad \leftarrow \text{ El 473 pasa sumando.} \\ 16\left(x^2-8x+16\right)-9\left(y^2+2y+1\right) &= 473+16\left(16\right)-9\left(1\right) \quad \leftarrow \text{ Sumamos de ambos lados para no alterar la igualdad.} \\ 16\left(x-4\right)^2-9\left(y+1\right)^2 &= 720 \\ \frac{16\left(x-4\right)^2}{720}-\frac{9\left(y+1\right)^2}{720} &= 1 \quad \leftarrow \text{ El 720 pasa dividiendo.} \\ \frac{\left(x-4\right)^2}{45}-\frac{\left(y+1\right)^2}{80} &= 1. \end{aligned}$$

Es una hipérbola horizontal con centro en $C\left(4,-1\right)$, $a^2=45$ y $b^2=80$, de donde:

$$a=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

y

$$b=\sqrt{80}=4\sqrt{5}.$$

Como la hipérbola es horizontal, las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y-k=\frac{b}{a}(x-h)$$
$$y+1=\frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}(x-4)$$
$$y+1=\frac{4}{3}(x-4)$$

y

$$y-k=-\frac{b}{a}(x-h)$$
$$y+1=-\frac{4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}(x-4)$$
$$y+1=-\frac{4}{3}(x-4).$$

6. Escribimos la ecuación en la forma simétrica:

$$\begin{aligned}
x^2-5y^2+2x+10y-24 &= 0 \\
x^2-5y^2+2x+10y &= 24 && \leftarrow \text{ El 24 pasa sumando.} \\
x^2+2x-5\left(y^2-2y\right) &= 24 \\
\left(x^2+2x+1\right)-5\left(y^2-2y+1\right) &= 24+1-5 && \leftarrow \text{ Sumamos de ambos lados para no alterar la igualdad.} \\
(x+1)^2-5(y-1)^2 &= 20 \\
\frac{(x+1)^2}{20}-\frac{5(y-1)^2}{20} &= 1 && \leftarrow \text{ El 20 pasa dividiendo.} \\
\frac{(x+1)^2}{20}-\frac{(y-1)^2}{4} &= 1.
\end{aligned}$$

Es una hipérbola horizontal con centro en $C(-1,1)$, $a^2=20$ y $b^2=4$.

Recordamos que para una hipérbola horizontal, la ecuación de la recta tangente es:

$$\frac{(x_1-h)(x-h)}{a^2}-\frac{(y_1-k)(y-k)}{b^2}=1.$$

Sustituyendo $P(9,-3)$, $C(-1,1)$, $a^2=20$ y $b^2=4$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(9-(-1)\right)\left(x-(-1)\right)}{20}-\frac{(-3-1)(y-1)}{4} &= 1 \\
\frac{10(x+1)}{20}-\frac{-4(y-1)}{4} &= 1 && \leftarrow \text{ Recuerda que } -(-1)=1. \\
\frac{x+1}{2}+y-1 &= 1 \\
y-1 &= 1-\frac{x+1}{2} && \leftarrow \text{ El término } \frac{x+1}{2} \text{ pasa restando.} \\
y &= 2-\frac{x+1}{2} \\
y &= -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Unidad 8. La ecuación general de segundo grado

Ejercicios impares

Página 412

1. $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1,-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)$, $B\left(-4\sqrt{3}-2,4-2\sqrt{3}\right)$, $C\left(2\sqrt{3}+\frac{7}{2},-2+\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)$. **3.** $A\left(\frac{8}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$, $B\left(\frac{8}{\sqrt{2}},-\frac{10}{\sqrt{2}}\right)$, $C\left(-\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{18}{\sqrt{2}}\right)$. **5.** $A(1,0)$, $B(-2,3)$, $C(-5,-7)$. **7.** $A\left(-\sqrt{3},1\right)$, $B\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3},\frac{3}{2}\sqrt{3}-1\right)$, $C\left(-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3},-\frac{7}{2}\sqrt{3}-\frac{5}{2}\right)$. **9.** $A\left(1+\frac{7\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}+\frac{7}{2}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}+4\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}+4\right)$, $C\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$. **11.** $A(7,1)$, $B(8,-8)$, $C(35,2)$.

13. $x'-\sqrt{2}y'-5=0$. **15.** $4x'+9=0$. **17.** $4x'+5y'+7=0$. **19.** $x'+2y'-7=0$.

21. $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}-4\right)x'-\left(\frac{5}{2}+4\sqrt{3}\right)y'+5=0$. **23.** $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)x'-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)y'=0$.

25. $(x')^2-(y')^2=1$ (figura 263). **27.** $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{12}=1$. (figura 264). **29.** $\frac{(y')^2}{2}-\frac{(x')^2}{2}=1$ (figura 265). **31.** $(x'-1)^2=-4\left(\frac{5}{4}\right)\left(y'-\frac{6}{5}\right)$ (figura 266). **33.** $\frac{(x')^2}{\frac{1}{8}}+\frac{(y')^2}{\frac{1}{4}}=1$ (figura 267). **35.** $(x')^2=y'$ (figura 268). **37.** $\frac{(x'+3)^2}{64}-\frac{(y'+1)^2}{16}=1$ (figura 269). **39.** $(x')^2=2(y'+3)$ (figura 270). **41.** El producto de las pendientes de las rectas es -1, entonces las rectas son perpendiculares. Después de la rotación, la ecuación de la recta $3x+y-7=0$ se convierte en $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)x'+\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right)y'-7=0$ y la recta $x-3y-27=0$ se convierte en $\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right)x'-\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)y'-27=0$. El producto de las pendientes de las rectas rotadas es

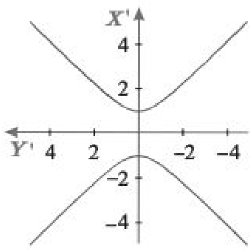


Figura 263

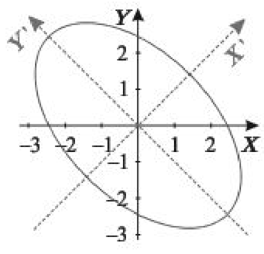


Figura 264

−1, entonces el ángulo entre ellas es de 90° (figura 271). **43.** $\frac{(x')^2}{25}+\frac{(y')^2}{16}=1$ (figura 272). Las coordenadas de los vértices en el sistema $X'Y'$ son $V_1(-5,0)$ y $V_2(5,0)$.

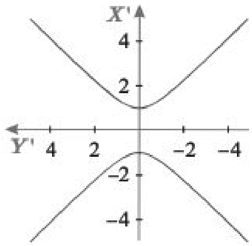


Figura 265

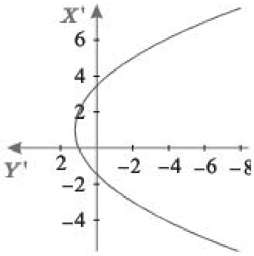


Figura 266

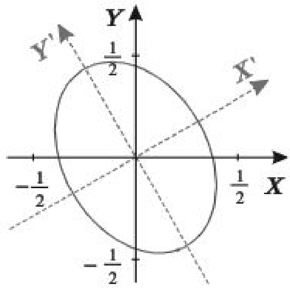


Figura 267

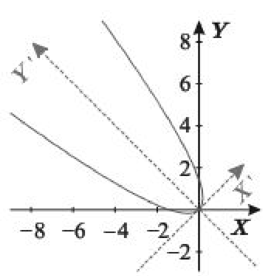


Figura 268

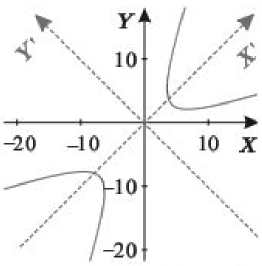


Figura 269

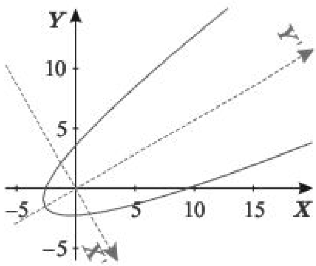


Figura 270

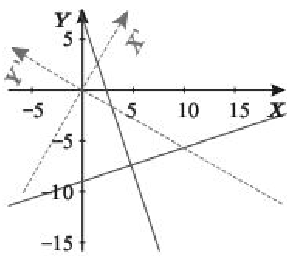


Figura 271

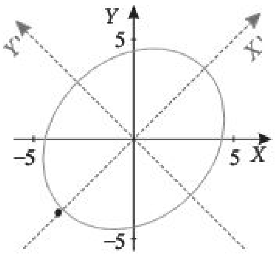


Figura 272

Página 419

1. $\frac{(x-2)^2}{6}+\frac{(y-4)^2}{24}=1$. Elipse vertical. Centro: $C(2,4)$; $a=\sqrt{24}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{18}$; $F(2,4+\sqrt{18})\approx F(2,8.24)$, $F'(2,4-\sqrt{18})\approx F'(2,-0.24)$; $V(2,4+\sqrt{24})\approx V(2,8.9)$, $V'(2,4-\sqrt{24})\approx V'(2,-0.9)$. Ecuación de la cónica en el nuevo sistema de coordenadas: $\frac{(x')^2}{6}+\frac{(y')^2}{24}=1$ (figura 273). **3.** $(y-8)^2=-4\left(\frac{3}{7}\right)(x+5)$; $V(-5,8)$; $p=\frac{3}{7}\approx 0.43$; $F\left(-\frac{38}{7},8\right)\approx F(-5.43,8)$. Ecuación en el nuevo sistema de coordenadas: $(y')^2=-\frac{12}{7}(x')$ (figura 274). **5.** $(x')^2+(y')^2=18$ (figura 275).

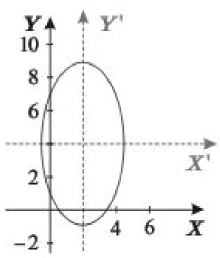


Figura 273

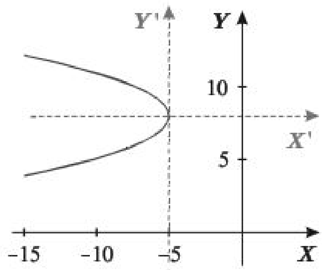


Figura 274

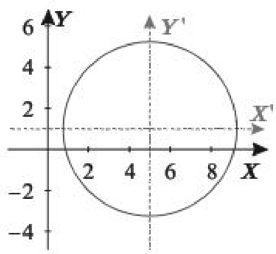


Figura 275

Página 426

1. La rotación es de 45° (figura 276). **3.** La rotación es de aproximadamente 26.6° (figura 277). **5.** La rotación es de aproximadamente 26.6° (figura 278). **7.** Elipse.

9. Elipse. **11.** Hipérbola. **13.** Hipérbola. **15.** Parábola. $(y'+4)^2=-4x'$. Rotación de 60° (figura 279). **17.** Elipse. $\frac{(x'-3)^2}{9}+\frac{(y'+5)^2}{4}=1$. Rotación de 45° (figura 280).

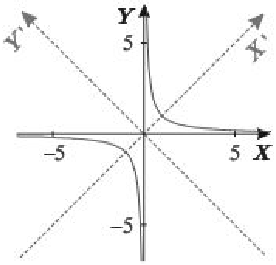


Figura 276

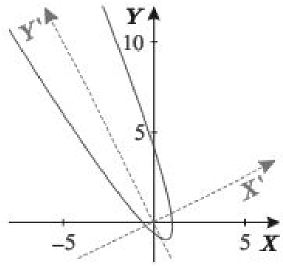


Figura 277

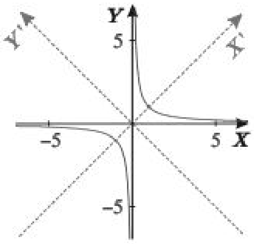


Figura 278

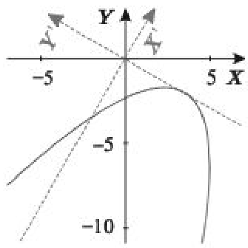


Figura 279

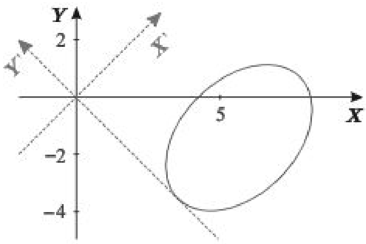


Figura 280

Página 429

1. El lugar geométrico está contenido en la hipérbola $64x^2+144xy-44y^2+1520x+680y-1420=0$ (figura 281). **3.** Hay dos casos: Si $2x-y+3\geq 0$, la cónica es $x^2+4xy+4y^2-\left(22+24\sqrt{5}\right)x+\left(56+12\sqrt{5}\right)y-59-36\sqrt{5}=0$. Es una parábola. El lugar geométrico son los puntos de la parábola que están debajo de la recta $y=2x+3$ (figura 282). Si $2x-y+3<0$, la cónica es $x^2+4xy+4y^2-\left(22-24\sqrt{5}\right)x+\left(56-12\sqrt{5}\right)y-59+36\sqrt{5}=0$. Es una parábola. El lugar geométrico son los puntos de la parábola que se encuentran arriba de la recta $y=2x+3$ (figura 283).

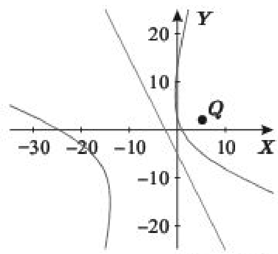


Figura 281

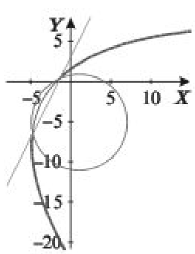


Figura 282

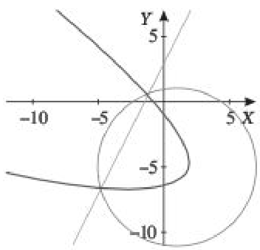


Figura 283

Ejercicios de repaso impares de la página 431

1. La rotación es de 30°. En el nuevo sistema de coordenadas es la elipse $\left(x'-3\right)^2+\frac{(y'-6)^2}{36}=1$ (figura 284). **3.** Si $k=\frac{25}{12}$, es una parábola. Si $k>\frac{25}{12}$, es una elipse. Si $k<\frac{25}{12}$, es una hipérbola. **5.** $x^2-2xy+y^2-10x-10y+25=0$ es una parábola (figura 285). **7.** $F'\left(-2+\frac{3}{5}\sqrt{5},-\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)\approx F'\left(-0.66,-1.79\right)$, $F\left(-3.34,\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)\approx F\left(-2-\frac{3}{5}\sqrt{5},1.79\right)$ (figura 286).

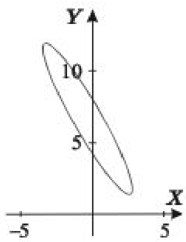


Figura 284

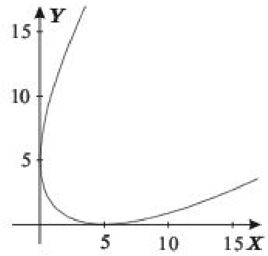


Figura 285

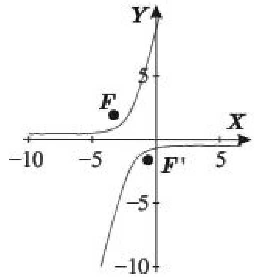


Figura 286

Autoevaluación

1. b. **2.** c. **3.** d. **4.** c. **5.** b. **6.** a.

Heteroevaluación

1. Utilizaremos las fórmulas:

$$x=x'\cos 60\ -y'\operatorname{sen}60 \leftarrow \text{Cuidado al elegir las ecuaciones.}$$
$$y=x'\operatorname{sen}60\ +y'\cos 60$$

recordemos que:

$$\cos 60\ =\frac{1}{2}\qquad \operatorname{sen}60\ =\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sustituimos:

$$x=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'$$

en la ecuación de la parábola:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'-1\right)^2 = 8\left(\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y'-2\right) \leftarrow$$ El primer término es un trinomio al cuadrardo.

$$\frac{3}{4}(x')^2+\frac{1}{4}(y')^2+1+\frac{1}{2}\sqrt{3}x'y'-\sqrt{3}x'-y' = 4x'-4\sqrt{3}y'-16$$

$$\frac{3}{4}(x')^2+\frac{1}{4}(y')^2+1+\frac{1}{2}\sqrt{3}x'y'-\sqrt{3}x'-y'-\left(4x'-4\sqrt{3}y'-16\right) = 0 \leftarrow$$ Cuidado con los signos.

$$\frac{3}{4}(x')^2+\frac{1}{4}(y')^2+\frac{1}{2}\sqrt{3}x'y'-\left(\sqrt{3}+4\right)x'-\left(1-4\sqrt{3}\right)y'+17 = 0 \leftarrow$$ Cuidado con los signos.

$$3(x')^2+(y')^2+2\sqrt{3}x'y'-\left(4\sqrt{3}+16\right)x'-\left(4-16\sqrt{3}\right)y'+68 = 0.$$

2. Sustituimos los valores de $A=34\sqrt{2}$, $B=-32\sqrt{2}$ y $C=34\sqrt{2}$ en la ecuación:

$$\cot 2 \ =\frac{A-C}{B},$$

entonces:

$$\cot 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{34\sqrt{2}-34\sqrt{2}}{-32\sqrt{2}}=0.$$

Así, buscamos un ángulo $0° < \theta < 90$ tal que la cotangente de 2θ vale 0; así que $2\theta = 90°$ y, por tanto, $\theta = 45°$.

Como:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

tenemos que al sustituir estos valores en las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \leftarrow \text{Cuidado al elegir las fórmulas.} \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

obtenemos:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y', \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Al sustituir estos valores en la ecuación:

$$34\sqrt{2}x^2 - 32\sqrt{2}xy + 34\sqrt{2}y^2 - 384x + 816y + 1998\sqrt{2} = 0,$$

tenemos:

$$34\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 - 32\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 34\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2$$

$$-384\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 816\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 1998\sqrt{2} = 0.$$

Efectuamos las operaciones y simplificamos. ¡Cuidado con los signos y las operaciones!

$$\begin{aligned}
34\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 &= 17\sqrt{2}(x')^2 - 34\sqrt{2}x'y' + 17\sqrt{2}(y')^2 \\
-32\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) &= -16\sqrt{2}(x')^2 + 16\sqrt{2}(y')^2 \\
34\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right)^2 &= 17\sqrt{2}(x')^2 + 34\sqrt{2}x'y' + 17\sqrt{2}(y')^2 \\
-384\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) &= -192\sqrt{2}x' + 192\sqrt{2}y' \\
816\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'\right) + 1998\sqrt{2} &= 408\sqrt{2}x' + 408\sqrt{2}y' + 1998\sqrt{2}
\end{aligned}$$

sumando las expresiones tenemos que la ecuación se transforma en:

$$18\sqrt{2}(x')^2 + 50\sqrt{2}(y')^2 + 216\sqrt{2}x' + 600\sqrt{2}y' + 1998\sqrt{2} = 0,$$

dividimos entre $2\sqrt{2}$:

$$9(x')^2+25(y')^2+108x'+300y'+999=0.$$

Escribimos la ecuación anterior en la forma simétrica: $b=3$.

$$\begin{aligned}
9(x')^2+25(y')^2+108x'+300y'+999 &= 0\\
9(x')^2+108x'+25(y')^2+300y' &= -999\\
9\left((x')^2+12x'+36\right)+25\left((y')^2+12y'+36\right) &= -999+9(36)+25(36)\\
9\left(x'+6\right)^2+25\left(y'+6\right)^2 &= 225\\
\frac{9\left(x'+6\right)^2}{225}+\frac{25\left(y'+6\right)^2}{225} &= 1\\
\frac{\left(x'+6\right)^2}{25}+\frac{\left(y'+6\right)^2}{9} &= 1.
\end{aligned}$$

Es una elipse, donde $a=5$ y $b=3$. Es horizontal respecto al nuevo sistema de coordenadas y en ese sistema tiene su centro en $\left(-6,-6\right)$.

3. Recuerda que cuando en la ecuación de una cónica aparece el término xy, no es suficiente considerar cómo se relacionan los coeficientes A y C.
Analizamos el discriminante:

$$\begin{aligned}
B^2-4AC &= \left(-9\right)^2-4\left(5\right)\left(4\right)\\
&= 81-80\\
&= 1>0,
\end{aligned}$$

de donde la cónica es una hipérbola.

Índice analítico

espacios

Espacios es una serie de libros para estudiantes de bachillerato, cuyos objetivos principales son comprender y atender la actualidad de los jóvenes y satisfacer los propósitos específicos de cada asignatura. Con las actividades propuestas, los estudiantes consolidarán habilidades de pensamiento indispensables para la vida, como saber resolver problemas, argumentar, generar juicios de valor y tomar decisiones.

La estructura de esta obra facilita el estudio de los temas centrales de la materia: la recta, el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. En la presentación de todos los temas se aborda la constante relación entre el álgebra y la geometría, lo que constituye la esencia misma de la Geometría Analítica.

Se presentan numerosas aplicaciones, especialmente en el caso de las cónicas; se trabajan de forma muy importante las situaciones de nuestro entorno en las que éstas son utilizadas; por ejemplo, se destaca su uso en la arquitectura y la medicina.

El libro, que de por sí constituye un ejercicio valioso de didáctica con abundantes explicaciones y exposiciones tanto de procedimientos como de conceptos matemáticos, incluye un CD con el programa interactivo *Geolab*, que es un laboratorio virtual de geometría con el que los alumnos desarrollarán su máximo potencial.

ISBN 978-607-32-0689-1

90000

9 786073 206891

PEARSON

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net